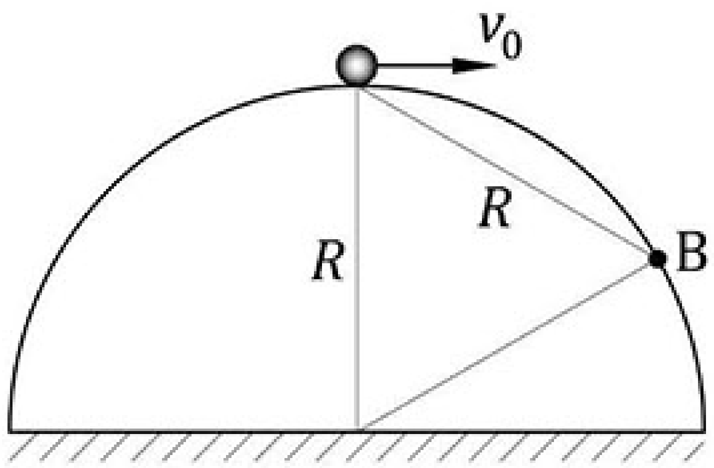
ПРВИ КОЛОКВИЈУМ ИЗ ДИНАМИКЕ

1. Куглици која се налази на највишој тачки полукугласте глатке куполе полупречника $R = 1{,}534\ \mathrm{m}$ саопштена је почетна брзина $v_0 = 3\ \mathrm{m/s}$ у хоризонталном правцу.

- Утврдити да ли ће куглица доћи у тачку B.
- Одредити једначину путање куглице након напуштања куполе.

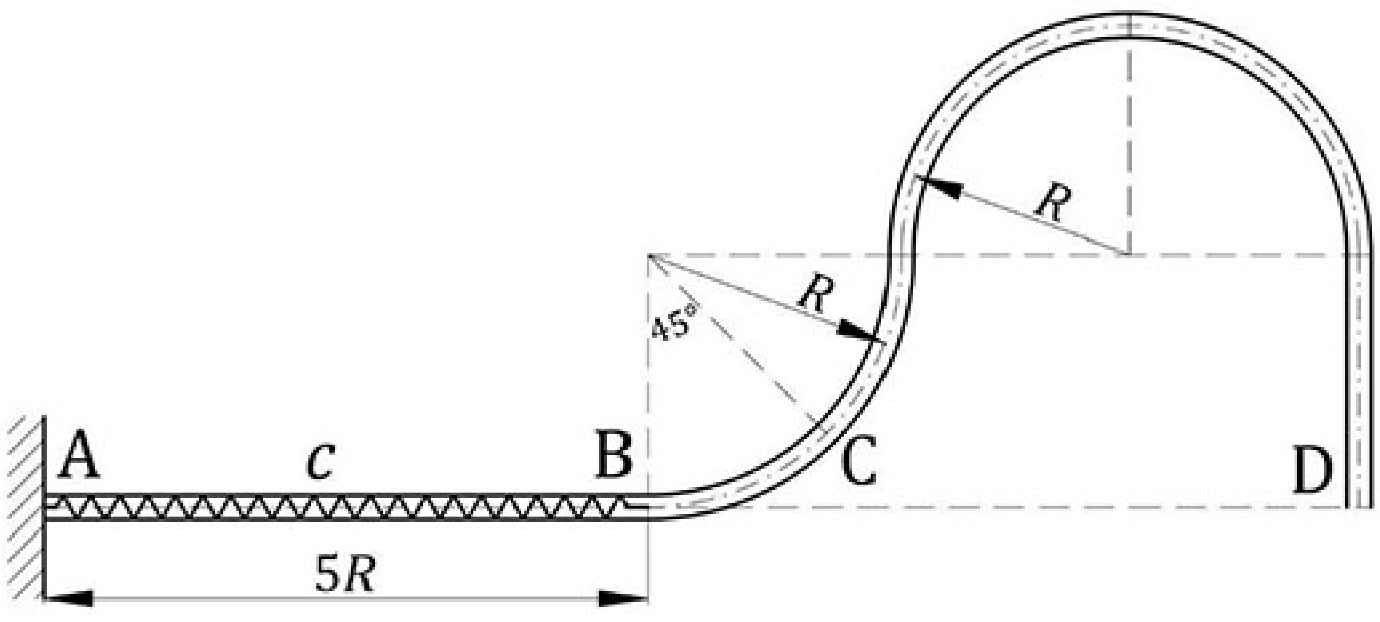
Кретање је у вертикалној равни.



