Dinamika: I i II sednica nastave

Literatura:

1) Pisana predavanja;
2) Z. Mitrović, Z. Golubović, M. Simonović, Dinamika tačke, Mašinski fakultet u Beogradu, 2011.
3) M. Pavišić, Z. Golubović, Z. Mitrović, Dinamika sistema, Mašinski fakultet u Beogradu, 2011.
4) S. M. Targ, Kratki kurs teorijske mehanike, Beograd, 1996.
5) J. Vuković, M. Simonović, A. Obradović, S. Marković, Zbirka zadataka iz dinamike, Maš. fak. Beograd, 2010.

Uvod u dinamiku. Osnovni zakoni.

0.1. Predmet dinamike

Dinamika je dio mehanike koji proučava mehanička kretanja materijalnih tijela povezujući ih sa njihovim uzrocima.

Kretanje je promjena položaja tijela u prostoru tokom vremena.

Geometrijske karakteristike kretanja razmatrane su u kinematici. Dinamika, za razliku od kinematike, uspostavlja zakone kretanja uzimajući u obzir materijalnost tijela (mase) i sile kao uzroke kretanja.

Masa je veličina koja zavisi od količine materije tijela i koja određuje njegovu inertnost, tj. svojstvo materijalnog tijela da se protivi promjeni stanja svog kretanja. Po svojoj prirodi, masa je skalarna pozitivna veličina.

Sila je veličina koja predstavlja količinsku mjeru uzajamnog dejstva između materijalnih tijela. Ona je, kao što je poznato iz statike, vektorska veličina.

U dinamici se rješavaju dvije vrste zadataka:

1) Prvi – direktni – zadatak: poznata su kretanja, a treba odrediti sile koje uzrokuju ta kretanja;

2) Drugi – inverzni ili osnovni – zadatak: poznate su sile, a treba odrediti kakva kretanja uzrokuju.

Kretanja materijalnih objekata proučavaju se pomoću modela realnih fizičkih tijela: materijalne tačke, sistema materijalnih tačaka i krutog tijela.

Materijalna tačka je materijalno tijelo čije se dimenzije, pri proučavanju kretanja, mogu zanemariti. Drugim riječima, to je geometrijska tačka koja posjeduje konačnu masu. Ova idealizacija je opravdana kada su pređena rastojanja, koja izvrše tačke tijela, mnogo veća od dimenzija samog tijela. Takođe, translatorno kretanje tijela može se uvijek tretirati kao kretanje materijalne tačke, čija je masa jednaka masi tijela.

Sistem materijalnih tačaka (mehanički sistem) je skup materijalnih tačaka čija su kretanja međuzavisna.

Kruto tijelo je sistem materijalnih tačaka čija rastojanja ostaju nepromjenljiva tokom kretanja.

Kurs dinamike podijeljen je na dva dijela, i to:

1) dinamiku materijalne tačke,

2) dinamiku sistema materijalnih tačaka i krutih tijela.

0.2. Osnovni zakoni dinamike

Dinamika je zasnovana na Njutnovim zakonima, odnosno aksiomama, koji se usvajaju bez dokazivanja, a potvrđeni su mnogovjekovnom praktičnom djelatnošću čovjeka. Formulisao ih je Isak Njutn u svom čuvenom djelu "Matematički osnovi prirodne filozofije" izdatom 1687. godine.

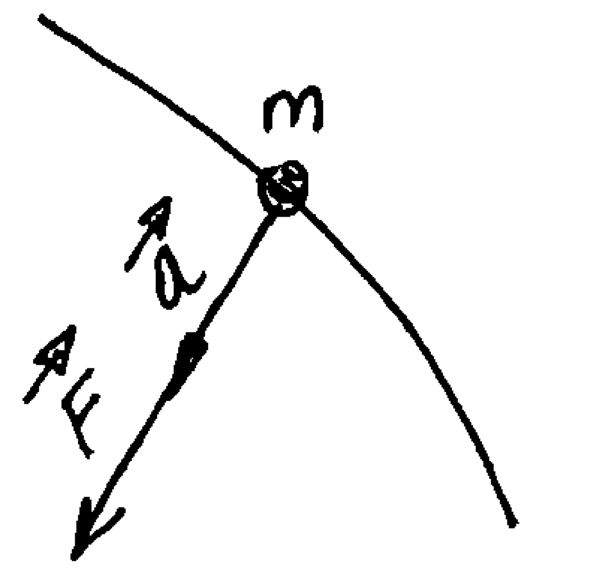
Osnovni zakoni dinamike važe u inercijalnim koordinatnim sistemima. To su koordinatni sistemi koji su nepokretni u odnosu na apsolutni (nepokretni) prostor, čije je postojanje Njutn pretpostavio, ili koji se kreću translatorno, pravolinijski i ravnomjerno. Strogo govoreći, u stvarnosti, takvi sistemi referencije ne postoje, ali se, na osnovu današnjeg stanja opita, sa velikim stepenom tačnosti za inercijalni koordinatni sistem može uzeti ~~sistem~~ sistem čiji je početak u središtu Sunca, dok su mu ose usmjerene ka zvijezdama "nekretnicama". Za većinu tehničkih zadataka, sa praktično zadovoljavajućom tačnošću, može se smatrati da je koordinatni sistem vezan za površinu Zemlje inercijalni.

