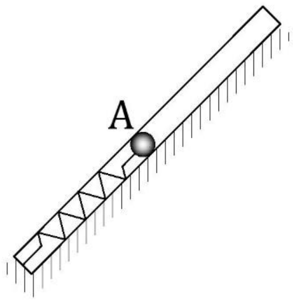
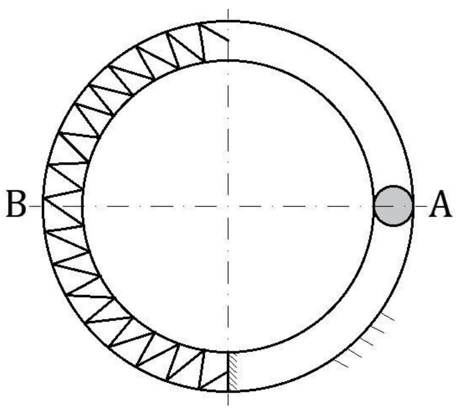
Универзитет Црне Горе
Машински факултет Подгорица 5. 12. 2023.

## ПРВИ КОЛОКВИЈУМ ИЗ ДИНАМИКЕ

**1.** Тачка масе 0,5 kg почиње кретање из положаја A (без почетне брзине) у коме дужина опруге крутости 200 N/m износи 55 cm. Коефицијент трења између тачке и цијеви износи 0,1, а ненапрегнута дужина опруге 65 cm. Нагиб цијеви је 60° у односу на вертикалу. Кретање је у вертикалној равни. Одредити положај у коме ће брзина тачке достићи вриједност од 1,557 m/s. Задатак ријешити примјеном основне једначине динамике.

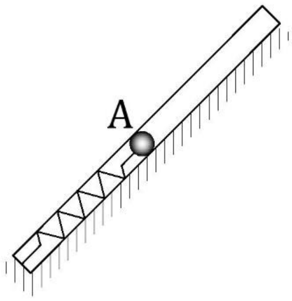


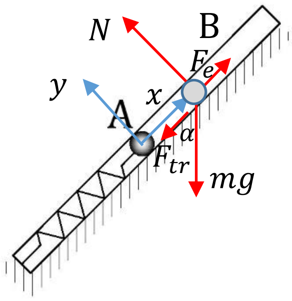

**2.** Унутар глатке цијеви савијене у облику кружнице полупречника 0,5 m може да се, у вертикалној равни, креће материјална тачка масе 3 kg. Ако јој се у положају A саопшти брзина од 3,927 m/s навише, при којој максималној крутости опруге ће куглица моћи да стигне у положај B? У положају приказаном на слици опруга је ненапрегнута. Задатак ријешити примјеном закона о промјени кинетичке енергије материјалне тачке. За произвољно усвојену крутост која задовољава претходно наведени критеријум, одредити нормалну реакцију везе у положају B и инерцијалну силу користећи се Даламберовим принципом за тачку.



## ПРВИ ЗАДАТАК

Тачка масе 0,5 kg почиње кретање из положаја A (без почетне брзине) у коме дужина опруге крутости 200 N/m износи 55 cm. Коефицијент трења између тачке и цијеви износи 0,1, а ненапрегнута дужина опруге 65 cm. Нагиб цијеви је 60° у односу на вертикалу. Кретање је у вертикалној равни. Одредити положај у коме ће брзина тачке достићи вриједност од 1,557 m/s. Задатак ријешити примјеном основне једначине динамике.




Опруга је недеформисана у положају B.

Опруга је у положају A сабијена за $65-55=10\text{ cm}=0{,}1\text{ m}$. У произвољном положају, дефинисаном координатом $x$, опруга је сабијена за $0{,}1-x$.

$$m\vec{a}=\vec{F}\Rightarrow\begin{cases}ma_x=F_e-F_{tr}-mg\cos\alpha\\ ma_y=N-mg\sin\alpha\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}ma_x=c(0{,}1-x)-\mu mg\sin\alpha-mg\cos\alpha\\ N=mg\sin\alpha\end{cases}$$

$$a_x=\frac{c}{m}(0{,}1-x)-g(\mu\sin\alpha+\cos\alpha)$$

$$\begin{cases}a_x=\dfrac{c}{m}(0{,}1-x)-g(\mu\sin\alpha+\cos\alpha)\\ a_x=\dfrac{dv_x}{dt}=\dfrac{dv_x}{dt}\dfrac{dx}{dx}=\dfrac{v_x dv_x}{dx}\end{cases}\Rightarrow v_x dv_x=\left[\frac{c}{m}(0{,}1-x)-g(\mu\sin\alpha+\cos\alpha)\right]dx$$

$$\int_0^{v_x}v_x dv_x=\int_0^x\left[\frac{c}{m}(0{,}1-x)-g(\mu\sin\alpha+\cos\alpha)\right]dx$$

$$\boxed{\boldsymbol{\frac{v_x^2}{2}=\frac{c}{m}\left(0{,}1x-\frac{x^2}{2}\right)-gx(\mu\sin\alpha+\cos\alpha)}}$$

