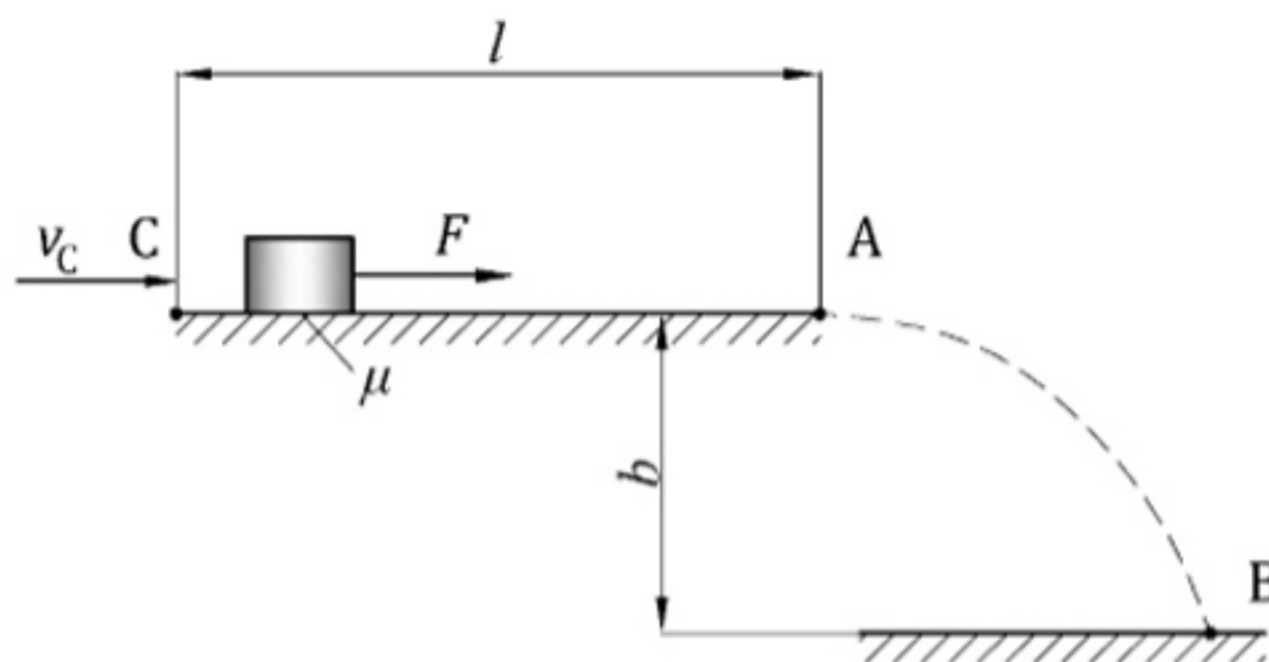


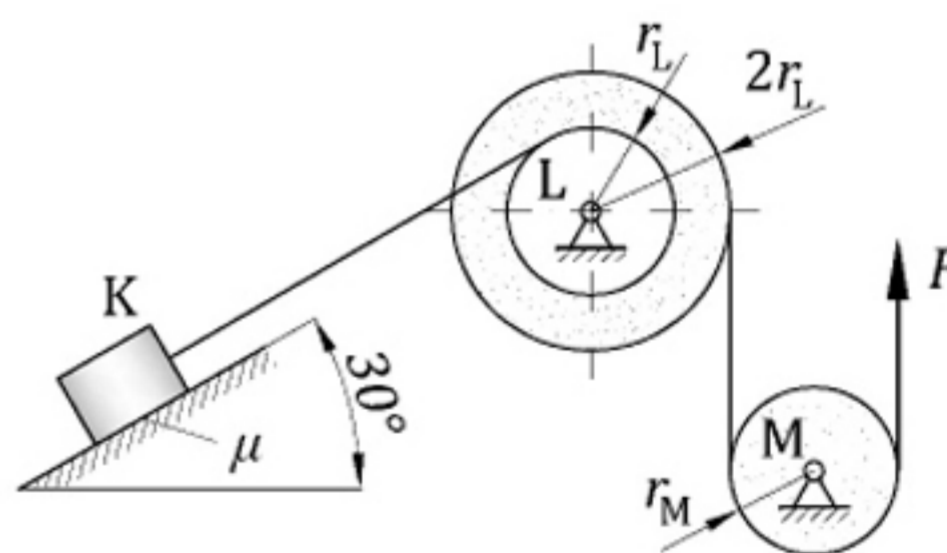
ЗАВРШНИ ИСПИТ ИЗ ДИНАМИКЕ

1. Тијело масе 3 kg, приказано на слици, почиње кретање из положаја C почетном брзином $v_C = 1 \text{ m/s}$ под дејством константне силе $F = 10 \text{ N}$. Коефицијент динамичког трења између тијела и подлоге је $\mu = 0,1$.



- Ако је брзина тијела у положају A $v_A = 4 \text{ m/s}$, одредити растојање l између положаја C и A користећи се основном једначином динамике.
- Добијени резултат провјерити примјеном закона о промјени кинетичке енергије.
- Примјеном закона о промјени кинетичке енергије, одредити интензитет брзине којом тијело удара у подлогу