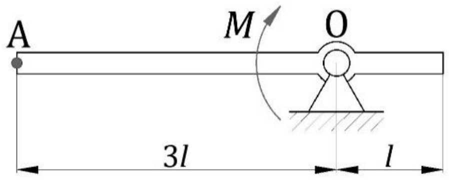
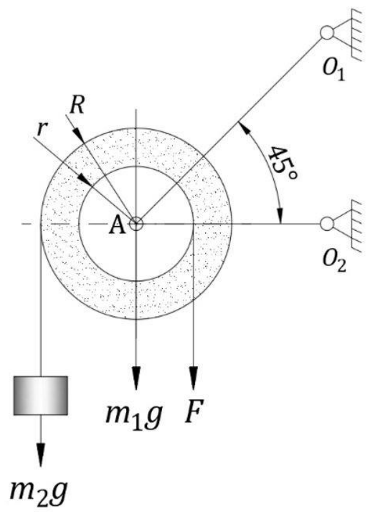
ДРУГИ КОЛОКВИЈУМ ИЗ ДИНАМИКЕ

1. Хомогени штап масе 2 kg и дужине 6 m у приказаном положају има угаону брзину од $4\,\mathrm{s}^{-1}$ у позитивном математичком мјеру. На њега дјелује момент M чији се интензитет мијења према закону $M = 2s_\mathrm{A} + 1$ [Nm], гдје је s_A [m] пређени пут тачке А у односу на приказани положај. Одредити брзину тачке А након што штап опише 1 rad. Како би се одредио положај у коме штап има највећу угаону брзину, прије него што промијени смјер кретања?

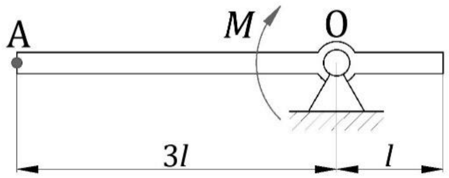


2. На котур, који може да обрће око непокретне хоризонталне осе А учвршћене лаким крутим штаповима, намотано је неистегљиво уже за чији је слободни крај везан тег масе $m_2 = 5$ kg. За котур је коаксијално круто везан добош, занемарљиве масе и полупречника $r = 0{,}2$ m. Преко њега је намотано уже чији се слободни крај вуче вертикалном силом F чији се интензитет мијења према закону $F = 100(1 + 0{,}3t)$. Ако је кретање почело из мира, оредити угаону брзину котура и силе у штаповима у тренутку $t_2 = 2$ s. Котур сматрати хомогеним кружним диском полупречника $R = 0{,}4$ m и масе $m_1 = 20$ kg.

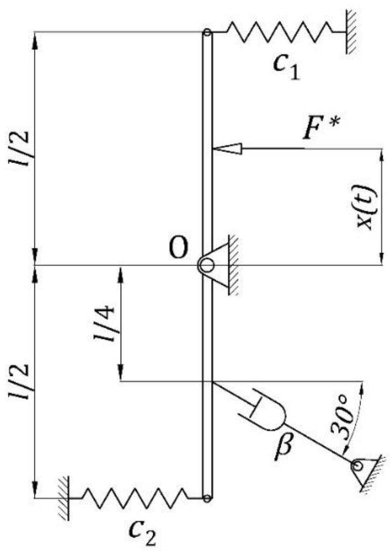


ДРУГИ КОЛОКВИЈУМ ИЗ ДИНАМИКЕ СА ТЕОРИЈОМ ОСЦИЛАЦИЈА

1. Хомогени штап масе 2 kg и дужине 6 m у приказаном положају има угаону брзину од $4\,\mathrm{s}^{-1}$ у позитивном математичком мјеру. На њега дјелује момент M чији се интензитет мијења према закону $M = 2s_{\mathrm{A}} + 1$ [Nm], гдје је s_{A} [m] пређени пут тачке A у односу на приказани положај. Одредити брзину тачке A након што штап опише 1 rad. Како би се одредио положај у коме штап има највећу угаону брзину, прије него што промијени смјер кретања?

