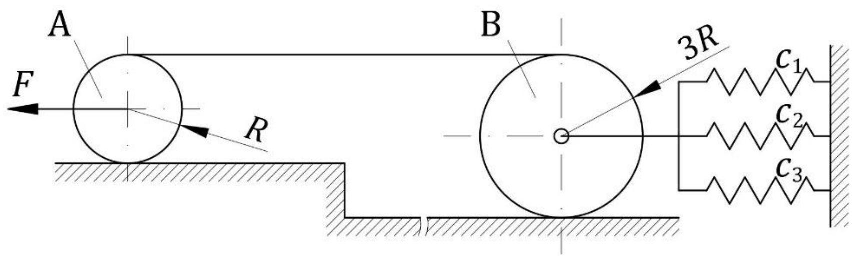
Универзитет Црне Горе
Машински факултет Подгорица 12. 2. 2024.

ДРУГИ КОЛОКВИЈУМ ИЗ ДИНАМИКЕ

1. Хомогеном кружном диску масе 4 kg и полупречника 20 cm саопшти се почетна брзина од 8 m/s уз стрму раван нагиба 60° у односу на хоризонталу. Одредити вријеме потребно да диск пређе пут од 10 m. Подлогу и диск сматрати апсолутно крутим. Диск се котрља без клизања. Ако је средиште диска везано за опругу која је паралелна стрмој равни, чији је други крај непомичан и која је ненапрегнута на почетку кретања, одредити крутост опруге потребну да се диск заустави након што пређе пут од 2 m.

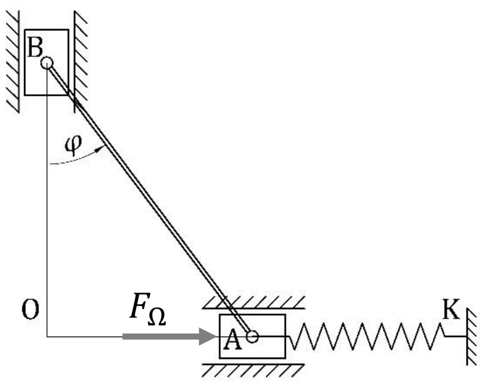
2. Систем приказан на слици састоји се из два хомогена кружна диска маса $m_\mathrm{A} = 4$ kg и $m_\mathrm{B} = 5$ kg који се по крутој подлози котрљају без клизања. Средиште диска A вуче се хоризонталном силом F чији се интензитет мијења према закону $F = 3s_\mathrm{B}^2$ [N], гдје је s_B [m] пут који пређе тијело B у односу на почетни положај у коме је његова угаона брзина износила 1 rad/s у позитивном математичком смјеру. За средиште диска B везан је систем аксијалних опруга крутости $2c_1 = c_2 = 3c_3 = 60$ N/m које су у почетном положају биле ненапрегнуте. Полупречник диска B је 75 cm, а дужина неистегљивог ужета којим су дискови везани 5 m. Одредити угаону брзину диска A након што пређе пут од 0,1 m.



ДРУГИ КОЛОКВИЈУМ ИЗ ДИНАМИКЕ СА ТЕОРИЈОМ ОСЦИЛАЦИЈА

1. Хомогеном кружном диску масе 4 kg и полупречника 20 cm саопшти се почетна брзина од $8\ \mathrm{m/s}$ уз стрму раван нагиба 60° у односу на хоризонталу. Одредити вријеме потребно да диск пређе пут од 10 m. Подлогу и диск сматрати апсолутно крутим. Ако је средиште диска везано за опругу која је паралелна стрмој равни, чији је други крај непомичан и која је ненапрегнута на почетку кретања, одредити крутост опруге потребну да се диск заустави након што пређе пут од 2 m.