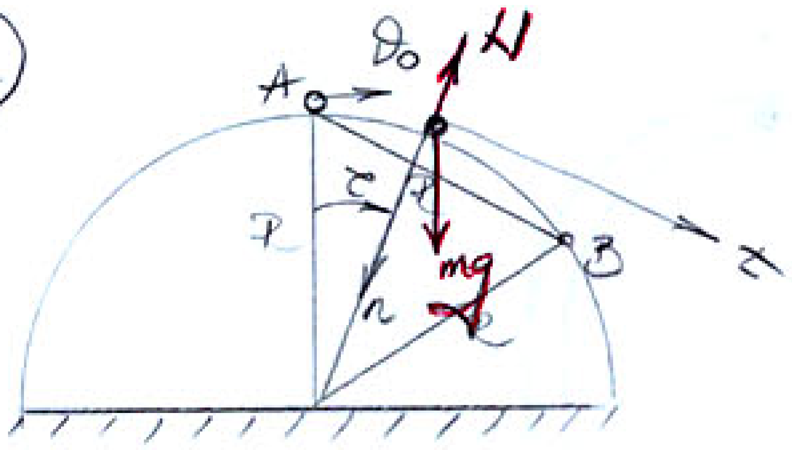
2. Куглица масе 2 kg може да се креће унутар глатке цијеви приказане на слици. Опруга крутости $c = 872\ \mathrm{N/m}$, чија је ненапрегнута дужина AB, се деформише тако да куглици саопшти кретање без почетне брзине. Ако је $R = 1\ \mathrm{m}$, одредити:

- услов који треба да задовољи скраћење опруге да би куглица доспјела у тачку D;
- правац, смјер и интензитет вектора инерцијалне силе која дјелује на куглицу у положају C за произвољно усвојено скраћење које задовољава претходни услов.

Кретање је у вертикалној равни.



1



$$m\vec{a} = \vec{F} \Rightarrow \begin{cases} ma_t = mg\sin\varphi \quad (*) \\ ma_n = mg\cos\varphi - N \end{cases}$$

У тренутку напуштања подлоге $^{(K)}$ је $N_K = 0$

$$ma_{nK} = mg\cos\varphi_K \Rightarrow \frac{\vartheta_K^2}{R} = g\cos\varphi_K \quad (\#)$$

ϑ_K се може наћи из релације (*) или из закона о промени кинетичке ен.

$$E_{KK} - E_{KA} = A_{AK}^{mg} + \overset{0}{A_{AK}^{N}}$$

$$\frac{m\vartheta_K^2}{2} - \frac{m\vartheta_0^2}{2} = +mg(R - R\cos\varphi_K) \,/\!:m\,/\cdot 2$$

$$\vartheta_K^2 = \vartheta_0^2 + 2gR(1-\cos\varphi_K) \,/\!:R$$

$$\frac{\vartheta_K^2}{R} = \frac{\vartheta_0^2}{R} + 2g(1-\cos\varphi_K) \quad (\#\#)$$

$$\left.\begin{aligned} a_t &= g\sin\varphi \\ a_t &= \frac{d\vartheta}{dt}\frac{d\varphi}{d\varphi}^{\omega} = \frac{\vartheta}{R}\frac{d\vartheta}{d\varphi} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \int_{\vartheta_0}^{\vartheta_K}\frac{\vartheta}{R}d\vartheta = g\int_0^{\varphi_K}\sin\varphi\, d\varphi$$