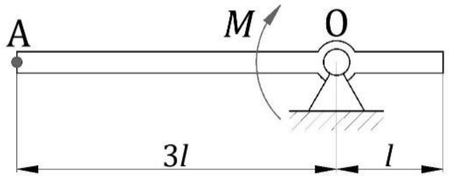


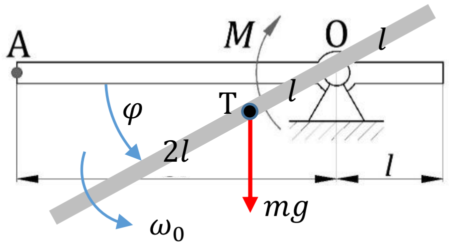
2. Хомогени штап масе $m = 30$ kg и дужине $l = 2$ m, који може да се обрће у равни око непокретне тачке O, одржавају у стабилном равнотежном положају, приказаном на слици, опруге крутости $c_1 = 6\ \mathrm{N/cm}$ и $c_2 = 4\ \mathrm{N/cm}$. За штап је везана пригушница коефицијента пригушења $640\ \mathrm{Ns/m}$. Управно на осу штапа дјелује сила F_0 интензитета од 100 N, чија се нападна линија помјера према закону $x = 0{,}2\sin 5t$. Формирати диференцијалну једначину кретања штапа користећи се Лагранжовим једначинама друге врсте. Ако се штап отклони из равнотежног положаја за угао 0,1 rad и пушти, одредити његов положај након двије секунде од почетка кретања.



ПРВИ ЗАДАТАК

Хомогени штап масе 2 kg и дужине 6 m у приказаном положају има угаону брзину од $4\,\mathrm{s}^{-1}$ у позитивном математичком мјеру. На њега дјелује момент M чији се интензитет мијења према закону $M = 2s_{\mathrm{A}} + 1$ [Nm], гдје је s_{A} [m] пређени пут тачке A у односу на приказани положај. Одредити брзину тачке A након што штап опише 1 rad. Како би се одредио положај у коме штап има највећу угаону брзину, прије него што промијени смјер кретања?





$$I_{\mathrm{O}} = I_{\mathrm{T}} + m\overline{\mathrm{TO}}^2 = \frac{m(4l)^2}{12} + ml^2 = \frac{16}{12}ml^2 + ml^2 = \frac{7}{3}ml^2$$

$$s_{\mathrm{A}} = \overline{\mathrm{AO}}\varphi = 3l\varphi$$

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt}\frac{d\varphi}{d\varphi} = \frac{\omega d\omega}{d\varphi}$$

$$4l = 6\ \mathrm{m} \Rightarrow l = \frac{3}{2}\ \mathrm{m}$$

$$I_{\mathrm{O}}\varepsilon = mgl\cos\varphi - M$$

$$I_{\mathrm{O}}\varepsilon = mgl\cos\varphi - 2s_{\mathrm{A}} - 1$$

$$\frac{7}{3}ml^2\varepsilon = mgl\cos\varphi - 6l\varphi - 1$$

$$\frac{7}{3}ml^2\int_4^{\omega^*}\omega d\omega = \int_0^{1\,\mathrm{rad}}(mgl\cos\varphi - 6l\varphi - 1)d\varphi$$

$$\frac{7}{3}ml^2\left(\frac{\omega^{*2}}{2} - \frac{4^2}{2}\right) = mgl(\sin 1 - \sin 0) - 6l\frac{1^2}{2} - 1$$

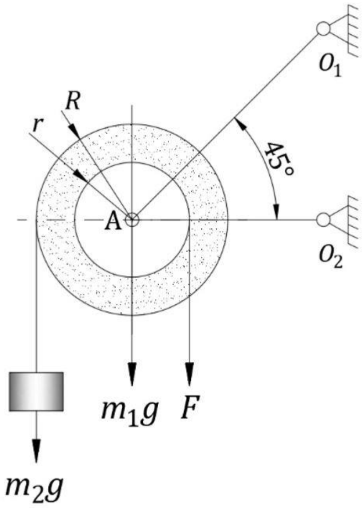
$$\frac{7}{3}\cdot 2\cdot\frac{9}{4}\left(\frac{\omega^{*2}}{2} - \frac{4^2}{2}\right) = 2\cdot 9{,}81\cdot\frac{3}{2}\cdot 0{,}84 - 3\cdot\frac{3}{2} - 1$$

