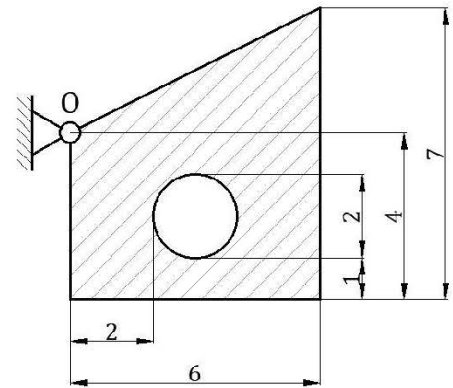


ДРУГИ КОЛОКВИЈУМ ИЗ ДИНАМИКЕ

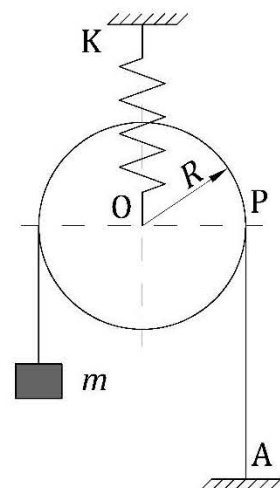
1. Из положаја приказаног на слици хомогеној фигури густине 300 kg/m^2 саопштава се угаона брзина од 8 rad/s у позитивном математичком смјеру. Ако су сви отпори кретању занемарљиви, одредити брзину најбрже тачке на фигури након описаних $\pi/2 \text{ rad}$. Доказати да момент инерције за осу ротације износи $16,48 \text{ kgm}^2$. Дужине су у дециметрима.



Момент инерције за осу, управну на раван фигуре, која пролази кроз њено тежиште

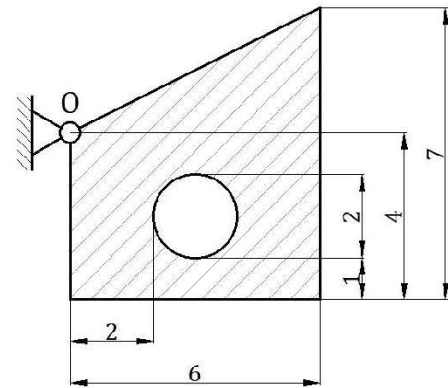
$I_z = \frac{m(b^2 + h^2)}{12}$	$I_z = \frac{m(b^2 + h^2)}{18}$	$I_z = \frac{mR^2}{2}$

2. Нерастегљиво уже, које је једним крајем везано за под, пребачено је преко котура масе $M = 1 \text{ kg}$ и полупречника $R = 20 \text{ cm}$ и носи на свом другом крају терет масе $m = 0,5 \text{ kg}$. За центар котура везана је опруга крутости $c = 1400 \text{ N/m}$ која је другим крајем причвршћена за непомићну тачку К. Терету масе m се из положаја статичке равнотеже приказаног на слици саопштава брзина од 2 m/s вертикално наниже. Одредити брзину коју има котур након што пређе пут од 5 cm . Коју брзину има котур након што пређе пут од 10 cm ? Котур сматрати хомогеним кружним диском.



ДРУГИ КОЛОКВИЈУМ ИЗ ДИНАМИКЕ СА ТЕОРИЈОМ ОСЦИЛАЦИЈА

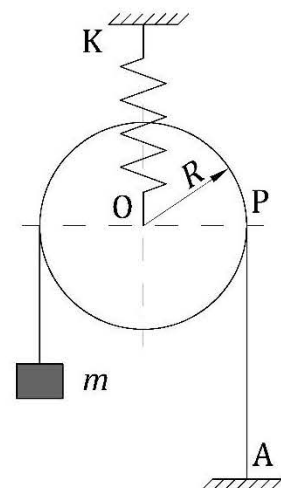
1. Из положаја приказаног на слици хомогеној фигури густине 300 kg/m^2 саопштава се угаона брзина од 8 rad/s у позитивном математичком смјеру. Ако су сви отпори кретању занемарљиви, одредити брзину најбрже тачке на фигури након описаних $\pi/2 \text{ rad}$. Доказати да момент инерције за осу ротације износи $16,48 \text{ kgm}^2$. Дужине су у дециметрима.



