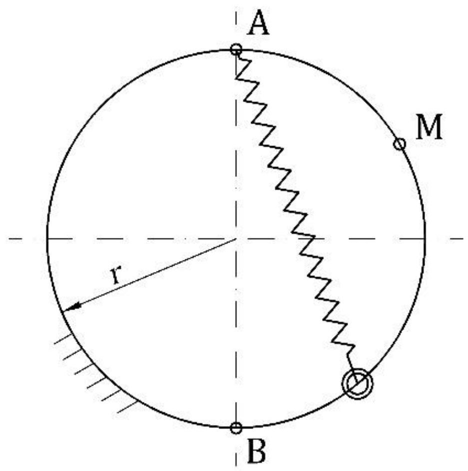
Универзитет Црне Горе
Машински факултет Подгорица 18. 1. 2024.

ПРВИ КОЛОКВИЈУМ ИЗ ДИНАМИКЕ

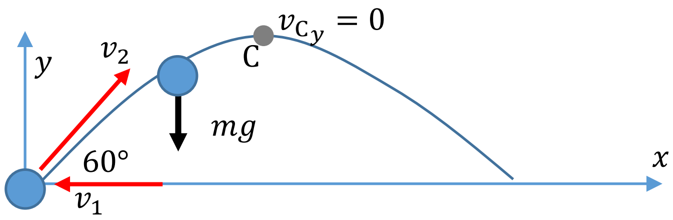
1. Лоптица масе 400 g удари брзином $v_1 = 35\ \mathrm{m/s}$ хоризонтално о палицу и одбије се увис под углом од 60° према хоризонтали тако да досегне висину од 50 m мјерено од висине палице. Одредити величину импулса ударне силе између лоптице и палице.

2. Терет масе 5 kg, који је објешен помоћу опруге о највишу тачку A кружног прстена који се налази у вертикалној равни, пада клизећи по прстену без трења. Полупречник прстена је $r = 20$ cm. У почетном положају терета M, праволинијско растојање AM износи 20 cm и опруга је тада ненапрегнута. Брзина терета у почетном положају је једнака нули. Одредити крутост опруге да би реакција везе у најнижој тачки прстена B била једнака нули. Тежину опруге занемарити. Задатак урадити примјеном закона о промјени кинетичке енергије, а затим провјерити резултат примјеном основне једначине динамике.



ПРВИ ЗАДАТАК

Лоптица масе 400 g удари брзином $v_1 = 35\ \mathrm{m/s}$ хоризонтално о палицу и одбије се увис под углом од 60° према хоризонтали тако да досегне висину од 50 m мјерено од висине палице. Одредити величину импулса ударне силе између лоптице и палице.



$$\vec{K}_2 - \vec{K}_1 = \vec{I}_{12} \Rightarrow \begin{cases} K_{2_x} - K_{1_x} = I_{12_x} \\ K_{2_y} - K_{1_y} = I_{12_y} \end{cases}$$

Након удара

$$m\vec{a} = \vec{F} \Rightarrow \begin{cases} ma_x = 0 \\ ma_y = -mg \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = -g \end{cases}$$

Из поставке задатка знамо да је $y_C = 50\ \mathrm{m}$ и знамо да је $v_{C_y} = 0$.

$$\left.\begin{aligned} &a_y = -g \\ &a_y = \frac{dv_y}{\boxed{dt}}\frac{\boxed{dy}}{dy} = \frac{v_y dv_y}{dy} \end{aligned}\right\} \Rightarrow v_y dv_y = -g dy \Rightarrow \int_{v_2 \sin 60°}^{0} v_y dv_y = -g\int_0^{50} dy$$

