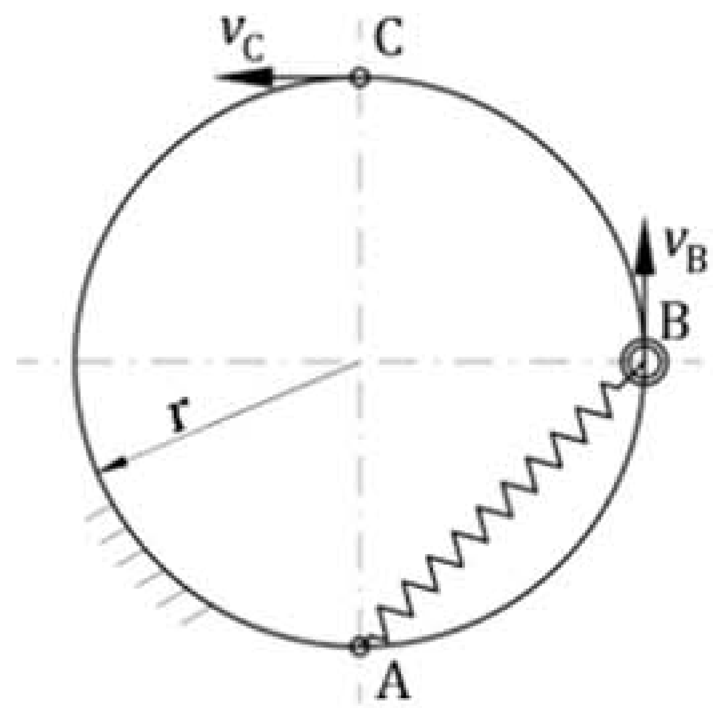
ЗАВРШНИ ИСПИТ ИЗ ДИНАМИКЕ

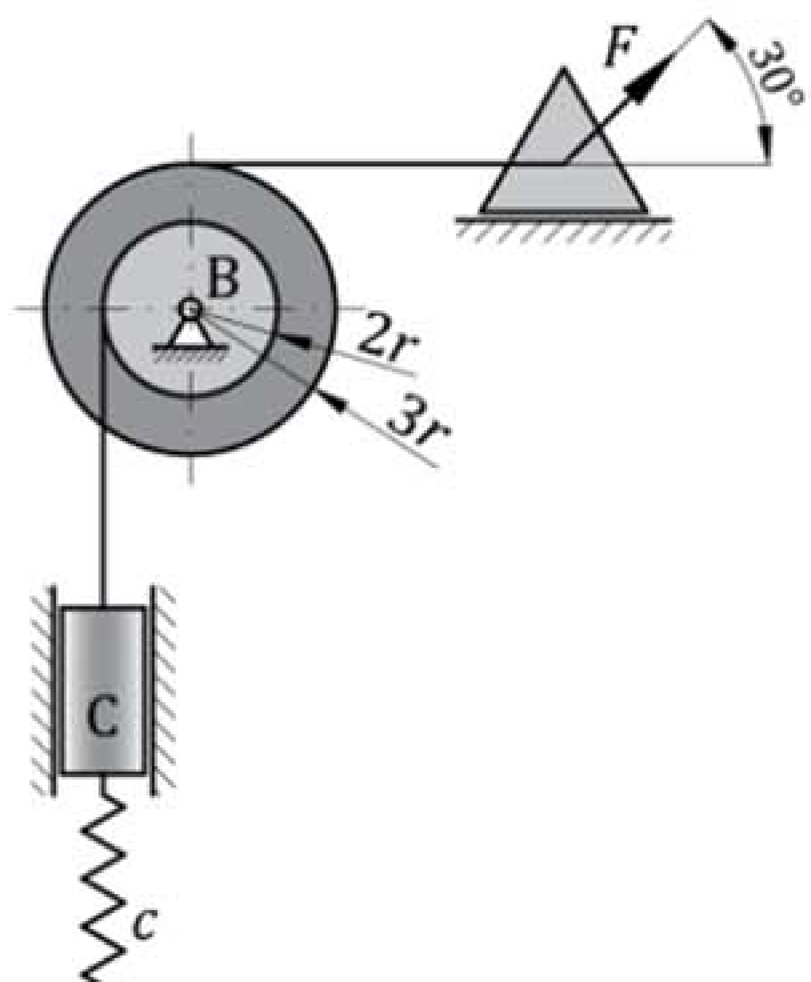
1. Прстен масе 1 kg може да се креће по глаткој непокретној вези кружног облика полупречника $r = 2$ m у вертикалној равни. Прстен је везан за опругу крутости $c = 100$ N/m. Кретање је започео из положаја B брзином од 0,5 m/s, а његова брзина у положају C износи 2 m/s.