Prvi Njutnov zakon (zakon inercije): Ako na materijalnu tačku ne djeluju sile to ona zadržava stanje mirovanja ili pravolinijskog jednolikog kretanja.

Ovim zakonom se ukazuje na jedno od osnovnih svojstava materijalne tačke – inertnost (inerciju), tj. težnju da zadrži svoje stanje mirovanja ili jednolikog pravolinijskog kretanja, ako nema nikakvog dejstva sila na nju. Kretanje koje se vrši pri odsustvu sila zove se kretanje po inerciji.

S druge strane, iz ovog zakona proističe da su sile uzrok promjene stanja mirovanja ili jednolikog pravolinijskog kretanja.

Drugi Njutnov zakon (osnovni zakon dinamike): Proizvod mase i ubrzanja materijalne tačke, koje ona dobija kada na nju djeluje sila, jednak je po intezitetu toj sili a pravac i smjer ubrzanja se poklapaju sa pravcem i smjerom sile.



Ako je m – masa tačke, $\vec{a}$ – njeno ubrzanje u inercijalnom sistemu referencije i $\vec{F}$ – sila koja djeluje na tačku, onda se osnovni zakon dinamike izražava vektorskom jednačinom:

$$m\vec{a} = \vec{F}, \qquad (1)$$

pri čemu između inteziteta sile i ubrzanja postoji zavisnost

$$ma = F \qquad (2)$$

Prema drugom Njutnovom zakonu masa je koeficijent proporcionalnosti između sile, koja je uzrok pojave ubrzanja, i dobijenog ubrzanja. Tačka manje mase dobija veće ubrzanje nego tačka veće mase, ako na njih djeluje ista sila. Zato je masa količinska mjera inertnosti materijalne tačke. Relacija (2) pruža mogućnost za određivanje mase mjerenjem. Mjerenje je upoređivanje mase m date tačke i mase m_1 druge tačke uzete za jedinicu (etalon mase). Mjerenjem ubrzanja ovih tačaka saopštenih od iste sile, dobijamo

$$F = ma, \quad F = m_1 a_1,$$

odakle je

$$m = \frac{a_1}{a} m_1.$$

Masa određena na ovaj način zove se inertna masa.

Masa karakteriše ne samo inertna već i gravitaciona svojstva materijalnih tijela. U skladu sa Njutnovim zakonom opšte gravitacije dvije materijalne tačke masa m_1 i m_2 međusobno se privlače silama čiji je intenzitet

$$F = f\,\frac{m_1 m_2}{r^2} \qquad (3)$$

gdje je $f = 6{,}67\cdot 10^{-11}\ kg^{-1}\,m^3 s^{-2}$ univerzalna gravitaciona konstanta i r rastojanje između tačaka.

Neka je m_1 etalonska jedinična masa i m mjerena masa. Tada iz formule (3) za sile privlačenja od strane mase m_2 etalonske i mjerene mase sa istog rastojanja imamo

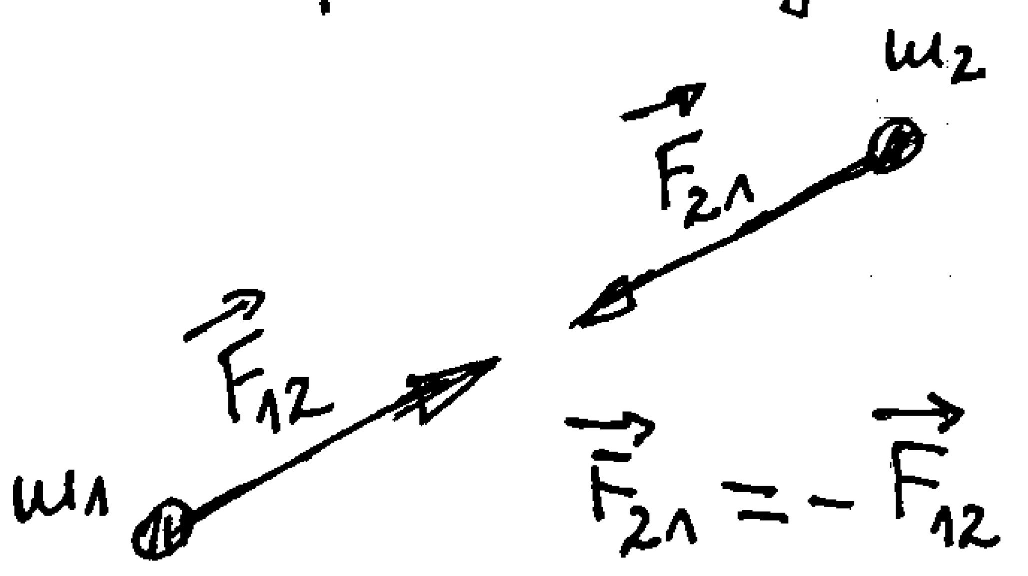
$$F_1 = f\,\frac{m_1 m_2}{r^2}, \quad F = f\,\frac{m\, m_2}{r^2},$$

