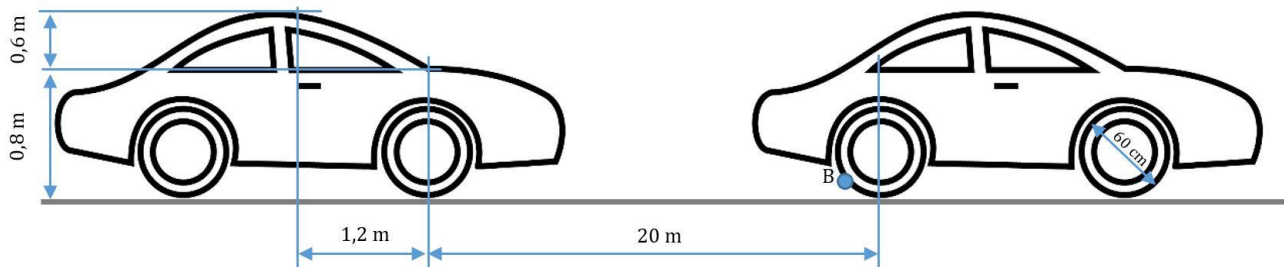
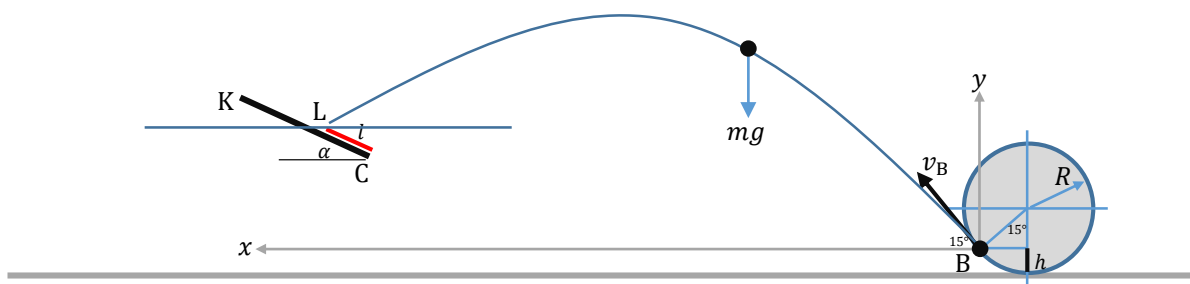


Са точка аутомобила је излетио каменчић масе 20 g из положаја В брзином од 18 m/s, под нагибом од 75° у односу на вертикалу. Одредити тачку на шофершајбни аутомобила, који се иза њега креће константном брзином од 50 km/h, у који ће каменчић ударити.



И начин



$$h = R - R \cos 15^\circ = R(1 - \cos 15^\circ)$$

КАМЕНЧИЋ

$$m\vec{a} = \vec{F} \Rightarrow \begin{cases} ma_x = 0 \\ ma_y = -mg \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} a_x = 0 \\ a_x = \frac{dv_x}{dt} \end{array} \right\} \Rightarrow dv_x = 0 dt \Rightarrow \int_{v_B \cos 15^\circ}^{v_x} dv_x = 0 \int_0^t dt \Rightarrow v_x = v_B \cos 15^\circ$$

$$\left. \begin{array}{l} v_x = v_B \cos 15^\circ \\ v_x = \frac{dx}{dt} \end{array} \right\} \Rightarrow \int_0^x dx = v_B \cos 15^\circ \int_0^t dt \Rightarrow \boxed{x = v_B \cos 15^\circ t}$$

$$\left. \begin{array}{l} a_y = -g \\ a_y = \frac{dv_y}{dt} \end{array} \right\} \Rightarrow dv_y = -g dt \Rightarrow \int_{v_B \sin 15^\circ}^{v_y} dv_y = -g \int_0^t dt \Rightarrow v_y = v_B \sin 15^\circ - gt$$

$$\left. \begin{array}{l} v_y = v_B \sin 15^\circ - gt \\ v_y = \frac{dy}{dt} \end{array} \right\} \Rightarrow \int_0^y dy = \int_0^t (v_B \sin 15^\circ - gt) dt \Rightarrow \boxed{y = v_B \sin 15^\circ t - g \frac{t^2}{2}}$$

ШОФЕРШАЈБНА

Координате подножја шофершајбне С на почетку кретања су:

$$\begin{aligned}x_{C_0} &= 20 - R \sin 15^\circ \\y_{C_0} &= 0,8 - h\end{aligned}$$