- Користећи се законом о промјени кинетичке енергије одредити ненапрегнуту дужину опруге.
- Одредити нормалну реакцију везе у положају C.
- Одредити импулс резултанте свих сила које дјелују на прстен на дијелу од B до C.



2. Тијело троуганог облика креће се транслаторно по хоризонталној глаткој подлози под дејством силе F чији се интензитет мијења према закону $F = (50 + x)$ [N], гдје је x [m] пређени пут посматраног тијела у односу на почетни положај. Масе појединих тијела у систему су $m_\Delta = 4$ kg, $m_B = 2$ kg и $m_C = 3$ kg. Систем је кретање започео без почетне брзине и у почетном положају опруга крутости $c = 100$ N/m била је недеформисана.

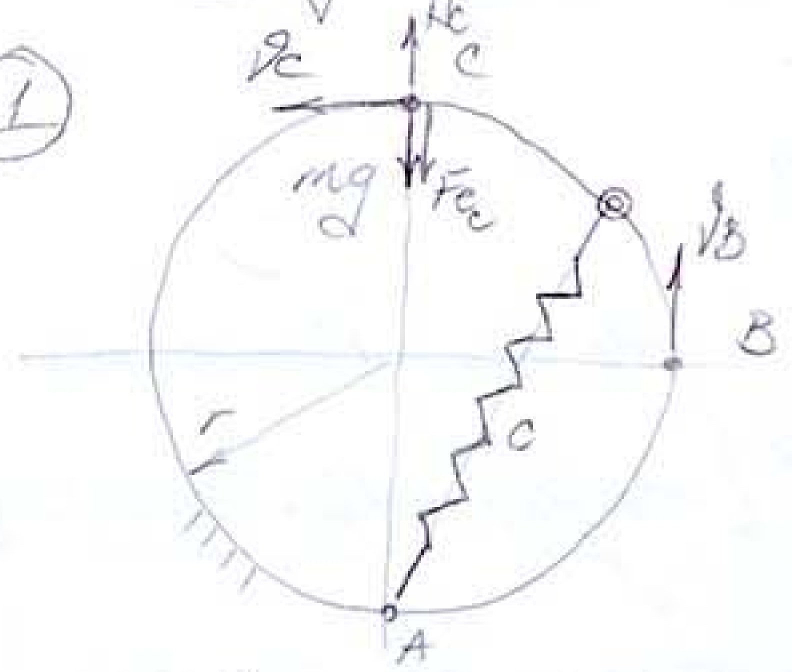
- Одредити пут који пређе троугаоно тијело прије него што се одвоји од подлоге.
- Одредити силу у ужету између њега и диска након што пређе пут од једног метра од почетка кретања.
- Примјеном закона о промјени кинетичке енергије одредити брзину троугла у тренутку у коме је деформација опруге достигла вриједност од 20 cm.



Дато је: $i_B = 2r$.