Моменти инерције за осу, управну на раван фигуре, која пролази кроз њено тежиште

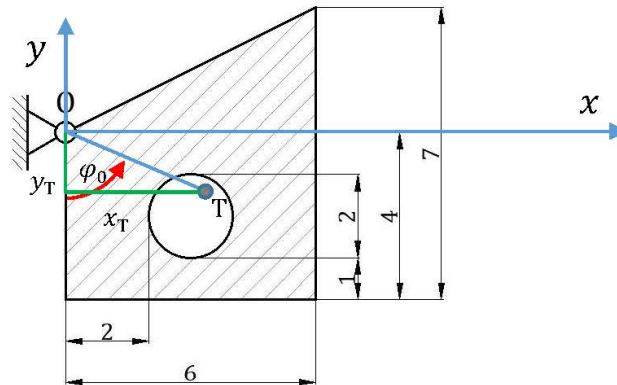
$I_z = \frac{m(b^2 + h^2)}{12}$	$I_z = \frac{m(b^2 + h^2)}{18}$	$I_z = \frac{mR^2}{2}$

2. Нерастегљиво уже, које је једним крајем везано за под, пребачено је преко котура масе $M = 1 \text{ kg}$ и полупречника $R = 20 \text{ cm}$ и носи на свом другом крају терет масе $m = 0,5 \text{ kg}$. За центар котура везана је опруга крутости $c = 1400 \text{ N/m}$ која је другим крајем причвршћена за непомићну тачку К. Терету масе m се из положаја статичке равнотеже приказаног на слици саопштава брзина од 2 m/s вертикално наниже. Написати коначну једначину кретања котура. Одредити брзину коју има котур након што пређе пут од 5 cm . Котур сматрати хомогеним кружним диском. Користити се Лагранжовим једначинама друге врсте.



ПРВИ ЗАДАТАК

Из положаја приказаног на слици хомогеној фигури густине 300 kg/m^2 саопштава се угаона брзина од 8 rad/s у позитивном математичком смјеру. Ако су сви отпори кретању занемарљиви, одредити брзину најбрже тачке на фигури након описаних $\pi/2 \text{ rad}$. Доказати да момент инерције за осу ротације износи $16,48 \text{ kgm}^2$. Дужине су у дециметрима.



Тежиште фигуре:

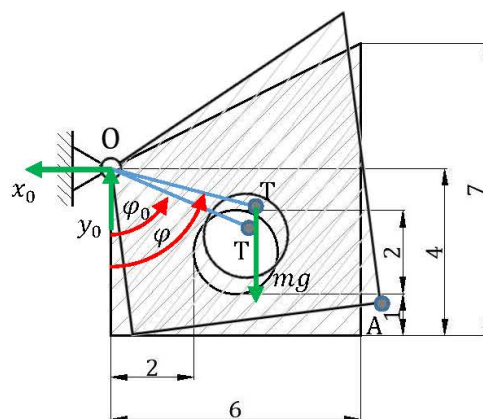
$$x_T = \frac{x_{T_{\blacksquare}} A_{\blacksquare} + x_{T_{\blacktriangle}} A_{\blacktriangle} - x_{T_{\circ}} A_{\circ}}{A_{\blacksquare} + A_{\blacktriangle} - A_{\circ}} = \frac{3 \cdot 6 \cdot 4 + 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 3 - 3 \cdot 1^2 \cdot \pi}{6 \cdot 4 + \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 3 - 1^2 \cdot \pi} = 3,3 \text{ dm} = 0,33 \text{ m}$$

$$y_T = \frac{y_{T_{\blacksquare}} A_{\blacksquare} + y_{T_{\blacktriangle}} A_{\blacktriangle} - y_{T_{\circ}} A_{\circ}}{A_{\blacksquare} + A_{\blacktriangle} - A_{\circ}} = \frac{-2 \cdot 6 \cdot 4 + 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 3 + 2 \cdot 1^2 \cdot \pi}{6 \cdot 4 + \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 3 - 1^2 \cdot \pi} = -1,1 \text{ dm} = -0,11 \text{ m}$$

$$\text{tg } \varphi_0 = \frac{x_T}{y_T} \Rightarrow \varphi_0 = \text{arctg} \frac{x_T}{y_T} = \text{arctg} \frac{3,3}{1,1} = 1,25 \text{ rad}$$

$$m = \rho A = \rho (A_{\blacksquare} + A_{\blacktriangle} - A_{\circ}) = 300 \cdot \left(0,6 \cdot 0,4 + \frac{1}{2} \cdot 0,6 \cdot 0,3 - 0,1^2 \cdot \pi \right) = 89,58 \text{ kg}$$

