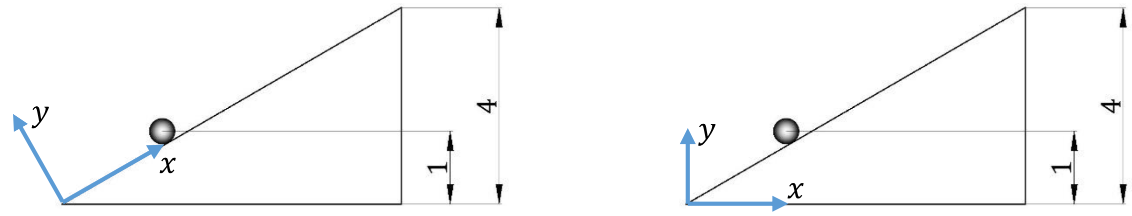
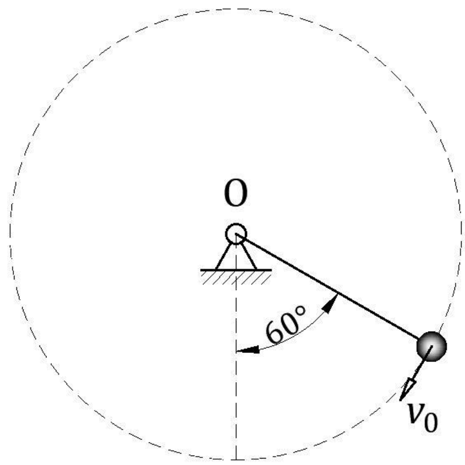
ПРВИ КОЛОКВИЈУМ ИЗ ДИНАМИКЕ

1. Материјалној тачки масе $m = 0{,}5\,\mathrm{kg}$ саопштава се почетна брзина интензитета $4\ \mathrm{m/s}$ уз храпави клин нагиба 30° у односу на хоризонталу из положаја приказаног на слици. Коефицијент трења је 0,2. Одредити вријеме потребно да тачка, у односу на клин, пређе пут од:

- 3 m ако је координатни систем усвојен као на првој слици;
- 1 m ако је координатни систем усвојен као на другој слици;
- 1 m, за произвољно усвојен координатни систем, ако се клин креће улијево брзином која се мијења према закону $2t + 2$ [m/s].



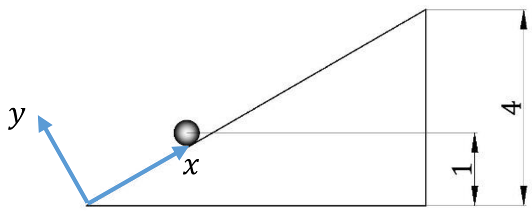
2. Тачка масе m објешена је за непомичну тачку O помоћу неистегљивог канапа дужине l. У почетном тренутку канап је затегнут под углом од 60°, а тачки је саопштена брзина $v_0 = \sqrt{5gl/2}$. Одредити мјесто на коме ће тачка напустити кружну путању, а потом мјесто на коме ће канап поново бити затегнут.

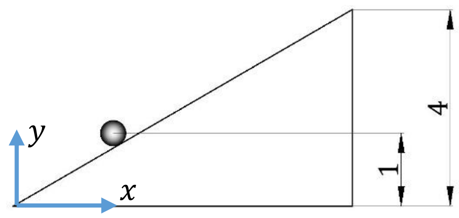


ПРВИ ЗАДАТАК

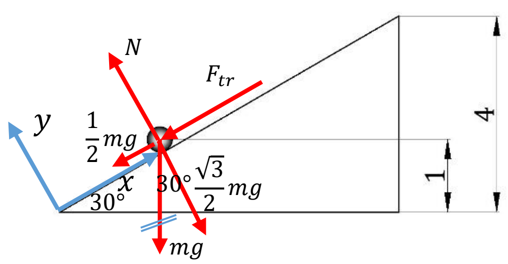
Материјалној тачки масе $m = 0{,}5$ kg саопштава се почетна брзина интензитета 4 m/s уз храпави клин нагиба 30° у односу на хоризонталу из положаја приказаног на слици. Коефицијент трења је 0,2. Одредити вријеме потребно да тачка, у односу на клин, пређе пут од:

- 3 m ако је координатни систем усвојен као на првој слици;
- 1 m ако је координатни систем усвојен као на другој слици;
- 1 m, за произвољно усвојен координатни систем, ако се клин креће улијево брзином која се мијења према закону $2t + 2$ [m/s].