Динамика – завршни испит

1



$$E_{kC} - E_{kB} = A^{mg}_{BC} + A^{Fe}_{B-C} + \cancel{A^{N}_{B-C}}^{\,0}$$

$$\frac{m\vartheta_C^2}{2} - \frac{m\vartheta_B^2}{2} = -mg\cdot r + \frac{1}{2}\cdot c\cdot(\Delta_B^2 - \Delta_C^2)$$

$$\frac{m}{2}(\vartheta_C^2 - \vartheta_B^2) = -mgr + \frac{1}{2}\cdot c\left[(l_0 - r\sqrt{2})^2 - (2r - l_0)^2\right]$$

$$\frac{m}{2}(\vartheta_C^2 - \vartheta_B^2) = -mgr + \frac{1}{2}\cdot c\left[\cancel{l_0^2} - 2r\sqrt{2}\,l_0 + 2r^2 - 4r^2 + 4rl_0 - \cancel{l_0^2}\right]$$

$$\frac{m}{2}(\vartheta_C^2 - \vartheta_B^2 + 2gr) = \frac{c}{2}\left[rl_0(4 - 2\sqrt{2}) - 2r^2\right] \quad /\cdot 2$$

$$\frac{m}{c}(\vartheta_C^2 - \vartheta_B^2 + 2gr) + 2r^2 = 2rl_0(2 - \sqrt{2})$$

$\Delta_B = l_0 - \overline{AB} = l_0 - r\sqrt{2}$

$\Delta_C = \overline{AC} - l_0 = 2r - l_0$

$$l_0 = \frac{\frac{m}{c}(\vartheta_C^2 - \vartheta_B^2 + 2gr) + 2r^2}{2r(2 - \sqrt{2})} = \frac{\frac{1}{100}(4 - 0{,}25 + 2\cdot 9{,}81\cdot 2) + 2\cdot 4}{2\cdot 2(2 - \sqrt{2})} = 3{,}6\,m$$

$$m\vec{a}_C = \vec{F}^a_C + \vec{R}_C \Rightarrow \begin{cases} m\cdot a_{tC} = 0 \\ m\cdot a_{nC} = mg + F_{eC} - N_C \end{cases} \qquad \Delta_C = 2r - l_0$$

$$N_C = mg + F_{eC} - m\cdot a_{nC} = mg + c\cdot\Delta_C - m\cdot\frac{\vartheta_C^2}{r}$$

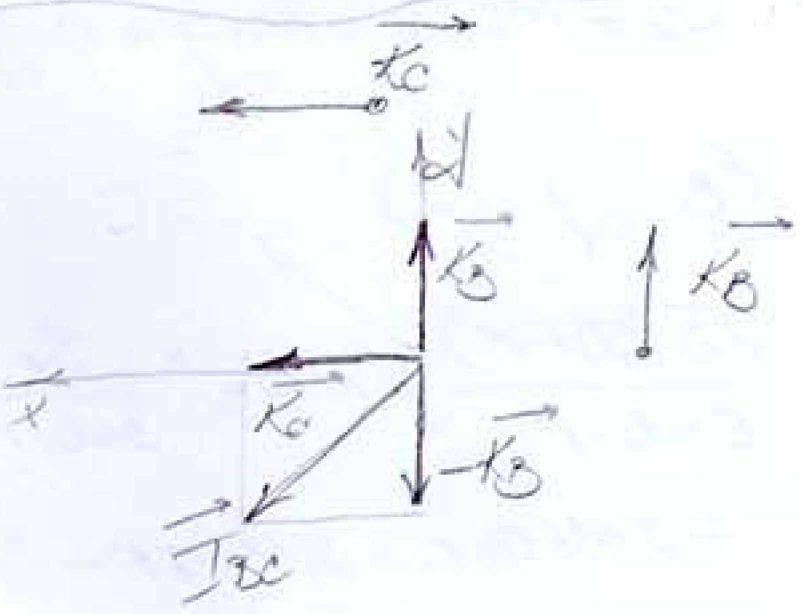
$$N_C = 1\cdot 9{,}81 + 100\cdot(2\cdot 2 - 3{,}6) - 1\cdot\frac{4}{2} = 48{,}04\,N$$

$$\vec{I}_{BC} = \vec{K}_C - \vec{K}_B = m\vec{\vartheta}_C - m\cdot\vec{\vartheta}_B$$