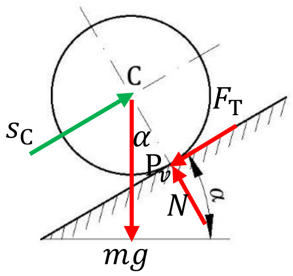
2. Хомогени штап AB масе 3 kg и дужине $2l = 1$ m носи на крајевима клизаче A и B маса по 4 kg који клизе у вертикалној равни по глатким узајамно управним вођицама. За клизач A везана је опруга крутости $500\ \mathrm{N/m}$, чија је ненапрегнута дужина $\overline{\mathrm{OK}}$. На почетку кретања се клизачу A саопштава брзина од $0{,}5\ \mathrm{m/s}$ удесно из равнотежног положаја. На клизач A дјелује принудна сила $F_\Omega = F_0 \sin(\Omega t)$, гдје је $F_0 = 10$ N, а $\Omega = 12\ \mathrm{s}^{-1}$. Одредити положај и брзину система након 5 s од почетка кретања.



ПРВИ ЗАДАТАК

Хомогеном кружном диску масе 4 kg и полупречника 20 cm саопшти се почетна брзина од 8 m/s уз стрму раван нагиба 60° у односу на хоризонталу. Одредити вријеме потребно да диск пређе пут од 10 m. Подлогу и диск сматрати апсолутно крутим. Диск се котрља без клизања. Ако је средиште диска везано за опругу која је паралелна стрмој равни, чији је други крај непомичан и која је ненапрегнута на почетку кретања, одредити крутост опруге потребну да се диск заустави након што пређе пут од 2 m.

<u>Први дио</u>



$$\left.\begin{aligned} &ma_C = -mg\sin\alpha - F_T \\ &I_C\varepsilon = F_T R \\ &v_C = \underbrace{\overline{CP_v}}_{\text{const}}\,\omega \Rightarrow a_C = a_{C_t} = \underbrace{\overline{CP_v}}_{\text{const}}\,\varepsilon = R\varepsilon \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} &ma_C = -mg\sin\alpha - F_T \\ &\frac{mR^2}{2}\frac{a_C}{R} = F_T R \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} &ma_C = -mg\sin\alpha - F_T \\ &\frac{m}{2}a_C = F_T \end{aligned}\right\}$$

$$\frac{3}{2}ma_C = -mg\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$a_C = -g\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\left.\begin{aligned} a_C &= -g\frac{\sqrt{3}}{3} \\ a_C &= \frac{dv_C}{dt} \end{aligned}\right\} \Rightarrow dv_C = -g\frac{\sqrt{3}}{3}dt \Rightarrow \int_8^{v_C} dv_C = -g\frac{\sqrt{3}}{3}\int_0^t dt \Rightarrow v_C = 8 - g\frac{\sqrt{3}}{3}t$$

$$\left.\begin{aligned} v_C &= 8 - g\frac{\sqrt{3}}{3}t \\ v_C &= \frac{ds_C}{dt} \end{aligned}\right\} \Rightarrow ds_C = \left(8 - g\frac{\sqrt{3}}{3}t\right)dt \Rightarrow \int_0^{s_C} ds_C = \int_0^t \left(8 - g\frac{\sqrt{3}}{3}t\right)dt \Rightarrow s_C = 8t - g\frac{\sqrt{3}}{6}t^2$$

Узимајући да је $s_C^* = 10$ m, добија се:

$$10 = 8t^* - g\frac{\sqrt{3}}{6}t^{*2}$$

$$g\frac{\sqrt{3}}{6}t^{*2} - 8t^* + 10 = 0$$

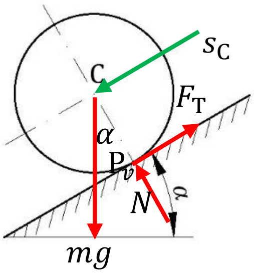
$$t_{1/2}^* = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 4g\frac{\sqrt{3}}{6}10}}{2g\frac{\sqrt{3}}{6}} = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 20\frac{\sqrt{3}}{3}g}}{g\frac{\sqrt{3}}{3}}$$

Уочава се да оба рјешења излазе из скупа реалних бројева, што значи да немају физичког смисла. То даље значи да је погрешна претпоставка према којој се тачка све вријеме креће у једном смјеру. Стога прво треба израчунати вријеме и пређени пут до заустављања, а затим узети у обзир промјену смјера кретања.