<u>Први дио</u>



$$x_0 \sin 30° = 1 \Rightarrow x_0 = 2$$

$$m\vec{a} = \vec{F} \Rightarrow \begin{cases} ma_x = -\frac{1}{2}mg - F_{tr} \\ m\underbrace{a_y}_{0} = N - \frac{\sqrt{3}}{2}mg \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ma_x = -\frac{1}{2}mg - \mu\frac{\sqrt{3}}{2}mg \\ N = \frac{\sqrt{3}}{2}mg \end{cases}$$

$$a_x = -\frac{1}{2}g - \mu\frac{\sqrt{3}}{2}g = -\frac{1}{2}g\left(1 + \mu\sqrt{3}\right)$$

$$\begin{cases} a_x = -\frac{1}{2}g\left(1+\mu\sqrt{3}\right) \\ a_x = \frac{dv_x}{dt} \end{cases} \Rightarrow dv_x = -\frac{1}{2}g\left(1+\mu\sqrt{3}\right)dt \Rightarrow \int_4^{v_x} dv_x = -\frac{1}{2}g\left(1+\mu\sqrt{3}\right)\int_0^t dt$$

$$\begin{cases} v_x = 4 - \frac{1}{2}g\left(1+\mu\sqrt{3}\right)t \\ v_x = \frac{dx}{dt} \end{cases} \Rightarrow dx = \left(4 - \frac{1}{2}g\left(1+\mu\sqrt{3}\right)t\right)dt \Rightarrow \int_2^{x} dx = \int_0^t \left(4 - \frac{1}{2}g\left(1+\mu\sqrt{3}\right)t\right)dt$$

$$x = 2 + 4t - \frac{1}{4}g\left(1+\mu\sqrt{3}\right)t^2$$

Ако претпоставимо да се тачка све вријеме креће само у једном смјеру и да прелази пут од 3 m, онда је x координата у датом положају једнака $x^* = x_0 + 3 = 5$.

$$x^* = 2 + 4t^* - \frac{1}{4}g\left(1 + \mu\sqrt{3}\right)t^{*2}$$

$$\frac{1}{4}g\left(1 + \mu\sqrt{3}\right)t^{*2} - 4t^* + 3 = 0$$

$$t_{1/2}^* = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot \frac{1}{4}g\left(1 + \mu\sqrt{3}\right) \cdot 3}}{2 \cdot \frac{1}{4}g\left(1 + \mu\sqrt{3}\right)} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 9{,}81\left(1 + 0{,}2\sqrt{3}\right) \cdot 3}}{\frac{1}{2}9{,}81\left(1 + 0{,}2\sqrt{3}\right)} = \frac{4 \pm \sqrt{-23{,}62}}{\frac{1}{2}9{,}81\left(1 + 0{,}2\sqrt{3}\right)}$$

Уочава се да оба рјешења излазе из скупа реалних бројева, што значи да немају физичког смисла. То даље значи да је погрешна претпоставка према којој се тачка све вријеме креће у једном смјеру. Стога прво треба израчунати вријеме и пређени пут до заустављања, а затим узети у обзир промјену смјера кретања.

$$\begin{cases} v_x = 4 - \frac{1}{2}g\left(1 + \mu\sqrt{3}\right)t \\ v_x^\# = 0 \end{cases} \Rightarrow 4 = \frac{1}{2}g\left(1 + \mu\sqrt{3}\right)t^\# \Rightarrow t^\# = \frac{8}{g\left(1 + \mu\sqrt{3}\right)} = 0{,}606\ \mathrm{s}$$

$$x^\# = 2 + 4t^\# - \frac{1}{4}g\left(1 + \mu\sqrt{3}\right)t^{\#^2} = 2 + 4 \cdot 0{,}606\ - \frac{1}{4}g\left(1 + \mu\sqrt{3}\right)0{,}606^2 = 3{,}211\ \mathrm{m}$$