Шофершајбна се заједно са аутомобилом креће равномјерно брзином од 50 km/h, односно 50/3,6 m/s, у правцу осе x , али у негативном смјеру. Према томе, једначине кретања тачке С су:

$$\begin{aligned}x_C &= x_{C_0} - \frac{50}{3,6}t = 20 - R \sin 15^\circ - \frac{50}{3,6}t \\y_C &= \text{const} = y_{C_0} = 0,8 - h\end{aligned}$$

Каменчић пада у тачку L која се у односу на тачку С налази на непознатој удаљености l . Ако је нагиб шофершајбне α , онда се положај тачке L мијења према закону:

$$\begin{aligned}\boxed{x_L} &= x_C + l \cos \alpha = \boxed{20 - R \sin 15^\circ - \frac{50}{3,6}t + l \cos \alpha} \\ \boxed{y_L} &= y_C + l \sin \alpha = \boxed{0,8 - h + l \sin \alpha}\end{aligned}$$

Угао α добијамо на основу коефицијента правца праве која пролази кроз тачке С и К. Са слике из поставке задатка се уочава да је:

$$\text{tg } \alpha = \frac{|y_K - y_C|}{|x_K - x_C|} = \frac{0,6}{1,2} = 0,5 \Rightarrow \alpha = \text{arctg } 0,5$$

ТАЧКА УДАРА

У тренутку удара t^* поклапају се координата тачке L на праволинијској путањи шофершајбне и координата тачке L на путањи каменчића. Дакле:

$$v_B \cos 15^\circ t^* = 20 - R \sin 15^\circ - \frac{50}{3,6}t^* + l \cos \alpha \dots (1)$$

$$v_B \sin 15^\circ t^* - g \frac{t^{*2}}{2} = 0,8 - h + l \sin \alpha \dots (2)$$

У претходном систему једначина двије су непознате. То су временски тренутак удара t^* и тражена положај удара означен дужином l .

$$(1) \Rightarrow \left(v_B \cos 15^\circ + \frac{50}{3,6} \right) t^* = 20 - R \sin 15^\circ + l \cos \alpha$$

$$l = \frac{\left(v_B \cos 15^\circ + \frac{50}{3,6} \right) t^* - 20 + R \sin 15^\circ}{\cos \alpha}$$

$$(2) \Rightarrow v_B \sin 15^\circ t^* - g \frac{t^{*2}}{2} = 0,8 - h + \left[\left(v_B \cos 15^\circ + \frac{50}{3,6} \right) t^* - 20 + R \sin 15^\circ \right] \operatorname{tg} \alpha$$

$$v_B \sin 15^\circ t^* - g \frac{t^{*2}}{2} = 0,8 - h + \left(v_B \cos 15^\circ \operatorname{tg} \alpha + \frac{50}{3,6} \operatorname{tg} \alpha \right) t^* - 20 \operatorname{tg} \alpha + R \sin 15^\circ \operatorname{tg} \alpha$$

$$\frac{g}{2} t^{*2} + \left[v_B (\cos 15^\circ \operatorname{tg} \alpha - \sin 15^\circ) + \frac{50}{3,6} \operatorname{tg} \alpha \right] t^* + 0,8 - h + (R \sin 15^\circ - 20) \operatorname{tg} \alpha = 0$$

$$4,905 t^{*2} + 10,979 t^* - 9,171 = 0$$

$$t_{1/2}^* = \frac{-10,979 \pm \sqrt{10,979^2 + 4 \cdot 4,905 \cdot 9,171}}{9,81} = \begin{cases} t_1^* = -2,886 \\ t_2^* = \mathbf{0,6478} \end{cases}$$

Враћамо се у релацију од малочас да нађемо дужину l :

$$l = \frac{\left(v_B \cos 15^\circ + \frac{50}{3,6} \right) t^* - 20 + R \sin 15^\circ}{\cos \alpha} = \frac{\left(18 \cos 15^\circ + \frac{50}{3,6} \right) \cdot 0,6478 - 20 + 0,3 \sin 15^\circ}{\cos \operatorname{arctg} 0,5}$$