Брзина тачке у положају B износи:

$$\frac{v_{Bx}^2}{2}=\frac{200}{0{,}5}\left(0{,}1\cdot 0{,}1-\frac{0{,}1^2}{2}\right)-9{,}81\cdot 0{,}1\left(0{,}1\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\right)\Rightarrow \boldsymbol{v_{Bx}=1{,}688\ \frac{m}{s}}$$

То значи да ће брзина од нулте вриједности порасти на 1,688. Пошто након тачке B нема силе у опрузи, тачка ће да успорава, па ће њена вриједност постепено да се смањује. То даље значи да ће куглица брзину од 1,557 m/s достићи два пута – једном прије него што се опруга врати у равнотежни положај B, а други пут након положаја B.

<u>Прво рјешење</u>

$$\frac{1{,}557^2}{2}=\frac{200}{0{,}5}\left(0{,}1x^*-\frac{x^{*2}}{2}\right)-9{,}81x^*\left(0{,}1\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\right)$$

$$200x^{*2}-34{,}245x^*+1{,}212=0\Rightarrow x^*_{1/2}=\frac{34{,}245\pm\sqrt{34{,}245^2-4\cdot200\cdot1{,}212}}{2\cdot200}\Rightarrow\begin{cases}x_1^*=0{,}05\\x_2^*=0{,}121\end{cases}$$

Физичког смисла има само оно рјешење које се налази у интервалу $x\in(0;0{,}1)$, што значи да је коначни резултат:

$$\boldsymbol{x^*}=0{,}05\ \mathrm{m}=\mathbf{5\ cm}$$

<u>Друго рјешење</u>

$$m\vec{a}=\vec{F}\Rightarrow\begin{cases}ma_x=-F_{tr}-mg\cos\alpha\\ma_y=N-mg\sin\alpha\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}ma_x=-\mu mg\sin\alpha-mg\cos\alpha\\N=mg\sin\alpha\end{cases}$$

$$a_x=-g(\mu\sin\alpha+\cos\alpha)$$

$$\begin{cases}a_x=-g(\mu\sin\alpha+\cos\alpha)\\a_x=\dfrac{dv_x}{dt}=\dfrac{dv_x}{dt}\dfrac{dx}{dx}=\dfrac{v_xdv_x}{dx}\end{cases}\Rightarrow v_xdv_x=-g(\mu\sin\alpha+\cos\alpha)dx$$

$$\int_{v_\mathrm{B}=1{,}688}^{1{,}557}v_xdv_x=-\int_{0{,}1}^{x^*}g(\mu\sin\alpha+\cos\alpha)dx$$

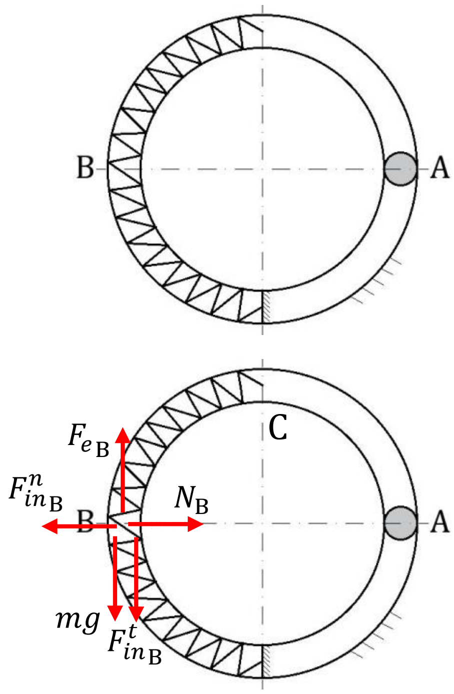
$$\frac{1{,}557^2}{2}-\frac{1{,}688^2}{2}=-g(\mu\sin\alpha+\cos\alpha)(x^*-0{,}1)$$

$$x^*=\frac{1{,}557^2-1{,}688^2}{-2g(\mu\sin\alpha+\cos\alpha)}+0{,}1$$

$$\boldsymbol{x^*}=\frac{1{,}557^2-1{,}688^2}{-2\cdot9{,}81\left(0{,}1\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\right)}+0{,}1=0{,}1369\ \mathrm{m}=\mathbf{13{,}69\ cm}$$

## ДРУГИ ЗАДАТАК

Унутар глатке цијеви савијене у облику кружнице полупречника 0,5 m може да се, у вертикалној равни, креће материјална тачка масе 3 kg. Ако јој се у положају A саопшти брзина од 3,927 m/s навише, при којој максималној крутости опруге ће куглица моћи да стигне у положај B? У положају приказаном на слици опруга је ненапрегнута. Задатак ријешити примјеном закона о промјени кинетичке енергије материјалне тачке. За произвољно усвојену крутост која задовољава претходно наведени критеријум, одредити нормалну реакцију везе у положају B и инерцијалну силу користећи се Даламберовим принципом за тачку.