у тачки B, која је у односу на тачку A спуштена за висину $b = 1,02 \text{ m}$. Дејство силе F престаје након тачке A.
- Одредити вријеме потребно да тијело из тачке A дође у тачку B.

2. Систем приказан на слици доводи се у кретање, из стања мировања, посредством константне силе F .

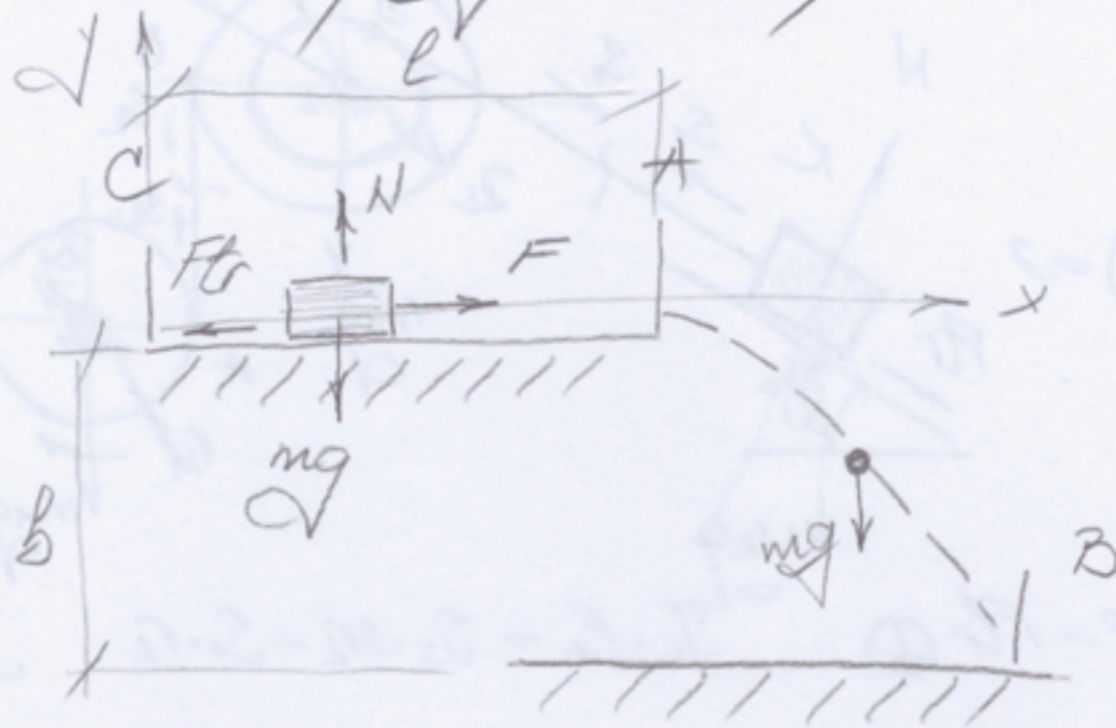


- Написати једначине кретања за свако појединачно тијело.
- Одредити угаоно убрзање тијела L.
- Одредити кинетичку енергију система у функцији брзине центра инерције тијела K.
- Примјеном закона о промјени кинетичке енергије, одредити пут који пређе тијело K док брзина његовог центра инерције не достигне брзину $v_K = 4,1 \text{ m/s}$.