Иначин



Фигура врши кружно кретање око непомичног ослоња О. Њено кретање се описује диференцијалном једначином обртања крутог тијела око непокретне осе:

$$I_O \varepsilon = \sum M_O$$

$$I_O \varepsilon = -mg \overline{OT} \sin \varphi$$

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon &= -\frac{1}{I_0} mg \sqrt{x_T^2 + y_T^2} \sin \varphi \\ \varepsilon &= \frac{d\omega}{dt} \frac{d\varphi}{d\varphi} = \frac{\omega d\omega}{d\varphi} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \omega d\omega = -\frac{1}{I_0} mg \sqrt{x_T^2 + y_T^2} \sin \varphi d\varphi$$

$$\int_8^{\omega^*} \omega d\omega = -\frac{1}{I_0} mg \sqrt{x_T^2 + y_T^2} \int_{\varphi_0}^{\varphi_0 + \frac{\pi}{2}} \sin \varphi d\varphi$$

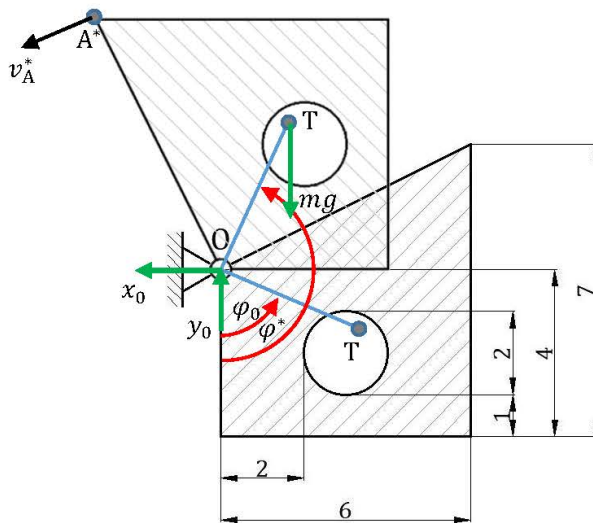
$$\frac{\omega^{*2}}{2} - \frac{8^2}{2} = \frac{1}{I_0} mg \sqrt{x_T^2 + y_T^2} (\cos(\varphi_0 + \frac{\pi}{2}) - \cos \varphi_0)$$

$$\omega^* = \sqrt{64 + \frac{2}{I_0} mg \sqrt{x_T^2 + y_T^2} (\cos(\varphi_0 + \frac{\pi}{2}) - \cos \varphi_0)}$$

$$\omega^* = \sqrt{64 + \frac{2}{16,48} 89,58 \cdot 9,81 \sqrt{0,33^2 + 0,11^2} (\cos(1,25 + \frac{\pi}{2}) - \cos 1,25)} = 4,13 \text{ s}^{-1}$$

$$v_A^* = \overline{OA} \omega^* = \sqrt{0,6^2 + 0,4^2} \cdot 4,13 = \mathbf{2,98 \text{ m/s}}$$

II начин



$$E_k^* - E_{k0} = A_{0*}$$

$$\frac{I_0 \omega^{*2}}{2} - \frac{I_0 \omega_0^2}{2} = -mg (\overline{OT} \sin(\varphi^* - \frac{\pi}{2}) + \overline{OT} \cos \varphi_0)$$

$$\omega^* = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{2mg}{I_0} (\overline{OT} \sin(\varphi^* - \frac{\pi}{2}) + \overline{OT} \cos \varphi_0)}$$

$$\omega^* = \sqrt{8^2 - \frac{2 \cdot 89,58 \cdot 9,81}{16,48} \sqrt{0,33^2 + 0,11^2} (\sin(\varphi_0 + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}) + \cos \varphi_0)} = 4,13 \text{ s}^{-1}$$

$$v_A^* = \overline{OA} \omega^* = \sqrt{0,6^2 + 0,4^2} \cdot 4,13 = \mathbf{2,98 \text{ m/s}}$$