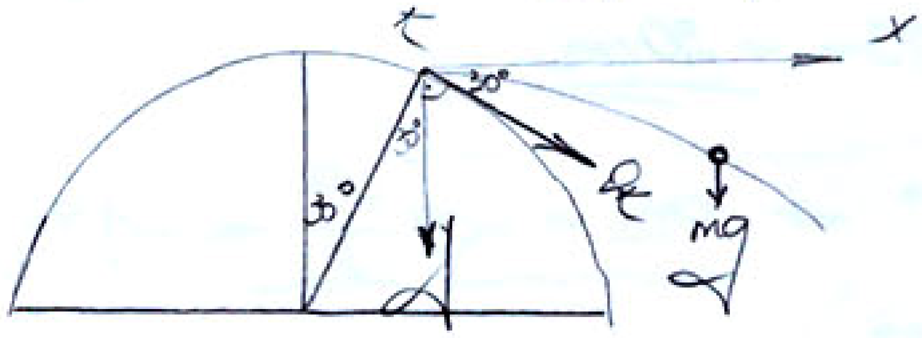
$$\frac{\vartheta_K^2}{2R} - \frac{\vartheta_0^2}{2R} = -g(\cos\varphi_K - \cos 0^\circ)$$

$$\frac{\vartheta_K^2}{R} = \frac{\vartheta_0^2}{R} + 2g(1-\cos\varphi_K)$$

Повратно убацујемо у (#)

$$\frac{\vartheta_0^2}{R} + 2g - 2g\cos\varphi_K = g\cos\varphi_K \Rightarrow \cos\varphi_K = \frac{\frac{\vartheta_0^2}{R} + 2g}{3g} = \frac{\frac{3^2}{1,534} + 2\cdot 9,81}{3\cdot 9,81} = 0,866 \Rightarrow \varphi_K = 30^\circ$$

$\varphi_K = 30^\circ < \varphi_B = 60^\circ \Rightarrow$ Кугица неће доћи у положај B.



$$m\vec{a} = \vec{F} \Rightarrow \begin{cases} ma_x = 0 \\ ma_y = mg \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} a_x &= 0 \\ a_y &= g \end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned} a_x &= 0 \\ a_x &= \frac{d\vartheta_x}{dt} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \int_{\vartheta_K\cos 30^\circ}^{\vartheta_x} d\vartheta_x = 0\int_0^t dt \Rightarrow \left.\begin{aligned} \vartheta_x &= \vartheta_K\cos 30^\circ \\ \vartheta_x &= dx/dt \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\int_0^x dx = \vartheta_K\cos 30^\circ\int_0^t dt \Rightarrow x = \vartheta_K\cos 30^\circ t \Rightarrow t = \frac{x}{\vartheta_K\cos 30^\circ}$$

$$\left.\begin{aligned} a_y &= g \\ a_y &= d\vartheta_y/dt \end{aligned}\right\} \Rightarrow \int_{\vartheta_K\sin 30^\circ}^{\vartheta_y} d\vartheta_y = g\int_0^t dt \Rightarrow \left.\begin{aligned} \vartheta_y &= \vartheta_K\sin 30^\circ + gt \\ \vartheta_y &= \frac{dy}{dt} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \int_0^y dy = \int_0^t(\vartheta_K\sin 30^\circ + gt)\,dt$$

$$y = \vartheta_K\sin 30^\circ t + g\frac{t^2}{2}$$

$$y = \vartheta_K\sin 30^\circ\frac{x}{\vartheta_K\cos 30^\circ} + \frac{g}{2}\frac{x^2}{\vartheta_K^2\cos^2 30^\circ} = 0,502x^2 + 0,577x$$