i_L	m_K	m_L	m_M	$F \text{ [N]}$	$r_L \text{ [m]}$	μ	$m \text{ [kg]}$
$r_L/2$	m	$4m$	$2m$	$2,86mg$	$0,49$	$0,1$	2

Задача (решение)

- 1) $m = 3 \text{ kg}$
 $v_c = 1 \text{ m/s}$
 $F = 10 \text{ kN}$
 $\mu = 0,1$
 $v_A = 4 \text{ m/s}$
 $l = ?$
 $h = 1,02 \text{ m}$
 $t_{AB} = ?$
 $v_B = ?$



$$m \cdot \ddot{x} = F - F_{tr}$$

$$m \cdot \ddot{y} = N - mg \Rightarrow N = mg; F_{tr} = \mu \cdot N = \mu mg$$

$$\ddot{x} = \frac{F - \mu mg}{m} = \text{const} = \frac{10 - 0,1 \cdot 3 \cdot 9,81}{3} = 2,35$$

$$\ddot{x} = \frac{dx}{dt} \cdot \frac{dx}{dx} \Rightarrow \dot{x} dx = \ddot{x} dx \Rightarrow \int \dot{x} dx = \int 2,35 dx$$

$$\frac{\dot{x}^2}{2} \Big|_v^x = 2,35 \Big|_0^x \Rightarrow \frac{\dot{x}^2}{2} - \frac{v_c^2}{2} = 2,35 \cdot x \Rightarrow \frac{\dot{x}^2}{2} - \frac{v_c^2}{2} = 2,35 x$$

$$\frac{v_A^2}{2} - \frac{v_c^2}{2} = 2,35 l \Rightarrow \underline{l} = \frac{v_A^2 - v_c^2}{2 \cdot 2,35} = \frac{16 - 1}{2 \cdot 2,35} = \underline{3,19 \text{ m}}$$

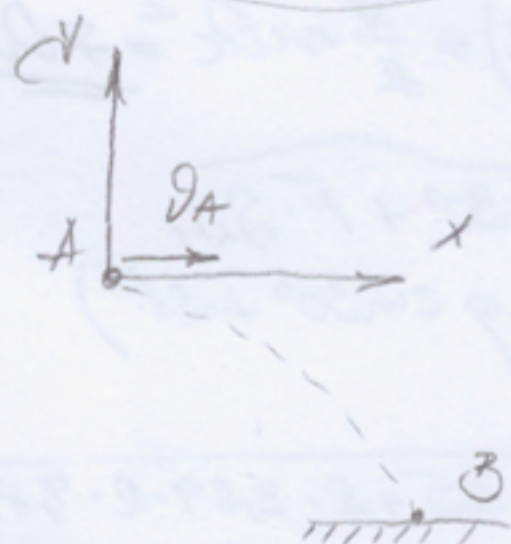
$$E_{KA} - E_{Kc} = A_{Fx}$$

$$\frac{m v_A^2}{2} - \frac{m v_c^2}{2} = F \cdot l - F_{tr} \cdot l \Rightarrow \frac{m v_A^2 - m v_c^2}{2} = l (F - F_{tr}) \Rightarrow l = \frac{m (v_A^2 - v_c^2)}{2 (F - F_{tr})}$$

$$\underline{l} = \frac{3 (16 - 1)}{2 (10 - 0,1 \cdot 3 \cdot 9,81)} = \underline{3,19 \text{ m}}$$

$$E_{KB} - E_{KA} = A_{AB}^{mg} \Rightarrow \frac{m v_B^2}{2} - \frac{m v_A^2}{2} = +mg h \Rightarrow v_B = \sqrt{v_A^2 + 2gh}$$

$$\underline{v_B} = \sqrt{16 + 2 \cdot 9,81 \cdot 1,02} = \underline{6 \text{ m/s}}$$