Дакле, у једном смјеру тачка прелази пут од $3{,}211 - 2 = 1{,}211$ m. У другом смјеру прелази преосталих $3 - 1{,}211 = 1{,}789$ m. За другу дионицу кретања почетна x координата износи $3{,}211$ m, а крајња $3{,}211 - 1{,}789 = 1{,}422$ m. У другој дионици кретања у односу на прву долази до промјене смјера силе трења, па диференцијална једначина кретања има облик:

$$\begin{cases} a_x = -\frac{1}{2}g\left(1 - \mu\sqrt{3}\right) \\ a_x = \frac{dv_x}{dt} \end{cases} \Rightarrow dv_x = -\frac{1}{2}g\left(1 - \mu\sqrt{3}\right)dt \Rightarrow \int_0^{v_x} dv_x = -\frac{1}{2}g\left(1 - \mu\sqrt{3}\right)\int_0^t dt$$

$$\begin{cases} v_x = -\frac{1}{2}g\left(1 - \mu\sqrt{3}\right)t \\ v_x = \frac{dx}{dt} \end{cases} \Rightarrow dx = -\frac{1}{2}g\left(1 - \mu\sqrt{3}\right)tdt \Rightarrow \int_{3{,}211}^{1{,}422} dx = -\frac{1}{2}g\left(1 - \mu\sqrt{3}\right)\int_0^{t_2} tdt$$

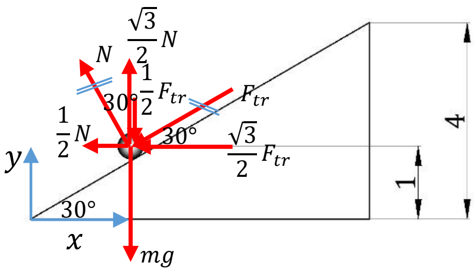
$$1{,}422 - 3{,}211 = -\frac{1}{4}g\left(1 - \mu\sqrt{3}\right)t_2^2$$

$$t_2 = \sqrt{\frac{4(1{,}422 - 3{,}211)}{-g\left(1 - \mu\sqrt{3}\right)}} = \sqrt{\frac{4(1{,}422 - 3{,}211)}{-9{,}81\left(1 - 0{,}2\sqrt{3}\right)}} = 1{,}056\ \mathrm{s}$$

Дакле, укупно вријеме износи:

$$t^\# + t_2 = 0{,}606 + 1{,}056 = \mathbf{1{,}662\ s}$$

<u>Други дио</u>



$$v_{0_x} = 4\cos 30° = 2\sqrt{3}, \qquad v_{0_y} = 4\sin 30° = 2, \qquad y_0 = 1, \qquad \operatorname{tg} 30° = \frac{y}{x} = \frac{y_0}{x_0} \Rightarrow x_0 = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{3}}} = \sqrt{3}$$

Малочас смо установили да до заустављања тачка прелази пут од 1,211 m, што значи да у овој варијанти задатка неће бити промјене смјера кретања, па је у траженом тренутку:

$$x^* = \sqrt{3} + 1 \cdot \cos 30° = \sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} = 1{,}5\sqrt{3}, \qquad y^* = 1 + 1 \cdot \sin 30° = 1{,}5$$

$$m\vec{a} = \vec{F} \Rightarrow \begin{cases} ma_x = -\frac{1}{2}N - \frac{\sqrt{3}}{2}F_{tr} \\ ma_y = -mg - \frac{1}{2}F_{tr} + \frac{\sqrt{3}}{2}N \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ma_x = -\frac{1}{2}N - \frac{\sqrt{3}}{2}\mu N \\ ma_y = -mg - \frac{1}{2}\mu N + \frac{\sqrt{3}}{2}N \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_x = -\frac{1}{2}\frac{N}{m}\left(1 + \sqrt{3}\mu\right) \\ a_y = -g + \frac{1}{2}\frac{N}{m}\left(\sqrt{3} - \mu\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_x = -\frac{1}{2}\frac{N}{m}\left(1 + \sqrt{3}\mu\right) \\ a_x = \frac{dv_x}{dt} \end{cases} \Rightarrow dv_x = -\frac{1}{2}\frac{N}{m}\left(1 + \sqrt{3}\mu\right)dt \Rightarrow \int_{2\sqrt{3}}^{v_x} dv_x = -\frac{1}{2}\frac{N}{m}\left(1 + \sqrt{3}\mu\right)\int_0^t dt$$