odakle je

$$m = \frac{F}{F_1}\, m_1$$

Na ovaj način određena masa zove se gravitaciona ili "teška" masa. Precizni eksperimenti su pokazali jednakost inertne i gravitacione mase.

Treći Njutnov zakon (zakon akcije i reakcije): Dvije materijalne tačke djeluju jedna na drugu silama istih intenziteta, usmjerenih duž prave koja spaja te dvije tačke u suprotnim smjerovima.



Kraće, često se ovaj zakon iskazuje riječima: Akciji (dejstvu) uvijek je jednaka reakcija (protivdejstvo). Treći zakon pokazuje realnost sile, tj. izvor sile. Izvor sile je uvijek u nekom materijalnom tijelu; sile se uvijek javljaju u parovima, jedna kao dejstvo i druga – njoj suprotna – kao protivdejstvo.

Dodatak drugom Njutnovom zakonu (zakon o nezavisnosti dejstva sila): Ako na materijalnu tačku istovremeno djeluje više sila, ona dobija ubrzanje jednako geometrijskom zbiru ubrzanja saopštenih od svake sile posebno.

Neka sile $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ saopštavaju materijalnoj tački pri pojedinačnom dejstvu ubrzanja $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$. Na osnovu (1), biće $\vec{a}_i = \frac{\vec{F}_i}{m}$, $(i=1,\dots,n)$, a na osnovu ovog zakona, ubrzanje $\vec{a}$ koje dobija tačka pri istovremenom dejstvu svih sila je

$$\vec{a} = \sum_{i=1}^{n} \vec{a}_i,$$

odnosno, $\vec{a} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i$, ili $m\vec{a} = \sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i$, što pokazuje da je ubrzanje tačke pod dejstvom sistema sila isto kao kada bi na tačku djelovala jedna sila $\vec{F}_r = \sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i$, koja se zove rezultanta datog sistema sila. Na taj način, ovaj zakon predstavlja u suštini samo drugačiju ali ekvivalentnu formulaciju zakona slaganja (superpozicije) sila, tj. pokazuje da se sile sabiraju kao vektori.

0.3. Sistem jedinica

Osnovne mehaničke veličine u međunarodnom sistemu (SI) jedinica su: dužina, vrijeme i masa, a sila je izvedena veličina. U ovom sistemu jedinica za dužinu je metar (m), za vrijeme sekunda (s) i za masu kilogram (kg). Jedinica za silu, izvedena iz navedenih osnovnih jedinica, zove se njutn (N). To je, na osnovu (2), sila koja masi od 1 kg saopštava ubrzanje od $1\,\frac{m}{s^2}$, tj.