$$\mathbf{l = 0,379 \text{ m}}$$

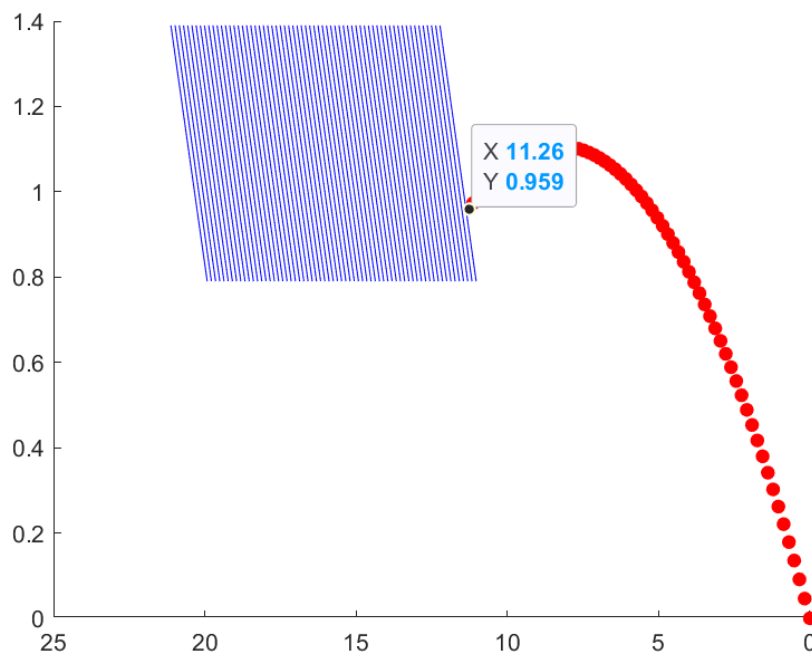
Могу се наћи и координате тачке L у тренутку удара:

$$x_L^* = 20 - R \sin 15^\circ - \frac{50}{3,6} t^* + l \cos \alpha$$

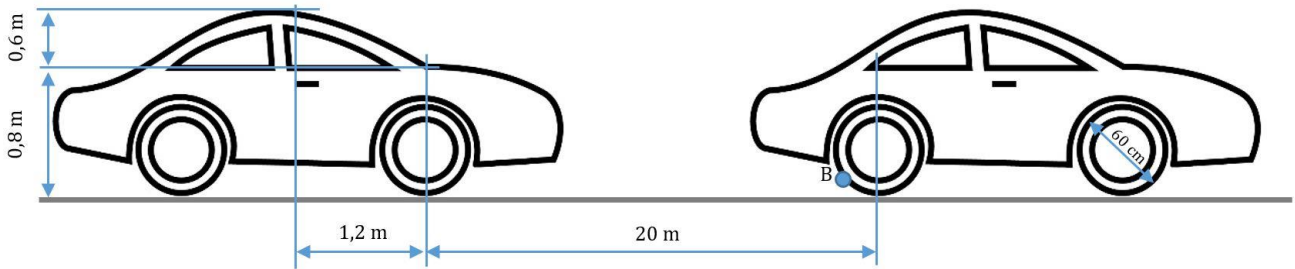
$$y_L^* = 0,8 - h + l \sin \alpha = 0,8 - R(1 - \cos 15^\circ) + l \sin \alpha$$

$$x_L^* = 20 - 0,3 \sin 15^\circ - \frac{50}{3,6} 0,6478 + 0,379 \cos \operatorname{arctg} 0,5 = 11,26$$

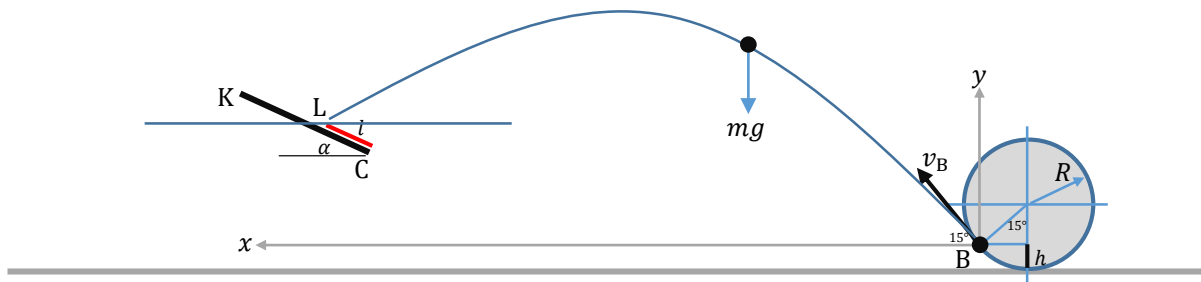
$$y_L^* = 0,8 - 0,3(1 - \cos 15^\circ) + 0,379 \sin \operatorname{arctg} 0,5 = 0,959$$



Са тачка аутомобила је излетио каменчић масе 20 g из положаја В брзином од 18 m/s, под нагибом од 75° у односу на вертикалу. Одредити тачку на шофершајбни аутомобила, који се иза њега креће константном брзином од 50 km/h, у који ће каменчић ударити.