<u>Крутост опруге</u>

$$E_{k_\mathrm{B}} - E_{k_\mathrm{A}} = \underbrace{A_{\mathrm{AB}}^{mg}}_{0} + \underbrace{A_{\mathrm{AB}}^{N}}_{0} + A_{\mathrm{CB}}^{F_e}$$

$$\frac{mv_\mathrm{B}^2}{2} - \frac{mv_\mathrm{A}^2}{2} = \frac{1}{2}c\left(\underbrace{\Delta_\mathrm{C}^2}_{0} - \Delta_\mathrm{B}^2\right)$$

$$v_\mathrm{B}^2 - v_\mathrm{A}^2 = -\frac{c}{m}\left(\frac{R\pi}{2}\right)^2$$

$$v_\mathrm{B}^2 = v_\mathrm{A}^2 - \frac{c}{m}\left(\frac{R\pi}{2}\right)^2 \geq 0$$

$$\boldsymbol{c} \leq \frac{4mv_\mathrm{A}^2}{R^2\pi^2} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 3{,}927^2}{0{,}5^2 \cdot 3{,}14^2} = \mathbf{75}\ \frac{\mathbf{N}}{\mathbf{m}}$$

<u>Нормална реакција везе у положају B</u>

Усваја се $c = 70{,}14\ \mathrm{N/m}$.

$$E_{k_\mathrm{B}} - E_{k_\mathrm{A}} = \underbrace{A_{\mathrm{AB}}^{mg}}_{0} + \underbrace{A_{\mathrm{AB}}^{N}}_{0} + A_{\mathrm{CB}}^{F_e}$$

$$\frac{mv_{\mathrm{B}}^2}{2}-\frac{mv_{\mathrm{A}}^2}{2}=\frac{1}{2}c\left(\underbrace{\Delta_{\mathrm{C}}^2}_{0}-\Delta_{\mathrm{B}}^2\right)$$

$$v_{\mathrm{B}}^2-v_{\mathrm{A}}^2=-\frac{c}{m}\left(\frac{R\pi}{2}\right)^2$$

$$v_{\mathrm{B}}=\sqrt{v_{\mathrm{A}}^2-\frac{c}{m}\left(\frac{R\pi}{2}\right)^2}=\sqrt{3{,}927^2-\frac{70{,}14}{3}\left(\frac{0{,}5\cdot\pi}{2}\right)^2}=1\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

$$"\vec{\mathrm{F}}_{\mathrm{rB}}=\vec{0}"\Rightarrow "F_{r\mathrm{B}_n}=0"\Rightarrow N_{\mathrm{B}}-F_{in\mathrm{B}}^{n}=0$$

$$\boldsymbol{N_{\mathrm{B}}}=\boldsymbol{F_{in\mathrm{B}}^{n}}=ma_{n\mathrm{B}}=m\frac{v_{\mathrm{B}}^2}{R}=3\,\frac{1^2}{0{,}5}=\mathbf{6\ N}$$

Инерцијална сила у положају B

$$F_{e\mathrm{B}}=c\Delta_{\mathrm{B}}=\frac{cR\pi}{2}$$

$$"\vec{\mathrm{F}}_{\mathrm{rB}}=\vec{0}"\Rightarrow "F_{r\mathrm{B}_t}=0"\Rightarrow mg+F_{in\mathrm{B}}^{t}-F_{e\mathrm{B}}=0\Rightarrow F_{in\mathrm{B}}^{t}=F_{e\mathrm{B}}-mg$$

$$\boldsymbol{F_{in\mathrm{B}}^{t}}=\frac{cR\pi}{2}-mg=\frac{70{,}14\cdot0{,}5\cdot3{,}14}{2}-3\cdot9{,}81=\mathbf{25{,}658\ N}$$

$$\boldsymbol{F_{in\mathrm{B}}}=\sqrt{{F_{in\mathrm{B}}^{t}}^2+{F_{in\mathrm{B}}^{n}}^2}=\sqrt{25{,}658^2+6^2}=\mathbf{26{,}35\ N}$$