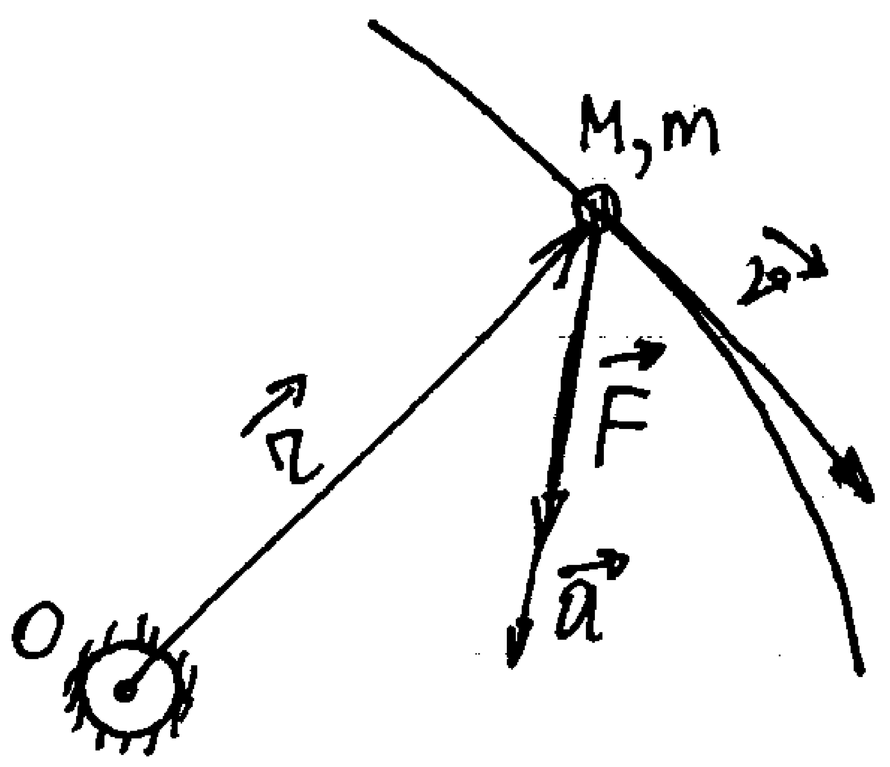
$$1\,N = 1\,kg\,\frac{m}{s^2}$$

Hiljadu puta veća jedinica od njutna je kilonjutn (kN).

I DIO: DINAMIKA MATERIJALNE TAČKE

1. Dinamika slobodne tačke

Materijalna tačka je slobodna ako ona može da zauzme proizvoljan položaj u prostoru i ako u svakom položaju može da ima proizvoljnu brzinu.



Kretanje tačke M, mase m, pod dejstvom sile $\vec{F}$, posmatramo u trodimenzionalnom prostoru. Njen položaj se određuje vektorom položaja $\vec{r}$, povučenim iz neke nepokretne tačke O. Kinematičke karakteristike kretanja date tačke su:

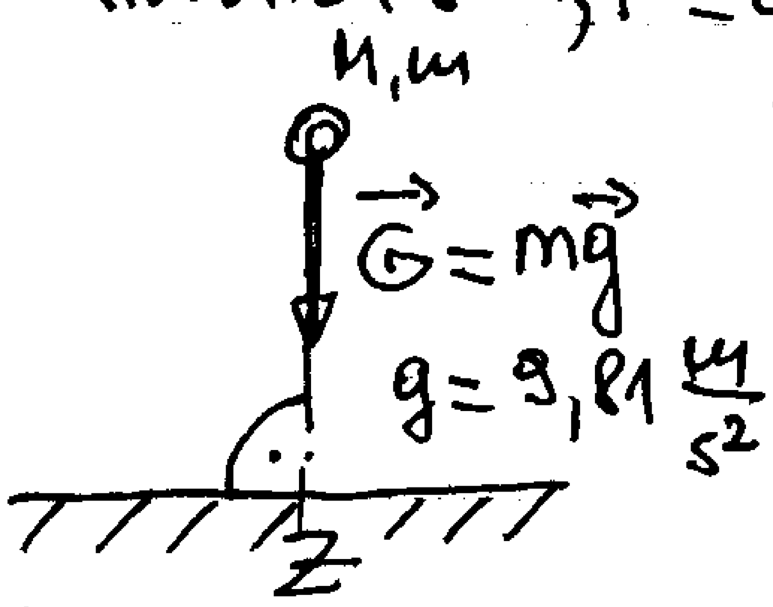
$\vec{r} = \vec{r}(t)$ – jednačina kretanja, t – vrijeme

$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}$ – brzina tačke

$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \ddot{\vec{r}}$ – ubrzanje tačke