$$-\frac{(v_2 \sin 60°)^2}{2} = -50g$$

$$v_2^2 \frac{3}{4} = 100g$$

$$\boxed{v_2 = \sqrt{\frac{400}{3}g} = 20\sqrt{\frac{g}{3}}}$$

$$\vec{K}_1 = m\vec{v}_1 = 0{,}4(-35\vec{\imath}) = -14\vec{\imath} \Rightarrow \begin{cases} K_{1_x} = -14 \\ K_{1_y} = 0 \end{cases}$$

$$\vec{K}_2 = m\vec{v}_2 = 0{,}4(v_2 \cos 60°\,\vec{\imath} + v_2 \sin 60°\,\vec{\jmath}) = 0{,}4\left(20\sqrt{\frac{g}{3}}\frac{1}{2}\vec{\imath} + 20\sqrt{\frac{g}{3}}\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{\jmath}\right)$$

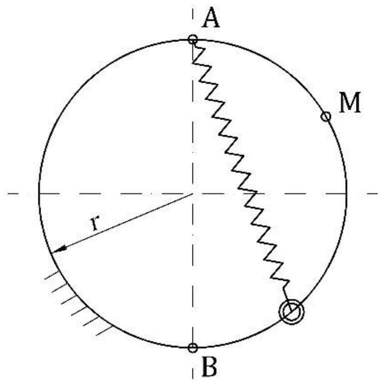
$$\vec{K}_2 = \frac{4\sqrt{3}}{3}\sqrt{g}\vec{\imath} + 4\sqrt{g}\vec{\jmath} = \sqrt{g}\left(\frac{4\sqrt{3}}{3}\vec{\imath} + 4\vec{\jmath}\right) \Rightarrow \begin{cases} K_{2_x} = \dfrac{4\sqrt{3}}{3}\sqrt{g} \\ K_{2_y} = 4\sqrt{g} \end{cases}$$

$$\left.\begin{aligned} &I_{12_x} = K_{2_x} - K_{1_x} = \frac{4\sqrt{3}}{3}\sqrt{g} + 14 \\ &I_{12_y} = K_{2_y} - K_{1_y} = 4\sqrt{g} \end{aligned}\right\} \Rightarrow I_{12} = \sqrt{{I_{12}}_x^2 + {I_{12}}_y^2}$$

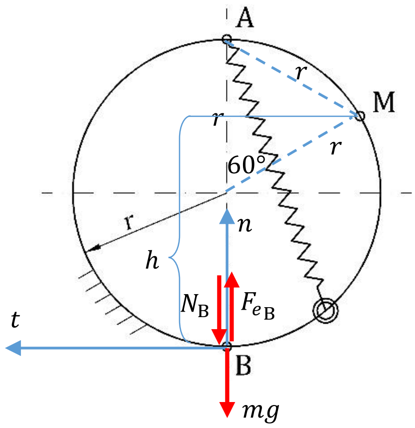
$$\boldsymbol{I_{12}} = \sqrt{{I_{12}}_x^2 + {I_{12}}_y^2} = \sqrt{\left(\frac{4\sqrt{3}}{3}\sqrt{g} + 14\right)^2 + \left(4\sqrt{g}\right)^2} = \mathbf{24,65\ Ns}$$

ДРУГИ ЗАДАТАК

Терет масе 5 kg, који је објешен помоћу опруге о највишу тачку A кружног прстена који се налази у вертикалној равни, пада клизећи по прстену без трења. Полупречник прстена је $r = 20$ cm. У почетном положају терета M, праволинијско растојање AM износи 20 cm и опруга је тада ненапрегнута. Брзина терета у почетном положају је једнака нули. Одредити крутост опруге да би реакција везе у најнижој тачки прстена B била једнака нули. Тежину опруге занемарити. Задатак урадити примјеном закона о промјени кинетичке енергије, а затим провјерити резултат примјеном основне једначине динамике.