$$\begin{cases} v_\mathrm{C} = 8 - g\dfrac{\sqrt{3}}{3}t \\ v_\mathrm{C}^\# = 0 \end{cases} \Rightarrow 8 = g\frac{\sqrt{3}}{3}t^\# \Rightarrow t^\# = \frac{24}{g\sqrt{3}} = 1{,}41\ \mathrm{s}$$

$$s_\mathrm{C}^\# = 8t^\# - g\frac{\sqrt{3}}{6}t^{\#^2} = 8\cdot 1{,}41 - g\frac{\sqrt{3}}{6}1{,}41^{\,2} = 5{,}65\ \mathrm{m}$$

Дакле, у једном смјеру тачка прелази пут од 5,65 m, док у другом смјеру прелази преосталих $10 - 5{,}65\ \mathrm{m} = 4{,}35\ \mathrm{m}$.



$$\left.\begin{aligned} &ma_\mathrm{C} = mg\sin\alpha - F_\mathrm{T} \\ &I_\mathrm{C}\varepsilon = F_\mathrm{T}R \\ &v_\mathrm{C} = \underbrace{\overline{\mathrm{CP}_v}}_{\mathrm{const}}\,\omega \Rightarrow a_\mathrm{C} = a_{\mathrm{C}_t} = \underbrace{\overline{\mathrm{CP}_v}}_{\mathrm{const}}\,\varepsilon = R\varepsilon \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} &ma_\mathrm{C} = mg\sin\alpha - F_\mathrm{T} \\ &\frac{mR^2}{2}\frac{a_\mathrm{C}}{R} = F_\mathrm{T}R \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} &ma_\mathrm{C} = mg\sin\alpha - F_\mathrm{T} \\ &\frac{m}{2}a_\mathrm{C} = F_\mathrm{T} \end{aligned}\right\}$$

$$\frac{3}{2}ma_\mathrm{C} = mg\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$a_\mathrm{C} = g\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\left.\begin{aligned} a_\mathrm{C} &= g\frac{\sqrt{3}}{3} \\ a_\mathrm{C} &= \frac{dv_\mathrm{C}}{dt} \end{aligned}\right\} \Rightarrow dv_\mathrm{C} = g\frac{\sqrt{3}}{3}dt \Rightarrow \int_0^{v_\mathrm{C}} dv_\mathrm{C} = g\frac{\sqrt{3}}{3}\int_0^t dt \Rightarrow v_\mathrm{C} = g\frac{\sqrt{3}}{3}t$$

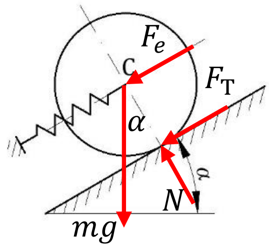
$$\left.\begin{aligned} v_\mathrm{C} &= g\frac{\sqrt{3}}{3}t \\ v_\mathrm{C} &= \frac{ds_\mathrm{C}}{dt} \end{aligned}\right\} \Rightarrow ds_\mathrm{C} = g\frac{\sqrt{3}}{3}tdt \Rightarrow \int_0^{s_\mathrm{C}} ds_\mathrm{C} = \int_0^t g\frac{\sqrt{3}}{3}tdt \Rightarrow s_\mathrm{C} = g\frac{\sqrt{3}}{6}t^2$$

$$\left.\begin{aligned} s_\mathrm{C} &= g\frac{\sqrt{3}}{6}t^2 \\ s_{\mathrm{C}_2} &= 4{,}35 \end{aligned}\right\} \Rightarrow 4{,}35 = g\frac{\sqrt{3}}{6}t_2^2 \Rightarrow t_2 = \sqrt{\frac{4{,}35\cdot 6}{g\sqrt{3}}} = 1{,}24\ \mathrm{s}$$

Укупно вријеме је

$$\boldsymbol{t^\# + t_2} = 1{,}41\ \mathrm{s} + 1{,}24\ \mathrm{s} = \mathbf{2{,}65\ s}$$