II начин



Шофершајбна се заједно са аутомобилом креће равномерно брзином од 50 km/h, односно 50/3,6 m/s, у правцу осе x . Посматраћемо шофершајбну као тијело које мирује, а каменчићу ћемо брзину увећати за брзину шофершајбне. У таквој ситуацији линија која се поклапа са шофершајбном „мирује“ и њена једначина је облика:

$$\frac{y - y_{C_0}}{x - x_{C_0}} = \frac{y_{K_0} - y_{C_0}}{x_{K_0} - x_{C_0}} \Rightarrow \frac{y - 0,8 + h}{x - 20 + R \sin 15^\circ} = \frac{0,6}{1,2} \Rightarrow y = 0,5x - 10 + 0,5R \sin 15^\circ + 0,8 - h$$

$$y = 0,5x - 9,2 + 0,5R \sin 15^\circ - h$$

Тачка удара L налази се у пресеку претходне линије и параболе којом се креће каменчић, а коју тек треба одредити.

КАМЕНЧИЋ

$$m\vec{a} = \vec{F} \Rightarrow \begin{cases} ma_x = 0 \\ ma_y = -mg \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} a_x = 0 \\ a_x = \frac{dv_x}{dt} \end{array} \right\} \Rightarrow dv_x = 0dt \Rightarrow \int_{v_B \cos 15^\circ + 50/3,6}^{v_x} dv_x = 0 \int_0^t dt \Rightarrow v_x = v_B \cos 15^\circ + \frac{50}{3,6}$$

$$\left. \begin{array}{l} v_x = v_B \cos 15^\circ + \frac{50}{3,6} \\ v_x = \frac{dx}{dt} \end{array} \right\} \Rightarrow \int_0^x dx = \left(v_B \cos 15^\circ + \frac{50}{3,6} \right) \int_0^t dt \Rightarrow x = \left(v_B \cos 15^\circ + \frac{50}{3,6} \right) t$$

$$\left. \begin{aligned} a_y = -g \\ a_y = \frac{dv_y}{dt} \end{aligned} \right\} \Rightarrow dv_y = -g dt \Rightarrow \int_{v_B \sin 15^\circ}^{v_y} dv_y = -g \int_0^t dt \Rightarrow v_y = v_B \sin 15^\circ - gt$$

$$\left. \begin{aligned} v_y = v_B \sin 15^\circ - gt \\ v_y = \frac{dy}{dt} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \int_0^y dy = \int_0^t (v_B \sin 15^\circ - gt) dt \Rightarrow y = v_B \sin 15^\circ t - g \frac{t^2}{2}$$

$$\left. \begin{aligned} x = \left(v_B \cos 15^\circ + \frac{50}{3,6} \right) t \\ y = v_B \sin 15^\circ t - g \frac{t^2}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} t = \frac{x}{v_B \cos 15^\circ + \frac{50}{3,6}} \\ y = \frac{v_B \sin 15^\circ x}{v_B \cos 15^\circ + \frac{50}{3,6}} - \frac{g x^2}{2 \left(v_B \cos 15^\circ + \frac{50}{3,6} \right)^2} \end{aligned} \right\}$$

Пресјечна тачка:

$$0,5x_L - 9,2 + 0,5R \sin 15^\circ - h = \frac{v_B \sin 15^\circ x_L}{v_B \cos 15^\circ + \frac{50}{3,6}} - \frac{g x_L^2}{2 \left(v_B \cos 15^\circ + \frac{50}{3,6} \right)^2}$$

$$\frac{g}{2 \left(v_B \cos 15^\circ + \frac{50}{3,6} \right)^2} x_L^2 + \left(0,5 - \frac{v_B \sin 15^\circ}{v_B \cos 15^\circ + \frac{50}{3,6}} \right) x_L - 9,2 + 0,5R \sin 15^\circ - h = 0$$

$$\left. \begin{aligned} x_{L1} = -90,267 \\ x_{L2} = 20,2618 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} x_L = 20,26 \text{ m} \\ y_L = 0,959 \text{ m} \end{aligned} \right\}$$