<u>Први дио</u>



$$h = r + r\cos 60° = 1{,}5r$$

$$\Delta_M = 0, \qquad \Delta_B = \overline{AB} - \overline{AM} = 2r - r = r$$

$$E_{k_B} - \underbrace{E_{k_M}}_{0} = A_{AB}^{mg} + A_{AB}^{F_e} + \underbrace{A_{AB}^{N}}_{0}$$

$$\frac{mv_B^2}{2} = mgh + \frac{1}{2}c(\Delta_M^2 - \Delta_B^2)$$

$$\frac{mv_B^2}{2} = 1{,}5mgr - \frac{1}{2}cr^2$$

$$\boxed{v_B^2 = 3gr - \frac{cr^2}{m}}$$

$$m\vec{a}_{\mathrm{B}} = \vec{F}_{\mathrm{B}} \Rightarrow \begin{cases} ma_{t_{\mathrm{B}}} = 0 \\ ma_{n_{\mathrm{B}}} = F_{e_{\mathrm{B}}} - \underbrace{N_{\mathrm{B}}}_{0} - mg \end{cases}$$

$$m\frac{v_{\mathrm{B}}^2}{r} = c\Delta_{\mathrm{B}} - mg$$

$$m\frac{3gr - \dfrac{cr^2}{m}}{r} = cr - mg$$

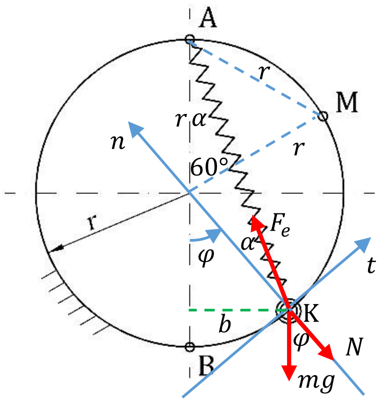
$$3mg - cr = cr - mg$$

$$4mg = 2cr$$

$$\boldsymbol{c} = \frac{2mg}{r} = \frac{2\cdot 5\cdot 9{,}81}{0{,}2} = \mathbf{490{,}5\,\frac{N}{m}}$$

<u>Други дио</u>

<u>Први начин</u>



$$\left.\begin{aligned} b &= r\sin\varphi \\ b &= l\sin\alpha \end{aligned}\right\} \Rightarrow r\sin\varphi = l\sin\alpha$$

$$l = \overline{\mathrm{AK}} = \sqrt{b^2 + (r + r\cos\varphi)^2} = \sqrt{(r\sin\varphi)^2 + (r + r\cos\varphi)^2} = r\sqrt{\sin^2\varphi + (1+\cos\varphi)^2}$$

$$l = r\sqrt{\sin^2\varphi + 1 + 2\cos\varphi + \cos^2\varphi} = r\sqrt{2 + 2\cos\varphi} = r\sqrt{2(1+\cos\varphi)}$$

$$\Delta = l - l_0 = r\sqrt{2(1+\cos\varphi)} - r = r\left(\sqrt{2(1+\cos\varphi)} - 1\right)$$

$$r\sin\varphi = l\sin\alpha \Rightarrow \sin\alpha = \frac{r\sin\varphi}{l} = \frac{r\sin\varphi}{r\sqrt{2(1+\cos\varphi)}} = \frac{\sin\varphi}{\sqrt{2(1+\cos\varphi)}}$$

$$m\vec{a} = \vec{F} \Rightarrow \begin{cases} ma_t = F_e\sin\alpha - mg\sin\varphi \\ ma_n = F_e\cos\alpha - mg\cos\varphi - N \end{cases}$$

$$m\frac{dv}{dt}\frac{d\varphi}{d\varphi} = c\Delta\sin\alpha - mg\sin\varphi$$

$$\frac{vdv}{r} = \left(\frac{c\Delta}{m}\sin\alpha - g\sin\varphi\right)d\varphi$$

$$\frac{vdv}{r} = \left(\frac{cr\left(\sqrt{2(1+\cos\varphi)}-1\right)}{m}\frac{\sin\varphi}{\sqrt{2(1+\cos\varphi)}} - g\sin\varphi\right)d\varphi$$