$$= m\cdot 2\vec{i} - m\cdot 0{,}5\vec{j}$$

$$I_{BC} = \sqrt{(2m)^2 + (0{,}5m)^2}$$

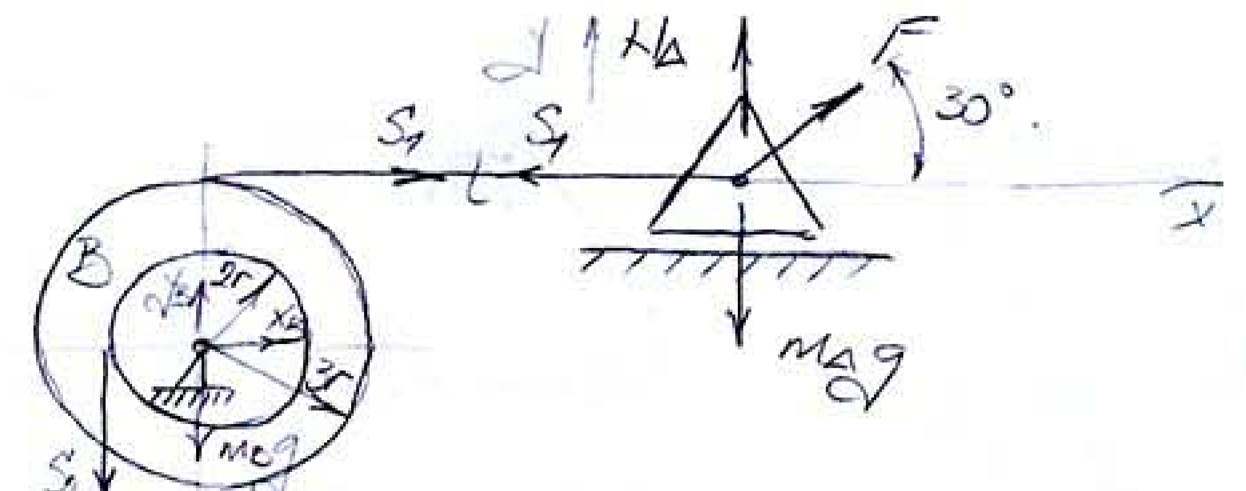
$$= \sqrt{4m^2 + 0{,}25m^2} = 2{,}06\,m = 2{,}06\,N\cdot s$$

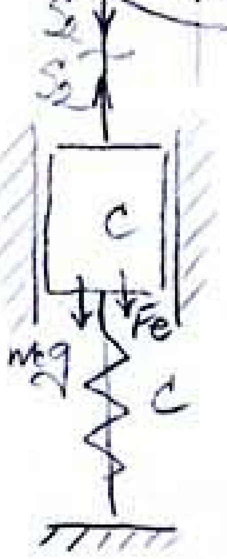


② $F=50+x$

$v_0=0$

$\Delta_0=0$





$$m_\Delta \vec a_\Delta = \vec F_a + \vec R \Rightarrow \begin{cases} m_\Delta a_{\Delta x} = F\cos 30° - S_1 \\ m_\Delta \underset{0}{a_{\Delta y}} = \underline{N_\Delta + F\sin 30° - m_\Delta g} \end{cases}$$

услов одвајања тијела од подлоге

$N_\Delta < 0 \Rightarrow m_\Delta g - F\sin 30° < 0$

$4\cdot 9{,}81 - (50+x^*)\frac{1}{2} < 0$

$4\cdot 9{,}81\cdot 2 < 50+x^*$

$x^* > 4\cdot 9{,}81\cdot 2 - 50 \Rightarrow \underline{\underline{x^* > 28{,}5\,m}}$

за $x\in[0; 28{,}5]$ тијело се неће одвојити од подлоге

$m_\Delta a_\Delta = (50+x)\frac{\sqrt3}{2} - S_1$ (1)

$m_B i_B^2 \varepsilon_B = S_1\cdot 3r - S_2\cdot 2r$ (2)

$m_C a_C = S_2 - m_C g - c\cdot\Delta_C$ (3)

(1) $\Rightarrow a_\Delta = \frac{\sqrt3}{2m_\Delta}(50+x) - \frac{S_1}{m_\Delta}$