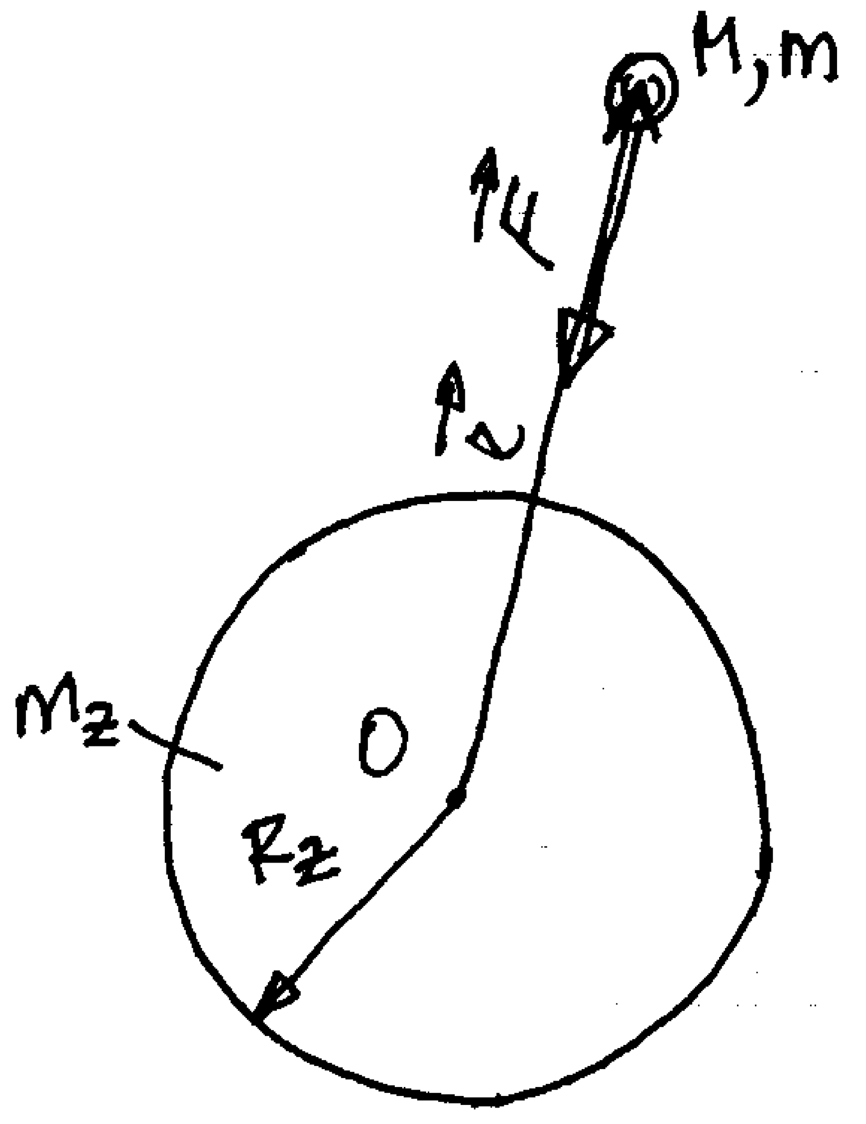
Sila $\vec{F}$, u opštem slučaju, može da bude data kao funkcija vremena, položaja tačke i njene brzine, tj. $\vec{F} = \vec{F}(t, \vec{r}, \vec{v})$. U specijalnim slučajevima sila može biti konstantna ili zavisiti od samo jedne ili samo dvije od veličina navedenih. Dalje navodimo nekoliko primjera.

a) Konstantna sila, $\vec{F} = \overrightarrow{const}$. Ako se tijelo (mat. tačka) nalazi u blizini površine Zemlje (rastojanje od Zemlje malo u odnosu na njen poluprečnik), onda se može smatrati da je sila teže (Zemljina privlačna sila) konstantna. Ona je određena težinom tijela $G = mg$ (g – ubrzanje sile teže ili ubrzanje slobodnog pada), pravcem vertikale i smjerom ka Zemlji.



b) Sila koja zavisi od položaja, $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r})$.

b1) Sila Zemljine teže kao sila opšte gravitacije. Ranije formulisani zakon opšte gravitacije, koji se odnosi na materijalne tačke, zadržava isti oblik kada se tačke zamijene homogenim tijelima sfernog oblika. Smatrajući da je Zemlja homogena kugla mase M_Z, neposredno dobijamo da je gravitaciona sila kojom Zemlja privlači tačku M, mase m, kao vektor određena izrazom