Момент инерције за осу ротације:

$$m_{\blacksquare} = \rho A_{\blacksquare} = 300 \cdot 0,6 \cdot 0,4 = 72 \text{ kg}$$

$$I_{O_{\blacksquare}} = \frac{m_{\blacksquare}(0,6^2 + 0,4^2)}{12} + m_{\blacksquare} \cdot (0,3^2 + 0,2^2) = 12,48 \text{ kgm}^2$$

$$m_{\blacktriangle} = \rho A_{\blacktriangle} = 300 \cdot \frac{1}{2} \cdot 0,6 \cdot 0,3 = 27 \text{ kg}$$

$$I_{O_{\blacktriangle}} = \frac{m_{\blacktriangle}(0,6^2 + 0,3^2)}{18} + m_{\blacktriangle} \cdot (0,4^2 + 0,1^2) = 5,27 \text{ kgm}^2$$

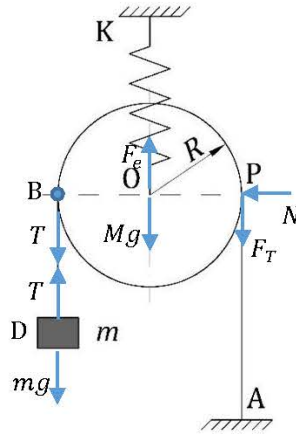
$$m_{\circ} = \rho A_{\circ} = 300 \cdot 0,1^2 \cdot \pi = 9,42$$

$$I_{O_{\circ}} = \frac{m_{\circ}0,1^2}{2} + m_{\circ} \cdot (0,3^2 + 0,2^2) = 1,27 \text{ kgm}^2$$

$$I_O = I_{O_{\blacksquare}} + I_{O_{\blacktriangle}} - I_{O_{\circ}} = 12,48 + 5,27 - 1,27 = \mathbf{16,48 \text{ kgm}^2}$$

ДРУГИ ЗАДАТАК (МАШИНСТВО)

Нерастегљиво уже, које је једним крајем везано за под, пребачено је преко котура масе $M = 1 \text{ kg}$ и полупречника $R = 20 \text{ cm}$ и носи на свом другом крају терет масе $m = 0,5 \text{ kg}$. За центар котура везана је опруга крутости $c = 1400 \text{ N/m}$ која је другим крајем причвршћена за непомичну тачку К. Терету масе m се из положаја статичке равнотеже приказаног на слици саопштава брзина од 2 m/s вертикално наниже. Одредити брзину коју има котур након што пређе пут од 5 cm . Коју брзину има котур након што пређе пут од 10 cm ? Котур сматрати хомогеним кружним диском.



$$v_O = \overline{OP}_v \omega = R\omega \Rightarrow \omega = \frac{v_O}{R} \Rightarrow \varepsilon = \frac{a_O}{R}$$

$$v_D = v_B = \overline{BP}_v \omega = 2R \frac{v_O}{R} = 2v_O \Rightarrow a_D = 2a_O$$

У стању статичке равнотеже сила у опрузи уравнотежава силу у ужету, тежину котура и трење:

$$\left. \begin{array}{l} F_{e_s} = Mg + T + F_{tr} \\ TR = F_{tr}R \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} F_{e_s} = Mg + T + F_{tr} \\ T = F_{tr} \end{array} \right\} \Rightarrow F_{e_s} = Mg + 2T = Mg + 2mg$$

$$c\Delta_s = Mg + 2mg \Rightarrow \Delta_s = \frac{Mg + 2mg}{c}$$

Иначин

$$\left. \begin{array}{l} ma_D = mg - T \\ Ma_O = Mg - F_e + F_T + T \\ \frac{MR^2}{2} \varepsilon = TR - F_T R \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2ma_O = mg - T \\ Ma_O = Mg - F_e + F_T + T \\ \frac{MR^2}{2} \frac{a_O}{R} = TR - F_T R \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 4ma_O = 2mg - 2T \\ Ma_O = Mg - F_e + F_T + T \\ \frac{M}{2} a_O = T - F_T \end{array} \right\}$$