Други дио



$$v_C = \underbrace{\overline{CP_v}}_{\text{const}}\,\omega = R\omega \Rightarrow \omega = \frac{v_C}{R}$$

$$E_k = \frac{mv_C^2}{2} + \frac{I_C\omega^2}{2} = \frac{mv_C^2}{2} + \frac{\frac{mR^2}{2}\frac{v_C^2}{R^2}}{2} = \frac{mv_C^2}{2} + \frac{mv_C^2}{4} = \frac{3}{4}mv_C^2$$

$$\underbrace{E_{k_1}}_{0} - E_{k_0} = A_{01}^{mg} + A_{01}^{F_e} + \underbrace{A_{01}^{N}}_{0} + \underbrace{A_{01}^{F_T}}_{0}$$

$$-\frac{3}{4}mv_{C_0}^2 = -mgs_{C_1}\sin\alpha + \frac{1}{2}c\left(\underbrace{\Delta_0^2}_{0} - \Delta_1^2\right)$$

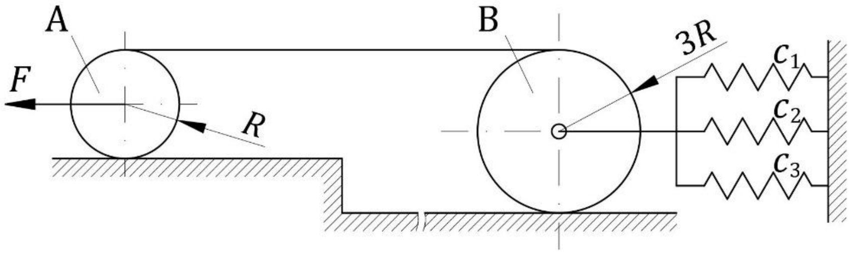
$$-\frac{3}{4}mv_{C_0}^2 = -mgs_{C_1}\sin\alpha - \frac{1}{2}cs_{C_1}^2$$

$$c = \frac{\frac{3}{2}mv_{C_0}^2 - 2mgs_{C_1}\sin\alpha}{s_{C_1}^2}$$

$$\boldsymbol{c} = \frac{\frac{3}{2}\cdot 4\cdot 8^2 - 2\cdot 4\cdot 9{,}81\cdot 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}{2^2} = \mathbf{62{,}02\ \frac{N}{m}}$$

ДРУГИ ЗАДАТАК (МАШИНСТВО)

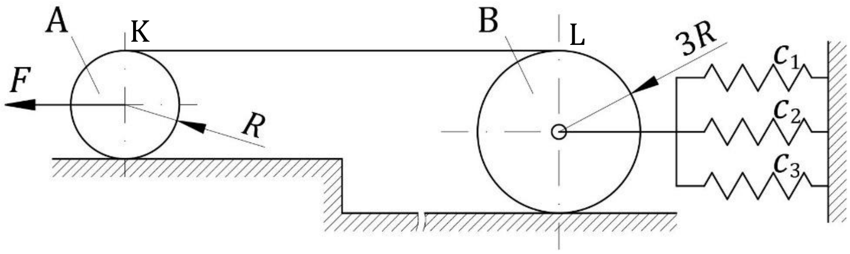
Систем приказан на слици састоји се из два хомогена кружна диска маса $m_\mathrm{A} = 4$ kg и $m_\mathrm{B} = 5$ kg који се по крутој подлози котрљају без клизања. Средиште диска A вуче се хоризонталном силом F чији се интензитет мијења према закону $F = 3s_\mathrm{B}^2$ [N], гдје је s_B [m] пут који пређе тијело B у односу на почетни положај у коме је његова угаона брзина износила 1 rad/s у позитивном математичком смјеру. За средиште диска B везан је систем аксијалних опруга крутости $2c_1 = c_2 = 3c_3 = 60$ N/m које су у почетном положају биле ненапрегнуте. Полупречник диска B је 75 cm, а дужина неистегљивог ужета којим су дискови везани 5 m. Одредити угаону брзину диска A након што пређе пут од 0,1 m.