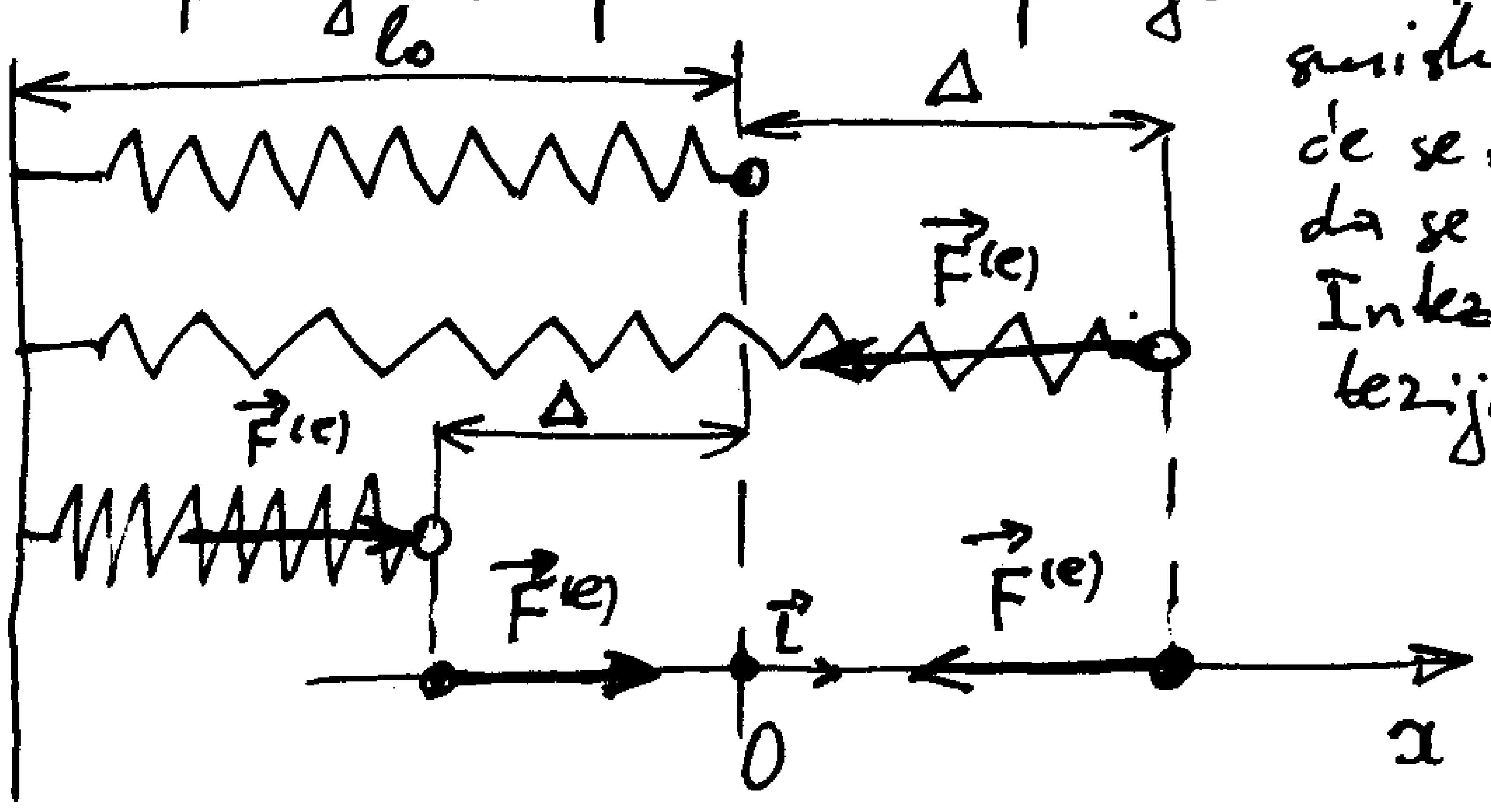


$$\vec{F} = -f\frac{M_Z m}{r^2}\frac{\vec{r}}{r},$$

gdje je, očigledno, $\frac{\vec{r}}{r}$ – jedinični vektor radijus vektora sa početkom u centru O Zemlje. Pošto je na površini Zemlje ($r = R_Z$) $F = mg$, to se prethodna formula može napisati u obliku

$$\vec{F} = -g\frac{R_Z^2}{r^2}m\frac{\vec{r}}{r}$$

b2) Elastična sila opruge. Posmatrajmo materijalnu tačku vezanu za jedan kraj elastične opruge, čiji je drugi kraj nepokretan. Neka je l_0 dužina opruge u nedeformisanom stanju (prirodna dužina opruge) i pretpostavimo, radi jednostavnosti, da se tačka pomjera u pravcu ose opruge. Kada tačku pomjerimo za veličinu Δ, bilo u smislu zatezanja ili sabijanja opruge, opruga će se deformisati i, kao elastično tijelo, težiće da se vrati u prvobitno nedeformisano stanje.