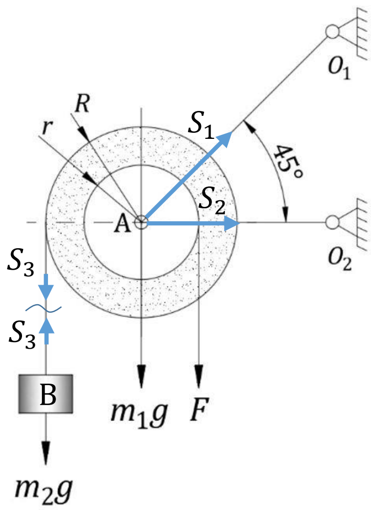
$$\omega^* = 4{,}435\ \mathrm{s}^{-1}$$

$$\boldsymbol{v}_{\mathbf{A}}^* = 3l\omega^* = \mathbf{19{,}96\,\frac{m}{s}}$$

ДРУГИ ЗАДАТАК (МАШИНСТВО)

На котур, који може да обрће око непокретне хоризонталне осе A учвршћене лаким крутим штаповима, намотано је неистегљиво уже за чији је слободни крај везан тег масе $m_2 = 5$ kg. За котур је коаксијално круто везан добош, занемарљиве масе и полупречника $r = 0{,}2$ m. Преко њега је намотано уже чији се слободни крај вуче вертикалном силом F чији се интензитет мијења према закону $F = 100(1 + 0{,}3t)$. Ако је кретање почело из мира, оредити угаону брзину котура и силе у штаповима у тренутку $t_2 = 2$ s. Котур сматрати хомогеним кружним диском полупречника $R = 0{,}4$ m и масе $m_1 = 20$ kg.





$$\left.\begin{aligned} m_2 a_{\mathrm{B}} &= S_3 - m_2 g \\ I_{\mathrm{A}}\varepsilon &= Fr - S_3 R \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} m_2 R\varepsilon &= S_3 - m_2 g \\ \frac{m_1 R^2}{2}\varepsilon &= 100(1+0{,}3t)r - S_3 R \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} m_2 R\varepsilon &= S_3 - m_2 g \\ \frac{m_1 R}{2}\varepsilon &= 100(1+0{,}3t)\frac{r}{R} - S_3 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\left(\frac{m_1}{2} + m_2\right) R\varepsilon = -m_2 g + 100(1+0{,}3t)\frac{r}{R}$$

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon &= \frac{100(1+0{,}3t)\frac{r}{R} - m_2 g}{R\left(\frac{m_1}{2} + m_2\right)} = \frac{100(1+0{,}3t)\frac{0{,}2}{0{,}4} - 5\cdot 9{,}81}{0{,}4\left(\frac{20}{2} + 5\right)} = \frac{10 - 9{,}81 + 3t}{1{,}2} \\ \varepsilon &= \frac{d\omega}{dt} \end{aligned}\right\} \Rightarrow d\omega = \varepsilon dt$$

$$d\omega = \frac{10 - 9{,}81 + 3t}{1{,}2} dt$$

$$\int_0^{\omega^*} d\omega = \int_0^2 \frac{10 - 9{,}81 + 3t}{1{,}2} dt$$

$$\boldsymbol{\omega^* = 5{,}32\ \mathrm{s}^{-1}}$$

$$m_2 R\varepsilon = S_3 - m_2 g$$

$$S_3 = m_2 R\varepsilon + m_2 g = m_2(R\varepsilon + g) = 5\left(0{,}4 \frac{10 - 9{,}81 + 3t}{1{,}2} + 9{,}81\right)$$

$$S_3 = 5\frac{10 - 9{,}81 + 3t + 9{,}81 \cdot 3}{3} = 49{,}37 + 5t$$

$$m_1 \underbrace{\vec{a}_\mathrm{A}}_{\vec{0}} = \vec{F}_\mathrm{A}$$

$$\vec{F}_\mathrm{A} = \vec{0}$$

$$\vec{F} + m_1\vec{g} + \vec{S}_1 + \vec{S}_2 + \vec{S}_3 = \vec{0} \Rightarrow \left.\begin{matrix} S_1 \cos 45° + S_2 = 0 \\ S_1 \sin 45° - m_1 g - F - S_3 = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{matrix} S_1 \frac{\sqrt{2}}{2} + S_2 = 0 \\ S_1 \frac{\sqrt{2}}{2} - 20 \cdot 9{,}81 - 100(1 + 0{,}3t) - 49{,}37 - 5t = 0 \end{matrix}\right\}$$