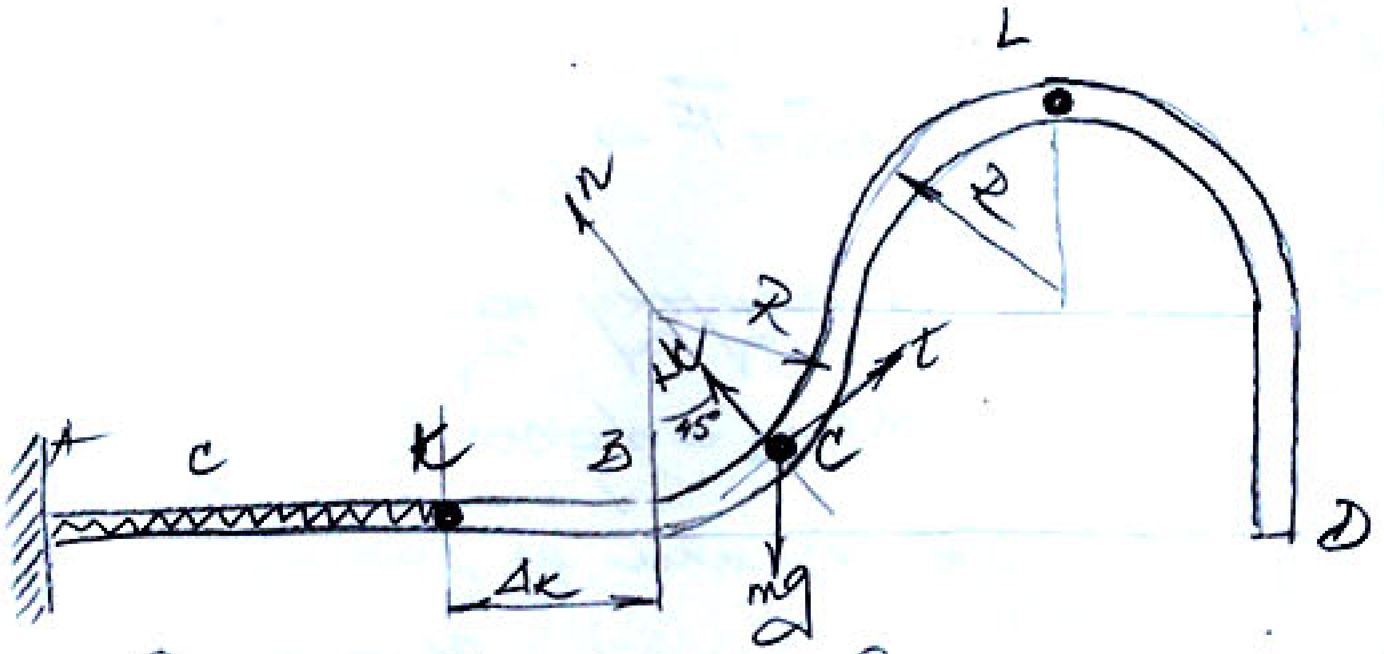
Из (##) $\Rightarrow \vartheta_K^2 = \vartheta_0^2 + 2gR(1-\cos 30^\circ) = 9 + 2\cdot 9,81\cdot 1,534\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 13,03$

(2) $m = 2kg$

$c = 872\ N/m$

$v_0 = 0$

$R = 1m$



Услов који мора бити задовољен да би куглица доспела у тачку D јесте да је брзина у тачки L већа од нуле

$$E_{KL} - \cancel{E_{KK}}^{0} = A_{KL}^{mg} + \cancel{A_{KL}^{N}}^{0} + A_{KB}^{F_c}$$

$$\frac{mv_L^2}{2} = -mg2R + \frac{1}{2}c(\Delta k^2 - \cancel{\Delta_B^2}^{0})$$

$$v_L^2 = \frac{2}{m}\left(-2mgR + \frac{1}{2}c\Delta k^2\right) > 0$$

$$\frac{1}{2}c\Delta k^2 > 2mgR$$

$$\Delta k > \sqrt{\frac{4mgR}{c}} = \sqrt{\frac{4\cdot 2\cdot 9,81\cdot 1}{872}} = 0,3m = 30cm$$

$$C:\ m\vec{a}_C = \vec{F}_C \Rightarrow \begin{cases} ma_{tC} = -mg\sin 45° \Rightarrow a_{tC} = -g\frac{\sqrt{2}}{2} = -6,94\ m/s^2 \\ ma_{nC} = N_C - mg\cos 45° \end{cases}$$

$$a_{nC} = \frac{v_C^2}{R} = 103,25\ m/s^2$$

усваја се $\Delta k = 0,5m$

$$E_{KC} - \cancel{E_{KK}}^{0} = -mg(R - R\cos 45°) + \frac{1}{2}c\Delta k^2$$

$$\frac{mv_C^2}{2} = -mgR\frac{2-\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}c\Delta k^2 \Rightarrow v_C^2 = 103,25$$

$$\vec{F}_C^{in} = -m\vec{a}_C = -2(\vec{a}_{Ct} + \vec{a}_{Cn}) = 13,88\vec{e}_t - 206,5\vec{e}_n$$

$$F_C^{in} = 206,97\ N$$