$$\begin{aligned}
 m \ddot{x} &= 0 & \ddot{x} &= 0 & \int v dx &= \int 0 dt \Rightarrow \dot{x} = v_A \\
 m \ddot{y} &= -mg & \ddot{y} &= -g & \int v dy &= \int -g dt \Rightarrow v_y = -g \cdot t
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_B &= v_A \\
 v_y &= -g \cdot t_B \\
 v_B &= \sqrt{\dot{x}_B^2 + v_y^2} = \sqrt{v_A^2 + g^2 t_B^2} \\
 g^2 t_B^2 &= v_B^2 - v_A^2 \Rightarrow t_B = \frac{\sqrt{v_B^2 - v_A^2}}{g}
 \end{aligned}$$

$$\underline{t_B} = \frac{\sqrt{36 - 16}}{9,81} = \underline{0,46 \text{ s}}$$

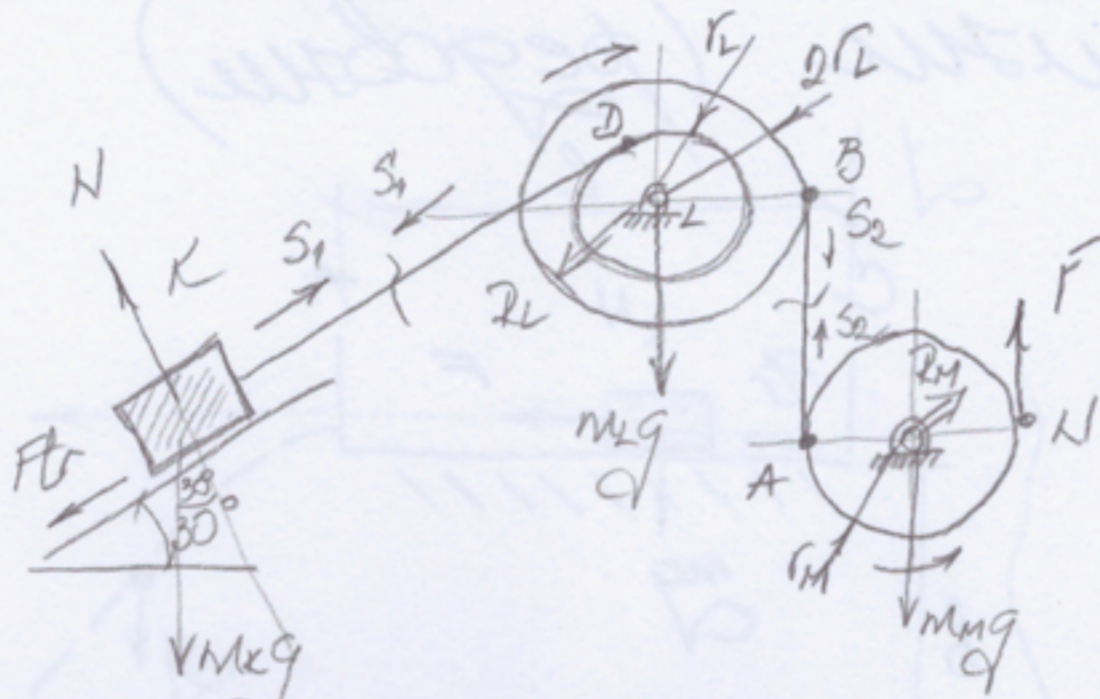
② $F = \text{const}$

$E_L = ?$

$E_K(D_K) = ?$

$S_K(D_K = 4, 10 \text{ m/s}) = ?$

$m = 2 \text{ kg}$



$m_K \cdot a_K = S_1 - m_K g \sin 30^\circ - F_{tr}$ ① $J_L \cdot \epsilon_L = S_2 \cdot 2r_L - S_1 \cdot r_L$ $J_M \cdot \epsilon_M = F \cdot r_M - S_2 \cdot r_M$

$m_K \cdot 0 = N - m_K g \cos 30^\circ$

$m_L \cdot r_L^2 \cdot \epsilon_L = 2 S_2 r_L - S_1 r_L$ ② $\frac{m_M r_M^2}{2} \cdot \epsilon_M = F r_M - S_2 r_M$ ③