$$\begin{cases} v_x = 2\sqrt{3} - \frac{1}{2}\frac{N}{m}\left(1 + \sqrt{3}\mu\right)t \\ v_x = \frac{dx}{dt} \end{cases} \Rightarrow \int_{\sqrt{3}}^{1{,}5\sqrt{3}} dx = \int_0^{t^*} \left(2\sqrt{3} - \frac{1}{2}\frac{N}{m}\left(1 + \sqrt{3}\mu\right)t\right)dt$$

$$\boxed{1{,}5\sqrt{3} - \sqrt{3} = 2\sqrt{3}t^* - \frac{1}{4}\frac{N}{m}\left(1 + \sqrt{3}\mu\right){t^*}^2}$$

$$\begin{cases} a_y = -g + \frac{1}{2}\frac{N}{m}\left(\sqrt{3} - \mu\right) \\ a_y = \frac{dv_y}{dt} \end{cases} \Rightarrow \int_2^{v_y} dv_y = \int_0^t \left(-g + \frac{1}{2}\frac{N}{m}\left(\sqrt{3} - \mu\right)\right)dt$$

$$\begin{cases} v_y = 2 + \left(-g + \frac{1}{2}\frac{N}{m}\left(\sqrt{3} - \mu\right)\right)t \\ v_y = \frac{dy}{dt} \end{cases} \Rightarrow \int_1^{1{,}5} dy = \int_0^{t^*} \left(2 + \left(-g + \frac{1}{2}\frac{N}{m}\left(\sqrt{3} - \mu\right)\right)t\right)dt$$

$$\boxed{1{,}5 - 1 = 2t^* + \left(-g + \frac{1}{2}\frac{N}{m}\left(\sqrt{3} - \mu\right)\right)\frac{{t^*}^2}{2}}$$

Треба да се ријеши систем од двије заокружене једначине. Елиминишемо N/m.

$$\begin{cases} \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}t^* - \frac{1}{4}\frac{N}{m}\left(1 + \sqrt{3}\mu\right){t^*}^2 \\ \frac{1}{2} = 2t^* - g\frac{{t^*}^2}{2} + \frac{1}{2}\frac{N}{m}\left(\sqrt{3} - \mu\right)\frac{{t^*}^2}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}t^* - \frac{1}{4}\frac{N}{m}\left(1 + \sqrt{3}\mu\right){t^*}^2 \\ \frac{1}{2} = 2t^* - g\frac{{t^*}^2}{2} + \frac{1}{4}\frac{N}{m}\left(\sqrt{3} - \mu\right){t^*}^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{2\sqrt{3}t^* - \dfrac{\sqrt{3}}{2}}{1+\sqrt{3}\mu} = \dfrac{1}{4}\dfrac{N}{m}t^{*2} \\ \dfrac{1}{2} = 2t^* - g\dfrac{t^{*2}}{2} + \dfrac{1}{4}\dfrac{N}{m}\left(\sqrt{3}-\mu\right)t^{*2} \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{2} = 2t^* - g\frac{t^{*2}}{2} + \left(\sqrt{3}-\mu\right)\frac{2\sqrt{3}t^* - \dfrac{\sqrt{3}}{2}}{1+\sqrt{3}\mu}$$

$$\frac{1}{2} = 2t^* - 9{,}81\frac{t^{*2}}{2} + \left(\sqrt{3}-0{,}2\right)\frac{2\sqrt{3}t^* - \dfrac{\sqrt{3}}{2}}{1+0{,}2\sqrt{3}}$$

$$\frac{9{,}81}{2}t^{*2} + \left(-2 - \frac{2\sqrt{3}\left(\sqrt{3}-0{,}2\right)}{1+0{,}2\sqrt{3}}\right)t^* + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\left(\sqrt{3}-0{,}2\right)}{1+0{,}2\sqrt{3}} = 0$$