$$\frac{vdv}{r} = \left(\frac{cr\sqrt{2(1+\cos\varphi)}}{m}\frac{\sin\varphi}{\sqrt{2(1+\cos\varphi)}} - \frac{cr}{m}\frac{\sin\varphi}{\sqrt{2(1+\cos\varphi)}} - g\sin\varphi\right)d\varphi$$

$$\int_0^{v_\mathrm{B}}\frac{vdv}{r} = \int_{120°}^{0}\left(\left(\frac{cr}{m}-g\right)\sin\varphi - \frac{cr}{m}\frac{\sin\varphi}{\sqrt{2(1+\cos\varphi)}}\right)d\varphi$$

$$\frac{v_\mathrm{B}^2}{2r} = -\left(\frac{cr}{m}-g\right)(\cos 0° - \cos 120°) + \frac{cr}{m}\left(\sqrt{2(1+\cos 0°)} - \sqrt{2(1+\cos 120°)}\right)$$

$$\frac{v_\mathrm{B}^2}{r} = -2\left(\frac{cr}{m}-g\right)\frac{3}{2} + 2\frac{cr}{m}(2-1)$$

$$\boxed{\frac{v_\mathrm{B}^2}{r} = 3g - \frac{cr}{m}}$$

$$\frac{\sin\varphi}{\sqrt{2(1+\cos\varphi)}}$$

$$2(1+\cos\varphi) = k^2$$

$$-2\sin\varphi\, d\varphi = 2kdk$$

$$\sin\varphi\, d\varphi = -kdk$$

$$\int\frac{\sin\varphi}{\sqrt{2(1+\cos\varphi)}}d\varphi = \int\frac{-k}{k}dk = -k = -\sqrt{2(1+\cos\varphi)}$$

$$ma_n = F_e\cos\alpha - mg\cos\varphi - N$$

$$m\frac{v^2}{r} = c\Delta\cos\alpha - mg\cos\varphi - N$$

$$m\frac{v_\mathrm{B}^2}{r} = c\Delta_\mathrm{B}\cos\alpha_\mathrm{B} - mg\cos\varphi_\mathrm{B} - \underbrace{N_\mathrm{B}}_{0}$$

$$\frac{v_\mathrm{B}^2}{r} = \frac{cr\left(\sqrt{2(1+\cos\varphi_\mathrm{B})}-1\right)\cos\alpha_\mathrm{B}}{m} - g\cos\varphi_\mathrm{B}$$

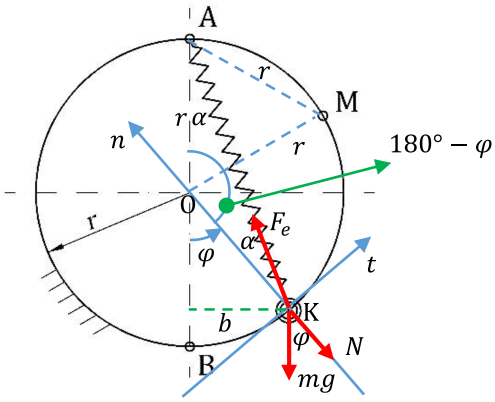
$$3g - \frac{cr}{m} = \frac{cr\left(\sqrt{2(1+\cos\varphi_\mathrm{B})}-1\right)\cos\alpha_\mathrm{B}}{m} - g\cos\varphi_\mathrm{B}$$

$$3g - \frac{cr}{m} = \frac{cr}{m} - g$$

$$4g = 2\frac{cr}{m}$$

$$\boldsymbol{c = \frac{2mg}{r}}$$

Други начин



Из троугла OKA слиједи:

$$\alpha + \alpha + (180° - \varphi) = 180°$$

$$2\alpha = \varphi$$

$$\alpha = \frac{\varphi}{2}$$