$$\left(4m + M + \frac{M}{2}\right) a_O = 2mg + Mg - F_e$$

$$a_O = \frac{2mg + Mg - c(\Delta_s + s_0)}{4m + \frac{3M}{2}} = \frac{2mg + Mg - c\Delta_s - cs_0}{4m + \frac{3M}{2}} = -\frac{cs_0}{4m + \frac{3M}{2}} = -\frac{2cs_0}{8m + 3M}$$

$$\left. \begin{array}{l} a_O = -\frac{2cs_0}{8m + 3M} \\ a_O = \frac{dv_O}{dt} \frac{ds_0}{ds_0} = \frac{v_O dv_O}{ds_0} \end{array} \right\} \Rightarrow v_O dv_O = -\frac{2cs_0}{8m + 3M} ds_0$$

$$\int_{2/2=1}^{v_0} v_O dv_O = -\int_0^{s_0} \frac{2cs_0}{8m + 3M} ds_0 \Rightarrow \frac{v_0^2}{2} - \frac{1^2}{2} = -\frac{cs_0^2}{8m + 3M}$$

$$v_0^2 = 1 - \frac{2cs_0^2}{8m + 3M}$$

$$v_0^* = \sqrt{1 - \frac{2 \cdot 1400 \cdot 0,05^2}{8 \cdot 0,5 + 3 \cdot 1}} = 0$$

Дакле, котур ће се зауставити након што пређе пут од 5 cm и почети кретање у супротном смјеру, тако да ће 5 cm прећи крећући се у једном, а 5 cm крећући се у другом смјеру. Пошто се након других 5 cm котур враћа у почетни положај, његова брзина ће износити 1 m/s с обзиром на то да нема дисипације енергије.

II начин

$$E_k = E_{km}^{\text{tr}} + E_{kM}^{\text{tr}} + E_{kM}^{\text{rot}}$$

$$E_k = \frac{mv_D^2}{2} + \frac{Mv_0^2}{2} + \frac{MR^2}{2}\omega^2 = \frac{m4v_0^2}{2} + \frac{Mv_0^2}{2} + \frac{MR^2}{2}\frac{v_0^2}{R^2} = \left(2m + \frac{M}{2} + \frac{M}{4}\right)v_0^2 = \left(2m + \frac{3M}{4}\right)v_0^2$$

$$E_k = 1,75v_0^2$$

$$E_k^* - E_{k0} = A_{0^*}^{mg} + A_{0^*}^{Mg} + A_{0^*}^{F_e}$$

$$1,75v_0^{*2} - 1,75v_0^2 = mgs_D + Mgs_0 + \frac{1}{2}c(\Delta_0^2 - \Delta^{*2})$$

$$1,75v_0^{*2} - 1,75v_0^2 = 2mgs_0 + Mgs_0 + \frac{1}{2}c(\Delta_s^2 - (\Delta_s + s_0)^2)$$

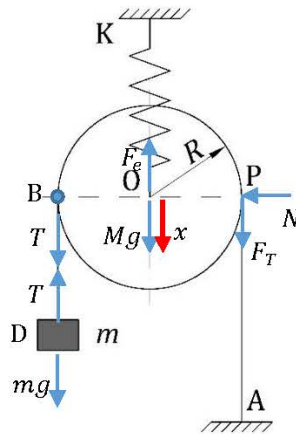
$$1,75v_0^{*2} - 1,75v_0^2 = 2mgs_0 + Mgs_0 + \frac{1}{2}c(\Delta_s^2 - \Delta_s^2 - 2\Delta_s s_0 - s_0^2)$$

$$1,75v_0^{*2} - 1,75v_0^2 = \frac{2mgs_0 + Mgs_0 - c\Delta_s s_0}{0} - \frac{1}{2}cs_0^2$$

$$v_0^* = \sqrt{v_0^2 - \frac{1}{2 \cdot 1,75}cs_0^2} = \sqrt{\left(\frac{2}{2}\right)^2 - \frac{1}{2 \cdot 1,75}1400 \cdot 0,05^2} = 0$$