$$4{,}905t^{*2} - 5{,}942t^* + 1{,}485 = 0$$

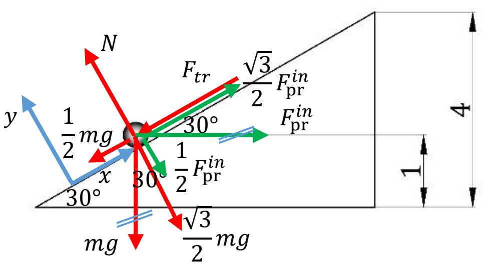
$$t^*_{1/2} = \frac{5{,}942 \pm \sqrt{5{,}942^2 - 4\cdot 4{,}905\cdot 1{,}485}}{2\cdot 4{,}905} = \begin{cases} \boxed{t_1^* = 0{,}352\ \mathrm{s}} \\ t_2^* = 0{,}859\ \mathrm{s} \end{cases}$$

Тачка ће исти положај заузети у два различита временска тренутка, јер долази до промјене смјера кретања. Тачан одговор је $\boldsymbol{t^* = 0,352\ \mathrm{s}}$.

Трећи дио

Координатни систем ћемо усвојити као на првој слици, с тим што ћемо координатни почетак смјестити у тачку из које је започето кретање да би било $x_0 = 0$.

$$\begin{cases} v_{\mathrm{pr}} = 2t + 2 \\ a_{\mathrm{pr}} = a_{\mathrm{pr}_t} = \dfrac{dv_{\mathrm{pr}}}{dt} \Rightarrow a_{\mathrm{pr}} = 2 \end{cases}$$



$$m\vec{a} = \vec{F} \Rightarrow m\vec{a}_{\mathrm{rel}} + m\vec{a}_{\mathrm{pr}} + m\underbrace{\vec{a}_{\mathrm{Cor}}}_{0} = \vec{F} \Rightarrow m\vec{a}_{\mathrm{rel}} = \vec{F} - m\vec{a}_{\mathrm{pr}} \Rightarrow m\vec{a}_{\mathrm{rel}} = \vec{F} + \vec{F}_{\mathrm{pr}}^{in}$$

$$F_{\mathrm{pr}}^{in} = ma_{\mathrm{pr}} = 2m$$

$$\begin{cases} ma_{\mathrm{rel}_x} = -\dfrac{1}{2}mg - F_{tr} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}F_{\mathrm{pr}}^{in} \\ m\underbrace{a_{\mathrm{rel}_y}}_{0} = N - \dfrac{\sqrt{3}}{2}mg - \dfrac{1}{2}F_{\mathrm{pr}}^{in} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ma_{\mathrm{rel}_x} = -\dfrac{1}{2}mg - \mu N + \dfrac{\sqrt{3}}{2}F_{\mathrm{pr}}^{in} \\ N = \dfrac{\sqrt{3}}{2}mg + \dfrac{1}{2}F_{\mathrm{pr}}^{in} \end{cases}$$

$$\begin{cases} ma_{\mathrm{rel}_x} = -\dfrac{1}{2}mg - \mu\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}mg + \dfrac{1}{2}2m\right) + \dfrac{\sqrt{3}}{2}2m \\ N = \dfrac{\sqrt{3}}{2}mg + \dfrac{1}{2}2m \end{cases}$$

$$a_{\mathrm{rel}_x} = \sqrt{3} - \frac{1}{2}g - \mu\left(\frac{\sqrt{3}}{2}g + 1\right) = -5{,}072$$

$$\begin{cases} a_{\mathrm{rel}_x} = -5{,}072 \\ a_{\mathrm{rel}_x} = \dfrac{dv_{\mathrm{rel}_x}}{dt} \end{cases} \Rightarrow \int_4^{v_{\mathrm{rel}_x}} dv_{\mathrm{rel}_x} = -5{,}072 \int_0^t dt$$

$$\begin{cases} v_{\mathrm{rel}_x} = 4 - 5{,}072t \\ v_{\mathrm{rel}_x} = \dfrac{dx}{dt} \end{cases} \Rightarrow \int_0^1 dx = \int_0^{t^*} (4 - 5{,}072t)dt$$