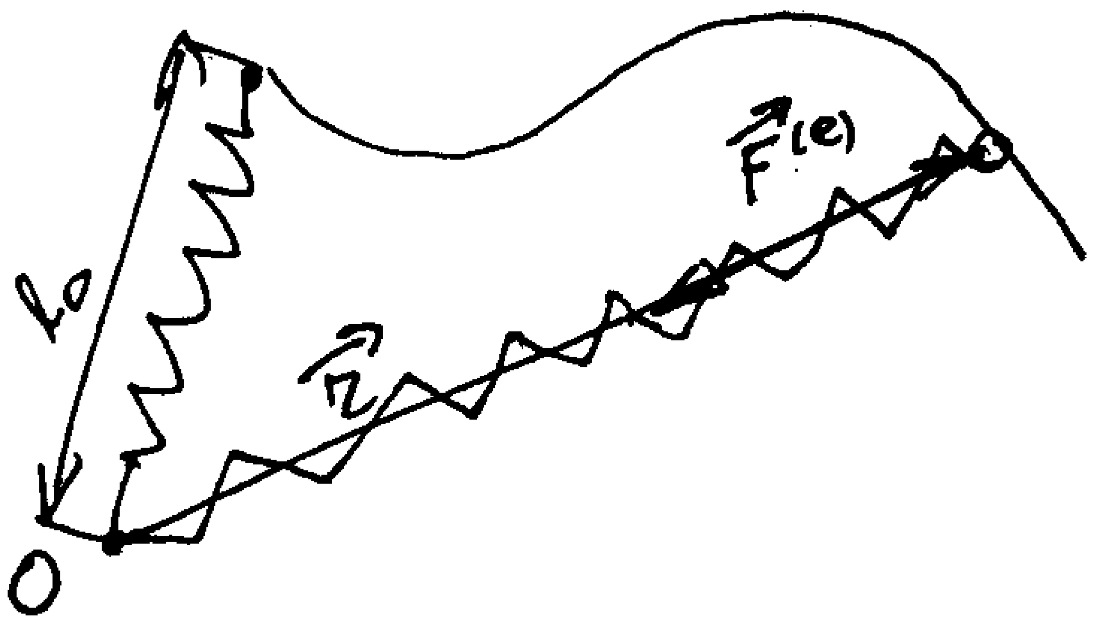
Intenzitet sile $\vec{F}^{(e)}$ kojom opruga djeluje na materijalnu tačku srazmjeran je, u domenu važenja Hukovog zakona, deformaciji Δ, tj

$$F^{(e)} = c\Delta,$$

gdje je c konstanta koja se zove krutost opruge i predstavlja veličinu sile koja oprugu deformiše za jedinicu dužine. Sila $\vec{F}^{(e)}$ ima pravac ose opruge, a smjer joj je ka položaju koji odgovara kraju nedeformisane opruge. Ako osu x postavimo duž ose opruge, a koordinatni početak izaberemo tako da se poklapa sa krajem nedeformisane opruge, elastičnu silu opruge možemo zapisati u vektorskom obliku

$$\vec{F}^{(e)} = -cx\vec{i}\,, \quad \vec{i} - \text{jedinični vektor ose } Ox$$

~~Lako~~ je ovaj izraz lako uopštiti na slučaj kada se kraj, za koji je vezana materijalna tačka, može slobodno pomjerati u prostoru.

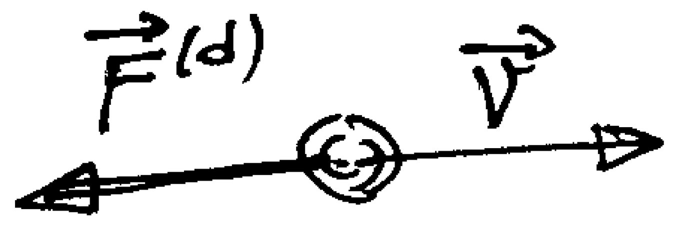


$$\vec{F}^{(e)} = -c(r - l_0)\boxed{\frac{\vec{r}}{r}}$$

jedinični vektor, vektora položaja

c) Sila koja zavisi od brzine, $\vec{F} = \vec{F}(\vec{v})$. Tipičan predstavnik ovakve vrste sila su sile otpora. Kada se tijelo (mat. tačka) kreće u otpornoj sredini (vazduh, voda,...) trpi određeni otpor koji bitno zavisi od brzine. Zavisnost sile otpora od brzine je oblika

$$\vec{F}^{(d)} = -F^{(d)}(v)\,\frac{\vec{v}}{v}\,,$$



pri čemu se razlikuju dva tipična slučaja:

1) $F^{(d)}(v) = \zeta v$, ζ-const >0, odnosno, $\vec{F}^{(d)} = -\zeta\vec{v}$ – viskozni otpor – javlja se pri malim brzinama.

2) $F^{(d)}(v) = \gamma v^2$, γ-const >0 – turbulentni otpor

Koeficijenti ζ i γ zavise od oblika tijela koje se kreće i fizičkih osobina otporne sredine.