$$-20 \cdot 9{,}81 - 100(1 + 0{,}3t) - 49{,}37 - 5t - S_2 = 0$$

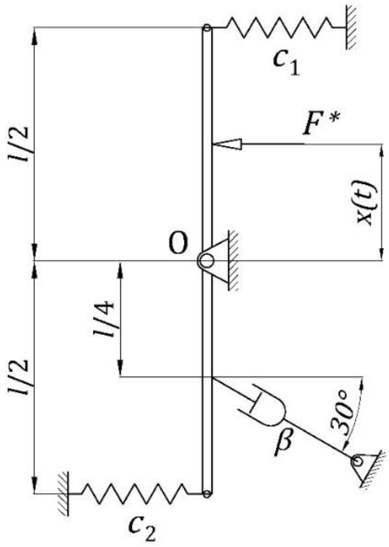
$$S_2 = -35t - 345{,}57 \Rightarrow \boldsymbol{S_2^* = -415{,}57\ \mathrm{N}}$$

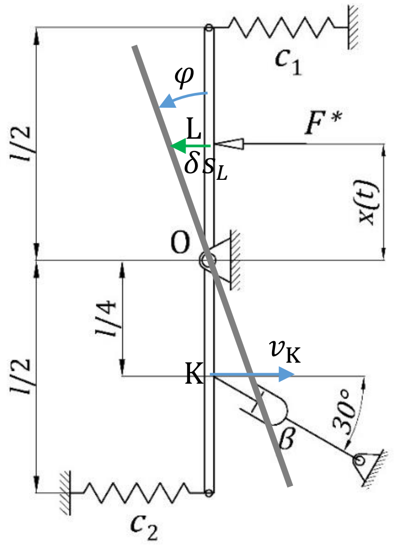
$$S_1 \frac{\sqrt{2}}{2} + S_2 = 0$$

$$\boldsymbol{S_1^*} = -S_2\sqrt{2} = \boldsymbol{587{,}7\ \mathrm{N}}$$

ДРУГИ ЗАДАТАК (МЕХАТРОНИКА)

Хомогени штап масе $m = 30$ kg и дужине $l = 2$ m, који може да се обрће у равни око непокретне тачке O, одржавају у стабилном равнотежном положају, приказаном на слици, опруге крутости $c_1 = 6$ N/cm и $c_2 = 4$ N/cm. За штап је везана пригушница коефицијента пригушења 640 Ns/m. Управно на осу штапа дјелује сила F_0 интензитета од 100 N, чија се нападна линија помјера према закону $x = 0{,}2\sin 5t$. Формирати диференцијалну једначину кретања штапа користећи се Лагранжовим једначинама друге врсте. Ако се штап отклони из равнотежног положаја за угао 0,1 rad и пушти, одредити његов положај након двије секунде од почетка кретања.





$$I_O = \frac{ml^2}{12}$$

$$E_k = \frac{I_O\dot{\varphi}^2}{2} = \frac{ml^2\dot{\varphi}^2}{24}$$

$$\Phi = \frac{1}{2}\beta v_r^2 = \frac{1}{2}\beta(v_K\cos 30°)^2 = \frac{1}{2}\beta\left(\frac{l}{4}\dot{\varphi}\cos 30°\right)^2 = \frac{1}{2}\beta\frac{l^2}{16}\dot{\varphi}^2\frac{3}{4} = \frac{3}{128}\beta l^2\dot{\varphi}^2$$

$$E_p = \frac{1}{2}c_1\Delta_1^2 + \frac{1}{2}c_2\Delta_2^2 = \frac{1}{2}c_1\left(\frac{l}{2}\varphi\right)^2 + \frac{1}{2}c_2\left(\frac{l}{2}\varphi\right)^2 = \frac{l^2}{8}(c_1+c_2)\varphi^2$$

$$\delta A^* = \overrightarrow{F^*}\cdot\delta\overrightarrow{s_L} = F^*\delta s_L = F_0 x\sin\delta\varphi \approx F_0 x\delta\varphi = 100\cdot 0{,}2\sin 5t\cdot\delta\varphi = \boxed{20}\sin 5t\cdot\delta\varphi \Rightarrow \begin{cases} Q_0 = 20 \\ \Omega = 5 \end{cases}$$

$$\frac{dE_k}{d\dot{\varphi}} = \frac{ml^2\dot{\varphi}}{12}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{dE_k}{d\dot{\varphi}} = \frac{ml^2\ddot{\varphi}}{12}$$

$$\frac{d\Phi}{d\dot{\varphi}} = \frac{3}{64}\beta l^2\dot{\varphi}$$

$$\frac{dE_p}{d\varphi} = \frac{l^2}{4}(c_1+c_2)\varphi$$

$$\frac{d}{dt}\frac{dE_k}{d\dot{\varphi}} + \frac{d\Phi}{d\dot{\varphi}} + \frac{dE_p}{d\varphi} = Q_0 \sin \Omega t$$