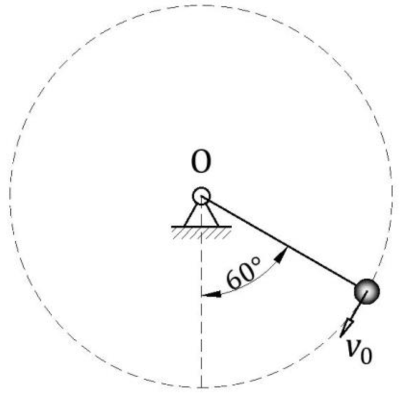
$$1 = 4t^* - 2{,}536{t^*}^2$$

$$2{,}536{t^*}^2 - 4t^* + 1 = 0$$

$$t^*_{1/2} = \frac{4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 2{,}536 \cdot 1}}{2 \cdot 2{,}536} = \begin{cases} \boxed{\boldsymbol{t_1^* = 0{,}312\ \mathrm{s}}} \\ t_2^* = 1{,}266\ \mathrm{s} \end{cases}$$

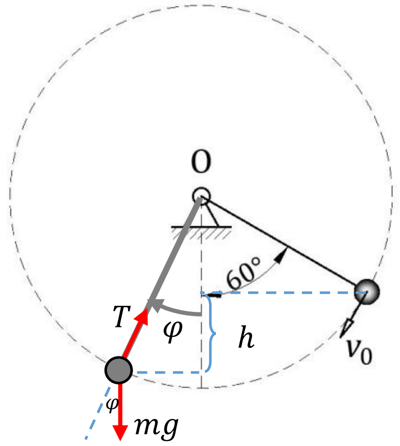
ДРУГИ ЗАДАТАК

Тачка масе m објешена је за непомичну тачку O помоћу неистегљивог канапа дужине l. У почетном тренутку канап је затегнут под углом од 60°, а тачки је саопштена брзина $v_0 = \sqrt{5gl/2}$. Одредити мјесто на коме ће тачка напустити кружну путању, а потом мјесто на коме ће канап поново бити затегнут.



Мјесто напуштања кружне путање

Сила у ужету држи тачку на кружној путањи. Када се уже опушти (када више не буде затегнуто) тачка ће напустити кружну путању.



$$h = l\cos\varphi - l\cos 60° = l\left(\cos\varphi - \frac{1}{2}\right)$$

$$E_{k_k} - E_{k_p} = A_{p-k}^{mg} + \underbrace{A_{p-k}^{T}}_{0}$$

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = +mgh$$

$$\frac{v^2}{2} - \frac{5gl/2}{2} = gl\left(\cos\varphi - \frac{1}{2}\right)$$

$$\frac{v^2}{2} = gl\left(\cos\varphi + \frac{3}{4}\right)$$

$$v^2 = 2gl\left(\cos\varphi + \frac{3}{4}\right)$$

$$m\vec{a} = \vec{F} \Rightarrow \begin{cases} ma_t = \cdots \\ ma_n = T - mg\cos\varphi \end{cases}$$

$$m\frac{v^2}{l} = T - mg\cos\varphi$$

$$m\frac{2gl\left(\cos\varphi + \frac{3}{4}\right)}{l} = T - mg\cos\varphi$$

$$2mg\left(\cos\varphi + \frac{3}{4}\right) = T - mg\cos\varphi$$

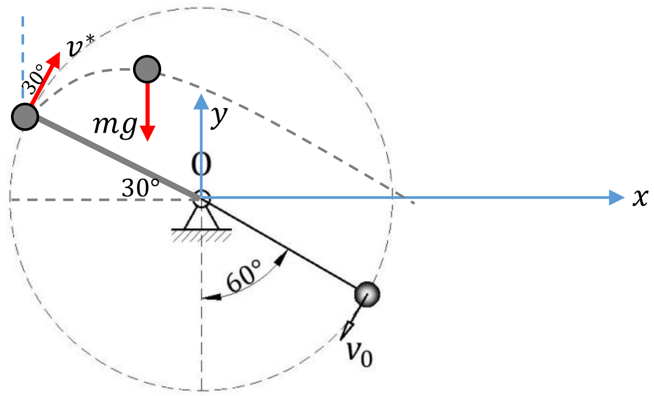
$$\begin{cases} T = 3mg\cos\varphi + \frac{3}{2}mg \\ T^* = 0 \end{cases} \Rightarrow 3mg\cos\varphi^* + \frac{3}{2}mg = 0$$

$$\cos\varphi^* = -\frac{1}{2} \Rightarrow \boldsymbol{\varphi^* = 120°}$$

$$\boxed{v^{*2}} = 2gl\left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{4}\right) = \boxed{\frac{1}{2}gl}$$