Са слике се уочава да је дужина l једнака интензитету вектора \overline{CL} .

$$\overline{CL} = \begin{bmatrix} x_L \\ y_L \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_C \\ y_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_L - x_C \\ y_L - y_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20,26 - (20 - R \sin 15^\circ) \\ 0,959 - (0,8 - h) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,3394 \\ 0,1697 \end{bmatrix} \Rightarrow \boxed{l = 0,379 \text{ m}}$$

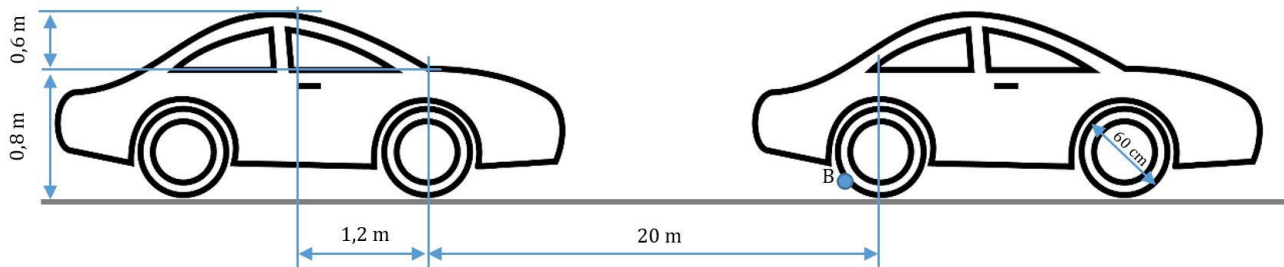
Вриједност за положај тачке L у правцу осе x (x_L) није стварна, јер је добијена за измијењени модел. Међутим, на основу ње се може одредити стварна вриједност. Прво ћемо за измијењени модел одредити вријеме које протекне док не дође до удара каменчића о шофершајбну, а затим исто уврстити у коначне једначине кретања каменчића добијене за неизмијењени модел.

$$\left. \begin{aligned} x_L = 20,26 \text{ m} \\ t = \frac{x}{v_B \cos 15^\circ + \frac{50}{3,6}} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \boxed{t_L} = \frac{x_L}{v_B \cos 15^\circ + \frac{50}{3,6}} = \boxed{0,6478 \text{ s}}$$

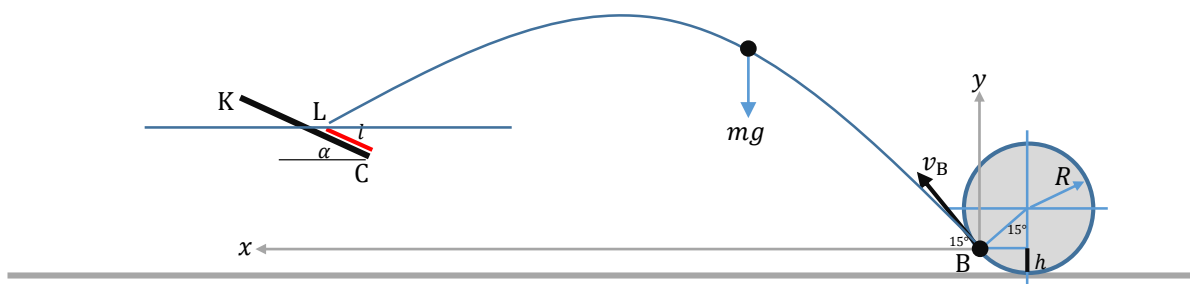
Коначне једначине кретања каменчића за неизмијењени модел:

$$\left. \begin{aligned} x = v_B \cos 15^\circ t \\ y = v_B \sin 15^\circ t - g \frac{t^2}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} x_L = v_B \cos 15^\circ t_L \\ y_L = v_B \sin 15^\circ t_L - g \frac{t_L^2}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} x_L = 11,26 \text{ m} \\ y_L = 0,959 \text{ m} \end{aligned} \right\}$$

Са точка аутомобила је излетио каменчић масе 20 g из положаја В брзином од 18 m/s, под нагибом од 75° у односу на вертикалу. Одредити тачку на шофершајбни аутомобила, који се иза њега креће константном брзином од 50 km/h, у који ће каменчић ударити.