$$2c_1 = c_2 = 3c_3 = 60\ \mathrm{N/m} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = 30\ \mathrm{N/m} \\ c_2 = 60\ \mathrm{N/m} \\ c_3 = 20\ \mathrm{N/m} \end{cases}$$

$$c_e = c_1 + c_2 + c_3 = 110\ \mathrm{N/m}$$

$$3R = 75\ \mathrm{cm} \Rightarrow R = 25\ \mathrm{cm} = 0{,}25\ \mathrm{m}$$



$$v_\mathrm{A} = R\omega_\mathrm{A}, \qquad v_\mathrm{K} = 2R\omega_\mathrm{A}, \qquad \left.\begin{matrix} v_\mathrm{L} = v_\mathrm{K} \\ v_\mathrm{K} = 2R\omega_\mathrm{A} \\ v_\mathrm{L} = 6R\omega_\mathrm{B} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \omega_\mathrm{B} = \frac{\omega_\mathrm{A}}{3}, \qquad v_\mathrm{B} = 3R\omega_\mathrm{B} = 3R\frac{\omega_\mathrm{A}}{3} = R\omega_\mathrm{A}$$

$$\left.\begin{matrix} \omega_\mathrm{B} = \dfrac{\omega_\mathrm{A}}{3} \\ \omega_{\mathrm{B}_0} = 1\ \mathrm{rad/s} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \omega_{\mathrm{A}_0} = 3\ \mathrm{rad/s}$$

$$\left.\begin{matrix} v_\mathrm{A} = R\omega_\mathrm{A} \\ v_\mathrm{B} = R\omega_\mathrm{A} \end{matrix}\right\} \Rightarrow v_\mathrm{A} = v_\mathrm{B} \Rightarrow s_\mathrm{A} = s_\mathrm{B}$$

$$E_k = \frac{m_{\mathrm{A}} v_{\mathrm{A}}^2}{2} + \frac{I_{\mathrm{A}} \omega_{\mathrm{A}}^2}{2} + \frac{m_{\mathrm{B}} v_{\mathrm{B}}^2}{2} + \frac{I_{\mathrm{B}} \omega_{\mathrm{B}}^2}{2}$$

$$E_k = \frac{m_{\mathrm{A}} (R\omega_{\mathrm{A}})^2}{2} + \frac{\frac{m_{\mathrm{A}} R^2}{2} \omega_{\mathrm{A}}^2}{2} + \frac{m_{\mathrm{B}} (R\omega_{\mathrm{A}})^2}{2} + \frac{\frac{m_{\mathrm{B}} (3R)^2}{2} \left(\frac{\omega_{\mathrm{A}}}{3}\right)^2}{2}$$

$$E_k = \frac{4R^2 \omega_{\mathrm{A}}^2}{2} + \frac{\frac{4R^2}{2} \omega_{\mathrm{A}}^2}{2} + \frac{5R^2 \omega_{\mathrm{A}}^2}{2} + \frac{\frac{45R^2}{2} \frac{\omega_{\mathrm{A}}^2}{9}}{2} = 6{,}75 R^2 \omega_{\mathrm{A}}^2$$

$$A_{01}^{F} = \int \vec{F} \cdot d\overrightarrow{s_{\mathrm{A}}} = \int F ds_{\mathrm{A}} = \int 3 s_{\mathrm{B}}^2 ds_{\mathrm{A}} = \int_0^{0{,}1} 3 s_{\mathrm{A}}^2 ds_{\mathrm{A}} = 0{,}1^3 = 0{,}001$$

$$A_{01}^{F_e} = \frac{1}{2} c_e (\Delta_0^2 - \Delta_1^2) = -\frac{1}{2} c_e {s_{\mathrm{B}}}_1^2 = -\frac{1}{2} c_e {s_{\mathrm{A}}}_1^2 = -\frac{1}{2} \cdot 110 \cdot 0{,}1^2 = -0{,}55$$