<u>Мјесто на коме ће уже поново бити затегнуто</u>

Уже ће поново бити затегнуто након што се тачка врати на кружну путању. Треба нам пресјек једначине путање при слободном кретању и једначине кружнице.



$$m\vec{a} = \vec{F} \Rightarrow \begin{cases} ma_x = 0 \\ ma_y = -mg \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = -g \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_x = 0 \\ a_x = \frac{dv_x}{dt} \end{cases} \Rightarrow \int_{v^*\sin 30°}^{v_x} dv_x = 0\int_0^t dt \Rightarrow v_x = \frac{v^*}{2} = \frac{\sqrt{\frac{1}{2}gl}}{2} = \sqrt{\frac{1}{8}gl}$$

$$\begin{cases} v_x = \sqrt{\frac{1}{8}gl} \\ v_x = \frac{dx}{dt} \end{cases} \Rightarrow \int_{-l\cos 30°}^{x} dx = \sqrt{\frac{1}{8}gl}\int_0^t dt \Rightarrow x = -l\cos 30° + \sqrt{\frac{1}{8}gl}t$$

$$\boxed{x = \sqrt{\frac{1}{8}gl}t - l\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$\begin{cases} a_y = -g \\ a_y = \dfrac{dv_y}{dt} \end{cases} \Rightarrow \int_{v^* \cos 30°}^{v_y} dv_y = -g \int_0^t dt \Rightarrow v_y = v^* \frac{\sqrt{3}}{2} - gt = \sqrt{\frac{3}{8} gl} - gt$$

$$\begin{cases} v_y = \sqrt{\dfrac{3}{8} gl} - gt \\ v_y = \dfrac{dy}{dt} \end{cases} \Rightarrow \int_{l \sin 30°}^{y} dy = \int_0^t \left(\sqrt{\frac{3}{8} gl} - gt \right) dt \Rightarrow y = l \sin 30° + \sqrt{\frac{3}{8} gl} t - \frac{gt^2}{2}$$

$$\boxed{y = \frac{l}{2} + \sqrt{\frac{3}{8} gl} t - \frac{gt^2}{2}}$$

Једначина путање се добија елиминацијом параметра t.

$$\begin{cases} x = \sqrt{\dfrac{1}{8} gl} t - l \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ y = \dfrac{l}{2} + \sqrt{\dfrac{3}{8} gl} t - \dfrac{gt^2}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x + l \frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{\frac{1}{8} gl}} = t \\ y = \dfrac{l}{2} + \sqrt{\dfrac{3}{8} gl} t - \dfrac{gt^2}{2} \end{cases}$$

$$y = \frac{l}{2} + \sqrt{\frac{3}{8} gl} \frac{x + l \frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{\frac{1}{8} gl}} - \frac{g}{2} \left(\frac{x + l \frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{\frac{1}{8} gl}} \right)^2$$

$$y = \frac{l}{2} + x\sqrt{3} + \frac{3}{2} l - \frac{x^2 + xl\sqrt{3} + \frac{3}{4} l^2}{\frac{l}{4}}$$

$$\boxed{y = -\frac{4}{l} x^2 - 3\sqrt{3} x - l}$$

Једначина кружнице је:

$$\boxed{x^2 + y^2 = l^2}$$

Тражимо пресјек заокружених функција:

$$x^2 + \left(-\frac{4}{l} x^2 - 3\sqrt{3} x - l \right)^2 = l^2$$

$$x^2 + \frac{16}{l^2} x^4 + 27x^2 + l^2 + \frac{24\sqrt{3}}{l} x^3 + 8x^2 + 6\sqrt{3} l x = l^2$$

$$\frac{16}{l^2} x^4 + \frac{24\sqrt{3}}{l} x^3 + 36x^2 + 6\sqrt{3} l x = 0$$

$$x \left(\frac{16}{l^2} x^3 + \frac{24\sqrt{3}}{l} x^2 + 36x + 6\sqrt{3} l \right) = 0$$

$$\boldsymbol{x = 0 \Rightarrow y = -l}$$