$F_{tr} = \mu \cdot N = \mu m_K g \cos 30^\circ$

$v_D = v_K \left\{ \begin{array}{l} v_K = r_L \cdot \omega_L / d \\ v_D = r_L \cdot \omega_L \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} v_B = 2r_L \cdot \omega_L \\ v_B = v_A = r_M \cdot \omega_M \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} 2r_L \omega_L = r_M \omega_M / d \\ 2r_L \cdot \epsilon_L = r_M \cdot \epsilon_M \end{array} \right\} \Rightarrow \epsilon_M = \frac{2r_L}{r_M} \epsilon_L$

$a_K = r_L \cdot \frac{r_M}{2r_L} \epsilon_M \Rightarrow a_K = \frac{r_M}{2} \cdot \frac{2r_L}{r_M} \cdot \epsilon_L = r_L \epsilon_L$

① $m \cdot r_L \cdot \epsilon_L = S_1 - \frac{m g}{2} - \mu m g \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow S_1 = m r_L \epsilon_L + \frac{m g}{2} + \frac{\sqrt{3} \mu m g}{2}$

② $4m \cdot \frac{r_L}{4} \cdot \epsilon_L = 2 \cdot S_2 r_L - S_1 r_L \Rightarrow m r_L \cdot \epsilon_L = 2 S_2 - S_1$

③ $\frac{2m r_M}{2} \cdot \frac{2r_L}{r_M} \cdot \epsilon_L = 3,29 m g r_M - S_2 \cdot r_M \Rightarrow 2 r_M r_L \cdot m \epsilon_L = 3,29 m g r_M - S_2 r_M / r_M$

$2 r_L \cdot m \epsilon_L = 3,29 m g - S_2$

$S_2 = 3,29 m g - 2 r_L \epsilon_L \cdot m$

$m \cdot r_L \cdot \epsilon_L = 6,58 m g - 4 r_L \epsilon_L \cdot m$

$m r_L \epsilon_L - \frac{m g}{2} - \frac{\sqrt{3} \cdot 0,1 m g}{2}$

$m r_L \epsilon_L (1 + 4 + 1) = m g (6,58 - \frac{1}{2} - \frac{0,1 \sqrt{3}}{2})$

$\epsilon_L = \frac{9,81 \cdot (6,58 - 0,5 - 0,0866)}{6 \cdot 0,49} = \underline{205}^{-2}$

$\left. \begin{array}{l} v_K = r_L \omega_L \\ \omega_L = v_K / r_L \\ 2 r_L \omega_L = r_M \omega_M \\ \omega_M = \frac{2 r_L \omega_L}{r_M} = \frac{2 r_L}{r_M} \frac{v_K}{r_L} \end{array} \right\} \omega_M = \frac{2 v_K}{r_M}$

$E_K = E_{Kx} + E_{Kz} + E_{K\omega} = \frac{m v_K^2}{2} + \frac{J_L \omega_L^2}{2} + \frac{J_M \omega_M^2}{2}$
 $= \frac{m \cdot D_K^2}{2} + 4m \cdot \frac{r_L^2}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{D_K^2}{r_L^2} + \frac{2m r_M^2}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{4 D_K^2}{r_M^2} = m D_K^2 (\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 2) = 3 m D_K^2 = \underline{6 D_K^2}$

$E_{K1} - E_{K0} = A_{tr} + A_{rot} + A_{rot} \Rightarrow 6 D_{K1}^2 = -F_{tr} \cdot S_{K1} - m_K g \cdot S_{K1} \sin 30^\circ + F \cdot S_{N1}$
 $6 D_{K1}^2 = S_{K1} (F_{tr} \cdot m_K g \cos 30^\circ - m_K g \sin 30^\circ + 2F)$

$v_N = v_A = v_B = 2 r_L \cdot \omega_L \mid v_N = 2 v_K$
 $D_K = D_B = r_L \cdot \omega_L \mid \int \frac{d v_K}{d t} = 2 \frac{d S_K}{d t}$
 $S_N = 2 S_K$
 $S_{K1} = \frac{6 \cdot 4,1^2}{-0,1 \cdot 2 \cdot 9,81 \cdot 0,866 - 2 \cdot 9,81 \cdot 0,5 + 2 \cdot 2,86 \cdot 2 \cdot 9,81} = \underline{1 m}$