$$E_{k_1} - E_{k_0} = A_{01}^{F} + A_{01}^{F_e}$$

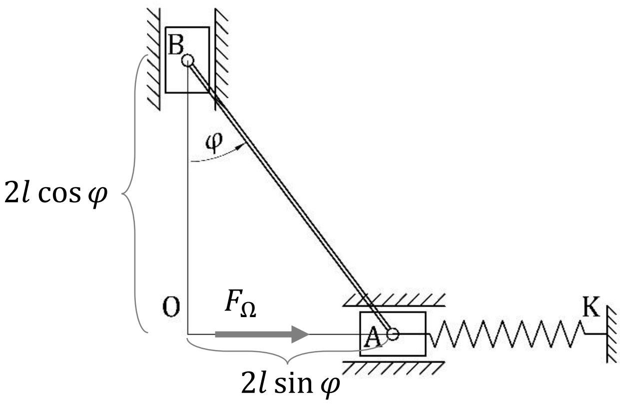
$$6{,}75 R^2 {\omega_{\mathrm{A}}}_1^2 - 6{,}75 R^2 {\omega_{\mathrm{A}}}_0^2 = 0{,}001 - 0{,}55$$

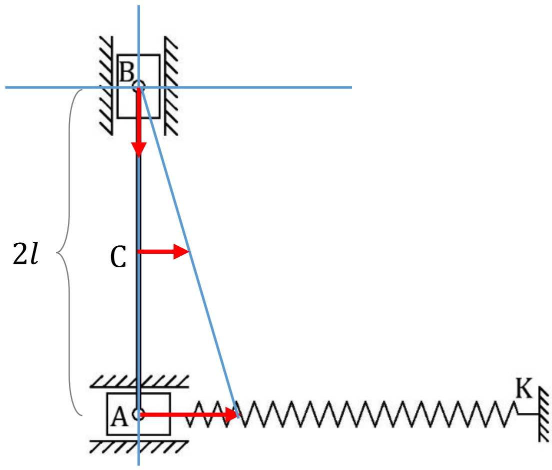
$$\omega_{\mathrm{A}_1} = \sqrt{\frac{6{,}75 R^2 {\omega_{\mathrm{A}}}_0^2 + 0{,}001 - 0{,}55}{6{,}75 R^2}}$$

$$\boldsymbol{\omega_{\mathrm{A}_1}} = \sqrt{\frac{6{,}75 \cdot 0{,}25^2 \cdot 3^2 + 0{,}001 - 0{,}55}{6{,}75 \cdot 0{,}25^2}} = \mathbf{2{,}77\ rad/s}$$

ДРУГИ ЗАДАТАК (МЕХАТРОНИКА)

Хомогени штап AB масе 3 kg и дужине $2l = 1$ m носи на крајевима клизаче A и B маса по 4 kg који клизе у вертикалној равни по глатким узајамно управним вођицама. За клизач A везана је опруга крутости 500 N/m, чија је ненапрегнута дужина $\overline{\mathrm{OK}}$. На почетку кретања се клизачу A саопштава брзина од 0,5 m/s удесно из равнотежног положаја. На клизач A дјелује принудна сила $F_\Omega = F_0 \sin(\Omega t)$, гдје је $F_0 = 10$ N, а $\Omega = 12\ \mathrm{s}^{-1}$. Одредити положај и брзину система након 5 s од почетка кретања.





Одређујемо кинетичку енергију при проласку система кроз равнотежни положај $\varphi = 0$. Штап врши равно кретање. Његова угаона брзина је $\dot{\varphi}$.

$$v_{\mathrm{B}} = \overline{\mathrm{BP}_v}\dot{\varphi} = 0, \qquad v_{\mathrm{C}} = \overline{\mathrm{CP}_v}\dot{\varphi} = l\dot{\varphi}, \qquad v_{\mathrm{A}} = \overline{\mathrm{AP}_v}\dot{\varphi} = 2l\dot{\varphi}$$

$$v_{\mathrm{A}_0} = 0{,}5\ \mathrm{m/s} \Rightarrow \boxed{\dot{\varphi}_0 = \frac{0{,}5}{2l} = 0{,}5\ \mathrm{s}^{-1}}, \qquad \boxed{\varphi_0 = 0}$$

$$I_{\mathrm{AB_C}} = \frac{m_{\mathrm{AB}}(2l)^2}{12} = \frac{3 \cdot 4l^2}{12} = l^2$$

$$E_k = \frac{m_{\mathrm{B}} v_{\mathrm{B}}^2}{2} + \frac{m_{\mathrm{A}} v_{\mathrm{A}}^2}{2} + \frac{m_{\mathrm{AB}} v_{\mathrm{C}}^2}{2} + \frac{I_{\mathrm{AB_C}} \dot{\varphi}^2}{2}$$