Диференцијална једначина осциловања

$$\boldsymbol{\frac{ml^2}{12}\ddot{\varphi} + \frac{3}{64}\beta l^2\dot{\varphi} + \frac{l^2}{4}(c_1 + c_2)\varphi = 20 \sin 5t}$$

$$\boldsymbol{10\ddot{\varphi} + 120\dot{\varphi} + 1000\varphi = 20 \sin 5t}$$

$$a_{11} = 10, \qquad b_{11} = 120, \qquad c_{11} = 1000$$

$$n = \frac{b_{11}}{2a_{11}} = \frac{120}{20} = 6$$

$$\omega = \sqrt{\frac{c_{11}}{a_{11}}} = \sqrt{\frac{1000}{10}} = 10$$

$$h = \frac{Q_0}{a_{11}} = \frac{20}{10} = 2$$

$$\boxed{\varphi = \varphi_h + \varphi_p}$$

$$n = 6 < \omega = 10 \Rightarrow \boxed{\varphi_h = Re^{-nt}\sin(pt + \alpha)}$$

$$p^2 = \omega^2 - n^2 \Rightarrow p = \sqrt{\omega^2 - n^2} = \sqrt{100 - 36} = 8$$

$$\boldsymbol{\varphi_h = Re^{-6t}\sin(8t + \alpha)}$$

$$\boxed{\varphi_p = P\sin(\Omega t - \gamma)}$$

$$P = \frac{h}{\sqrt{(\omega^2 - \Omega^2)^2 + 4n^2\Omega^2}} = \frac{2}{\sqrt{(100 - 25)^2 + 4 \cdot 36 \cdot 25}} = 0{,}021$$

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{2n\Omega}{\omega^2 - \Omega^2} = \frac{2 \cdot 6 \cdot 5}{100 - 25} = 0{,}8 \Rightarrow \gamma = 0{,}675 \text{ rad}$$

$$\boldsymbol{\varphi_p = 0{,}021\sin(5t - 0{,}675)}$$

Општа једначина осциловања

$$\boldsymbol{\varphi = Re^{-6t}\sin(8t + \alpha) + 0{,}021\sin(5t - 0{,}675)}$$

Почетни услови

$$\varphi_0 = 0{,}1, \qquad \dot{\varphi}_0 = 0$$

$$\varphi = Re^{-6t}\sin(8t+\alpha) + 0{,}021\sin(5t-0{,}675)$$
$$\dot{\varphi} = -6Re^{-6t}\sin(8t+\alpha) + 8Re^{-6t}\cos(8t+\alpha) + 0{,}105\cos(5t-0{,}675)$$

Уврштавање почетних услова

$$0{,}1 = R\sin\alpha - 0{,}013$$
$$0 = -6R\sin\alpha + 8R\cos\alpha + 0{,}082$$

$$0{,}678 = 6R\sin\alpha$$
$$0 = -6R\sin\alpha + 8R\cos\alpha + 0{,}082$$

$$0{,}678 = 8R\cos\alpha + 0{,}082 \Rightarrow \left.\begin{aligned} R\cos\alpha &= 0{,}0745 \\ R\sin\alpha &= 0{,}113 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} R^2\cos^2\alpha &= 0{,}0056 \\ R^2\sin^2\alpha &= 0{,}0128 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{R = 0{,}136}$$

$$\boxed{\alpha} = \arcsin\frac{0{,}113}{R} = \arcsin\frac{0{,}113}{0{,}136} = \boxed{0{,}98}$$

Коначна једначина осциловања

$$\boldsymbol{\varphi = 0,136e^{-6t}\sin(8t+0,98) + 0,021\sin(5t-0,675)}$$

Положај након двије секунде од почетка кретања

$$\boldsymbol{\varphi_2} = 0{,}136e^{-12}\sin(16+0{,}98) + 0{,}021\sin(10-0{,}675) = \mathbf{0,002\ rad}$$