ДРУГИ ЗАДАТАК (МЕХАТРОНИКА)

Нерастегљиво Нерастегљиво уже, које је једним крајем везано за под, пребачено је преко котура масе $M = 1 \text{ kg}$ и полупречника $R = 20 \text{ cm}$ и носи на свом другом крају терет масе $m = 0,5 \text{ kg}$. За центар котура везана је опруга крутости $c = 1400 \text{ N/m}$ која је другим крајем причвршћена за непомичну тачку К. Терету масе m се из положаја статичке равнотеже приказаног на слици саопштава брзина од 2 m/s вертикално наниже. Написати коначну једначину кретања котура. Одредити брзину коју има котур након што пређе пут од 5 cm . Котур сматрати хомогеним диском. Користити се Лагранжовим једначинама друге врсте.



У стању статичке равнотеже сила у опрузи уравнотежава силу у ужету, тежину котура и трење:

$$\left. \begin{aligned} F_{e_s} &= Mg + T + F_{tr} \\ TR &= F_{tr}R \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} F_{e_s} &= Mg + T + F_{tr} \\ T &= F_{tr} \end{aligned} \right\} \Rightarrow F_{e_s} = Mg + 2T = Mg + 2mg$$

$$\boxed{c\Delta_s = Mg + 2mg}$$

$$E_k = \frac{M\dot{x}^2}{2} + \frac{MR^2\dot{x}^2}{2R^2} + \frac{m(2\dot{x})^2}{2} = \left(M + \frac{M}{2} + 4m\right)\frac{\dot{x}^2}{2} = \left(\frac{3}{2}M + 4m\right)\frac{\dot{x}^2}{2}$$

$$E_p = -Mgx - mg(2x) + \frac{1}{2}c(\Delta_s + x)^2$$

$$\boxed{\frac{d}{dt} \frac{\partial E_k}{\partial \dot{x}} + \frac{\partial E_p}{\partial x} = 0}$$

$$\frac{\partial E_k}{\partial \dot{x}} = \left(\frac{3}{2}M + 4m\right)\dot{x}$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial E_k}{\partial \dot{x}} = \left(\frac{3}{2}M + 4m\right)\ddot{x}$$

$$\frac{\partial E_p}{\partial x} = \underbrace{-Mg - 2mg + c\Delta_s}_0 + cx$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial E_k}{\partial \dot{x}} + \frac{\partial E_p}{\partial x} = 0 \Rightarrow \left(\frac{3}{2}M + 4m\right)\ddot{x} + cx = 0$$

$$\boxed{\ddot{x} + \frac{2c}{3M + 8m}x = 0}$$

$$\boxed{\omega} = \sqrt{\frac{2c}{3M + 8m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1400}{3 \cdot 1 + 8 \cdot 0,5}} = \boxed{20 \text{ s}^{-1}}$$

$$A = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{\dot{x}_0}{\omega}\right)^2} = \sqrt{0^2 + \left(\frac{2/2}{20}\right)^2} = 0,05 \text{ m}$$

$$\sin \alpha = \frac{x_0}{A} = \frac{0}{0,05} = 0 \Rightarrow \alpha = 0$$

$$x = A \sin(\omega t + \alpha)$$

$$\mathbf{x = 0,05 \sin(20t)}$$

$$\dot{x} = 0,05 \cos(20t) \cdot 20 = \cos(20t)$$

$$x^* = 0,05 \sin(20t^*) \Rightarrow 20t^* = \arcsin \frac{x^*}{0,05} \Rightarrow \boxed{t^*} = \frac{1}{20} \arcsin \frac{x^*}{0,05} = \frac{1}{20} \arcsin \frac{0,05}{0,05} = \boxed{\frac{1}{20} \frac{\pi}{2}}$$

$$\dot{x}^* = \cos(20t^*) = \cos\left(20 \frac{1}{20} \frac{\pi}{2}\right) = \mathbf{0}$$