$$E_k \approx 0 + \frac{4 \cdot 4l^2\dot{\varphi}^2}{2} + \frac{3 \cdot l^2\dot{\varphi}^2}{2} + \frac{l^2\dot{\varphi}^2}{2} = \frac{1}{2}(16 + 3 + 1)l^2\dot{\varphi}^2 = \frac{1}{2}20l^2\dot{\varphi}^2$$

$$\boxed{a_{11} = 20l^2 = 5}$$

$$E_p = -m_{\mathrm{B}}g(2l - 2l\cos\varphi) - m_{\mathrm{AB}}g(l - l\cos\varphi) + \frac{1}{2}c(2l\sin\varphi)^2$$

$$E_p \approx -m_{\mathrm{B}}g2l\frac{\varphi^2}{2} - m_{\mathrm{AB}}gl\frac{\varphi^2}{2} + \frac{1}{2}c4l^2\varphi^2$$

$$E_p \approx -4g2l\frac{\varphi^2}{2} - 3gl\frac{\varphi^2}{2} + \frac{1}{2}c4l^2\varphi^2 = \frac{1}{2}(4cl^2 - 11gl)\varphi^2$$

$$\boxed{c_{11} = 4cl^2 - 11gl = 4 \cdot 500 \cdot 0{,}5^2 - 11 \cdot 9{,}81 \cdot 0{,}5 = 446{,}045}$$

$$\delta A^* = \overrightarrow{F_\Omega} \cdot \delta\overrightarrow{x_{\mathrm{A}}} = F_\Omega \delta x_{\mathrm{A}} = F_\Omega 2l\sin\delta\varphi \approx F_\Omega 2l\delta\varphi = F_0\sin(\Omega t)\,2l\delta\varphi$$

$$\boxed{Q_0 = 2F_0 l = 10}$$

$$\boxed{h = \frac{Q_0}{a_{11}} = \frac{10}{5} = 2}$$

$$\varphi = \varphi_h + \varphi_p$$

$$\varphi_h = A\sin(\omega t + \alpha)\,, \qquad \varphi_p = P\sin(\Omega t - \gamma)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{c_{11}}{a_{11}}} = \sqrt{\frac{446{,}045}{5}} = 9{,}445$$

$$P = \frac{h}{|\omega^2 - \Omega^2|} = \frac{2}{|9{,}445^2 - 12^2|} = 0{,}0365$$

$$n = 0 \Rightarrow \operatorname{tg}\gamma = 0 \Rightarrow \gamma = 0$$

Општа једначина

$$\boxed{\varphi = A\sin(9{,}445t + \alpha) + 0{,}0365\sin(12t)}$$

$$\dot{\varphi} = 9{,}445A\cos(9{,}445t + \alpha) + 0{,}438\cos(12t)$$

Почетни услови

$$0 = A\sin\alpha$$

$$0{,}5 = 9{,}445A\cos\alpha + 0{,}438$$

Амплитуда не може бити једнака нули, па из прве једначине слиједи

$$\sin\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 0$$

Из друге релације се добија

$$0{,}5 = 9{,}445A + 0{,}438 \Rightarrow A = \frac{0{,}5 - 0{,}438}{9{,}445} = 0{,}00656$$

Коначна једначина

$$\boxed{\varphi = 0{,}00656\sin(9{,}445t) + 0{,}0365\sin(12t)}$$

$$\dot{\varphi} = 0{,}062\cos(9{,}445t) + 0{,}438\cos(12t)$$

$$\boldsymbol{\varphi_5} = 0{,}00656 \sin(9{,}445 \cdot 5) + 0{,}0365 \sin(12 \cdot 5) = \mathbf{-0{,}0118\ rad}$$

$$\dot{\boldsymbol{\varphi}}_{\mathbf{5}} = 0{,}062 \cos(9{,}445 \cdot 5) + 0{,}438 \cos(12 \cdot 5) = \mathbf{-0{,}4788\ \ rad/s}$$