$v_\Delta = 3r\cdot\omega_B \xrightarrow{d/dt} a_\Delta = 3r\varepsilon_B \to \varepsilon_B = \frac{a_\Delta}{3r} = \frac{\sqrt3(50+x)}{6m_\Delta r} - \frac{S_1}{3m_\Delta r}$

$v_C = 2r\cdot\omega_B = 2r\cdot\frac{v_\Delta}{3r} = \frac23 v_\Delta \xrightarrow{d/dt} a_C = \frac23 a_\Delta = \frac{\sqrt3}{3m_\Delta}(50+x) - \frac{2S_1}{3m_\Delta}$

(3) $\Rightarrow S_2 = m_C a_C + m_C g + c\cdot\frac23 x$

$$\boxed{\begin{array}{c} v_C = \frac23 v_\Delta \\ \Downarrow \\ x_C = \frac23 x_\Delta \\ \Delta_C = x_C = \frac23 x \end{array}}$$

S_2 и ε_B у (2)

$$m_B i_B^2 \frac{\sqrt3(50+x)}{6m_\Delta r} - m_B i_B^2\frac{S_1}{3m_\Delta r} = S_1\cdot 3r - 2m_C a_C r - 2m_C g r - \frac43 c r x$$

$$\frac{m_B i_B^2\sqrt3(50+x)}{6m_\Delta r} - \frac{m_B i_B^2}{3m_\Delta r}S_1 = 3S_1 r - \frac{2\sqrt3 m_C r}{3m_\Delta}(50+x) + \frac{4m_C r}{3m_\Delta}S_1 - 2m_C g r - \frac43 c r x$$

$$S_1\left[3r + \frac43\frac{m_C}{m_\Delta}r + \frac{m_B i_B^2}{3m_\Delta r}\right] = \frac{\sqrt3(50+x)}{m_\Delta}\left[\frac{m_B i_B^2}{6r} + \frac{2m_C r}{3}\right] + 2m_C g r + \frac43 c r x$$

$$\underline{\underline{S_1^*}} = \frac{\frac{\sqrt3\cdot 51}{4}\left[\frac{2\cdot4r^2}{6r}+\frac{2\cdot3r}{3}\right] + 2\cdot3\cdot9{,}81\cdot r + \frac43\cdot100\cdot1\cdot r}{3r+\frac43\cdot\frac34\cdot r + \frac{2\cdot4r^2}{3\cdot4r}} = \underline{\underline{56{,}96\,N}}$$

$$\underline{\underline{E_{KS}}} = \frac{1}{2} m_A \vartheta_A^2 + \frac{1}{2} m_B i_B^2 \omega_B^2 + \frac{1}{2} m_C \vartheta_C^2 = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \vartheta_A^2 + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 4r^2 \cdot \frac{\vartheta_A^2}{9r^2} + \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot \frac{4}{9} \vartheta_A^2 = \underline{\underline{3{,}11\,\vartheta_A^2}}$$

$$E_{KS_1} - \cancel{E_{KS_0}}^{0} = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(50x_1 + \frac{x_1^2}{2}\right) - m_C g \cdot \frac{2}{3} x_1 + \frac{1}{2} \cdot c \cdot \left(\cancel{\Delta_0^2}^{0} - \left(\frac{2}{3} x_1\right)^2\right)$$

$$E_{KS_1} = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(50 \cdot 0{,}2 + \frac{0{,}2^2}{2}\right) - 3 \cdot 9{,}81 \cdot \frac{2}{3} 0{,}2 - \frac{1}{2} \cdot 100 \cdot \left(\frac{2}{3} 0{,}2\right)^2$$

$$A^F = \int_0^{x_1} F \cos 30^\circ \, dx = \int_0^{x_1} (50 + x) \frac{\sqrt{3}}{2} \, dx = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(50x_1 + \frac{x_1^2}{2}\right)$$

$$\left.\begin{aligned} E_{KS_1} &= 3{,}86 \\ E_{KS_1} &= 3{,}11\,\vartheta_{A_1}^2 \end{aligned}\right\} \quad \underline{\underline{\vartheta_{A_1} = 1{,}11 \text{ m/s}}}$$