III начин



КАМЕНЧИЋ

$$m\vec{a} = \vec{F} \Rightarrow \begin{cases} ma_x = 0 \\ ma_y = -mg \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} a_x = 0 \\ a_x = \frac{dv_x}{dt} \end{array} \right\} \Rightarrow dv_x = 0dt \Rightarrow \int_{v_B \cos 15^\circ}^{v_x} dv_x = 0 \int_0^t dt \Rightarrow v_x = v_B \cos 15^\circ$$

$$\left. \begin{array}{l} v_x = v_B \cos 15^\circ \\ v_x = \frac{dx}{dt} \end{array} \right\} \Rightarrow \int_0^x dx = v_B \cos 15^\circ \int_0^t dt \Rightarrow \boxed{x = v_B \cos 15^\circ t}$$

$$\left. \begin{array}{l} a_y = -g \\ a_y = \frac{dv_y}{dt} \end{array} \right\} \Rightarrow dv_y = -gdt \Rightarrow \int_{v_B \sin 15^\circ}^{v_y} dv_y = -g \int_0^t dt \Rightarrow v_y = v_B \sin 15^\circ - gt$$

$$\left. \begin{array}{l} v_y = v_B \sin 15^\circ - gt \\ v_y = \frac{dy}{dt} \end{array} \right\} \Rightarrow \int_0^y dy = \int_0^t (v_B \sin 15^\circ - gt) dt \Rightarrow \boxed{y = v_B \sin 15^\circ t - g \frac{t^2}{2}}$$

ШОФЕРШАЈБНА

Координате подножја шофершајбне С на почетку кретања су:

$$\begin{aligned}x_{C_0} &= 20 - R \sin 15^\circ \\y_{C_0} &= 0,8 - h\end{aligned}$$

Шофершајбна се заједно са аутомобилом креће равномерно брзином од 50 km/h, односно 50/3,6 m/s, у правцу осе x , али у негативном смјеру. Према томе, једначине кретања тачке С су:

$$\begin{aligned}x_C &= x_{C_0} - \frac{50}{3,6}t = 20 - R \sin 15^\circ - \frac{50}{3,6}t \\y_C &= \text{const} = y_{C_0} = 0,8 - h\end{aligned}$$

Једначина линије која пролази кроз шофершајбну је:

$$\frac{y - y_C}{x - x_C} = \frac{y_K - y_C}{x_K - x_C} = 0,5 \Rightarrow y - y_C = 0,5(x - x_C)$$

$$y = y_C + 0,5(x - x_C) \Rightarrow y = 0,8 - h + 0,5\left(x - 20 + R \sin 15^\circ + \frac{50}{3,6}t\right)$$

$$\boxed{y = -h - 9,2 + 0,5R \sin 15^\circ + 0,5x + \frac{25}{3,6}t}$$

У тренутку удара каменчић заузима неки положај на претходној линији.

$$\left. \begin{aligned}y &= -h - 9,2 + 0,5R \sin 15^\circ + 0,5x + \frac{25}{3,6}t \\x &= v_B \cos 15^\circ t \\y &= v_B \sin 15^\circ t - g \frac{t^2}{2}\end{aligned} \right\}$$

$$v_B \sin 15^\circ t^* - g \frac{t^{*2}}{2} = -h - 9,2 + 0,5R \sin 15^\circ + 0,5v_B \cos 15^\circ t^* + \frac{25}{3,6}t^*$$

$$\frac{g}{2}t^{*2} + \left(0,5v_B \cos 15^\circ + \frac{25}{3,6} - v_B \sin 15^\circ\right)t^* - h - 9,2 + 0,5R \sin 15^\circ = 0$$

$$\left. \begin{aligned}t_1^* &= -2,886 \\t_2^* &= 0,6478\end{aligned} \right\}$$

Уврштавањем претходно добијеног резултата за вријеме у једначине кретања каменчића добија се његов положај у тренутку удара.

$$\left. \begin{aligned}x &= v_B \cos 15^\circ t \\y &= v_B \sin 15^\circ t - g \frac{t^2}{2}\end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned}x^* &= v_B \cos 15^\circ t^* \\y^* &= v_B \sin 15^\circ t^* - g \frac{t^{*2}}{2}\end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned}x^* &= 11,26 \text{ m} \\y^* &= 0,959 \text{ m}\end{aligned} \right\}$$