1.1. Diferencijalne jednačine kretanja

a) Vektorski oblik – osnovna jednačina dinamike materijalne tačke

Neka se tačka mase m kreće pod dejstvom rezultujuće sile $\vec{F} = \sum \vec{F}_i$. Drugi Njutnov zakon

$$m\vec{a} = \vec{F}, \qquad (1)$$

s obzirom da je $\vec{a} = \ddot{\vec{r}}$ i, u opštem slučaju $\vec{F} = \vec{F}(t, \vec{r}, \dot{\vec{r}})$, direktno dovodi do diferencijalne jednačine

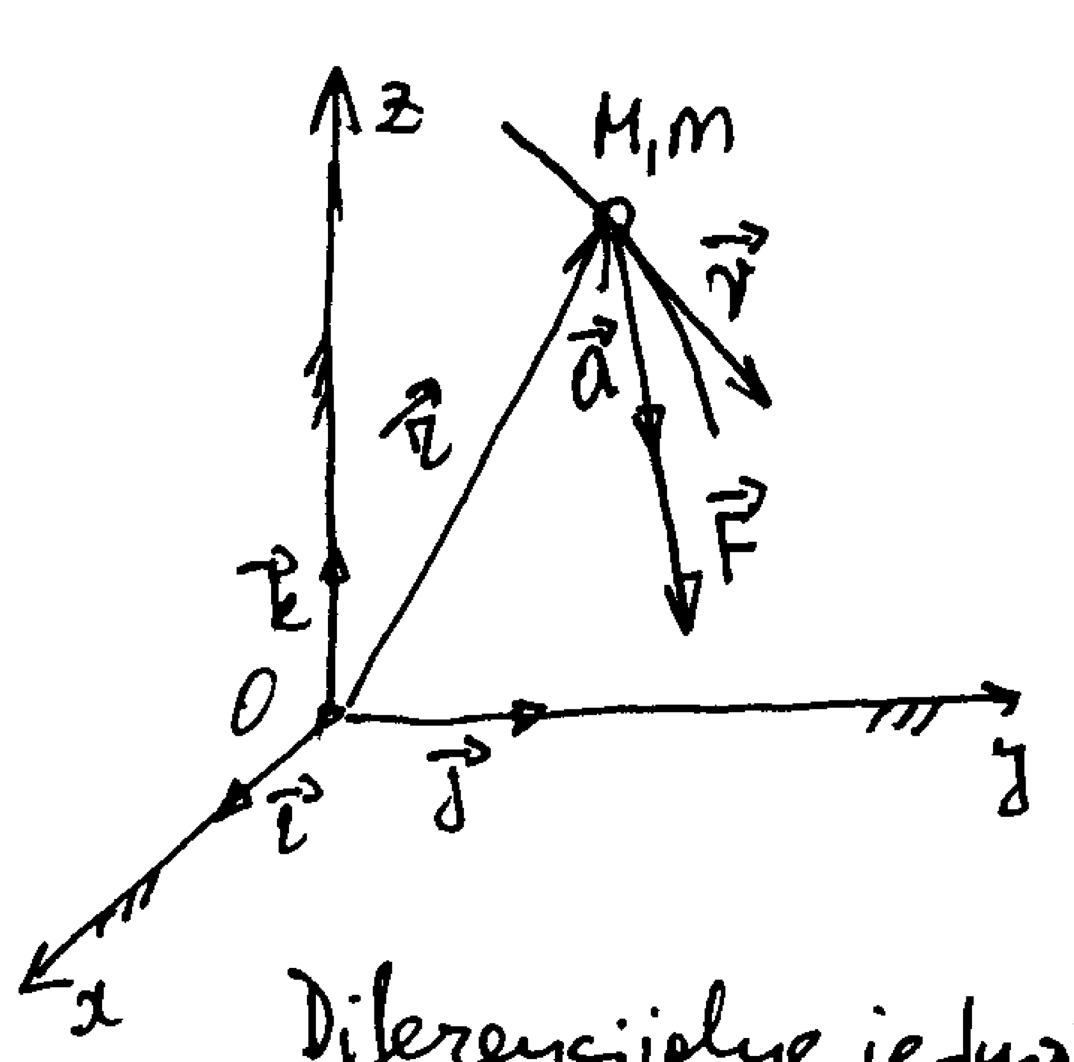
$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}(t, \vec{r}, \dot{\vec{r}}) \qquad (2)$$

koja predstavlja diferencijalnu jednačinu kretanja materijalne tačke u vektorskom obliku, u odnosu na inercijalni sistem referencije. Ona je dif. jed. drugog reda u kojoj je nezavisno promjenljiva vrijeme t, a zavisno promjenljiva vektor položaja $\vec{r}$. Jednačina (1), odnosno (2), zove se osnovna jednačina dinamike materijalne tačke.

Pri prostornom kretanju, jednačini (2) odgovaraju tri skalarne jednačine koje se dobijaju projiciranjem osnovne jednačine na ose odabranog koordinatnog sistema.

b) Skalarni oblici

b1) Dekartov koordinatni sistem

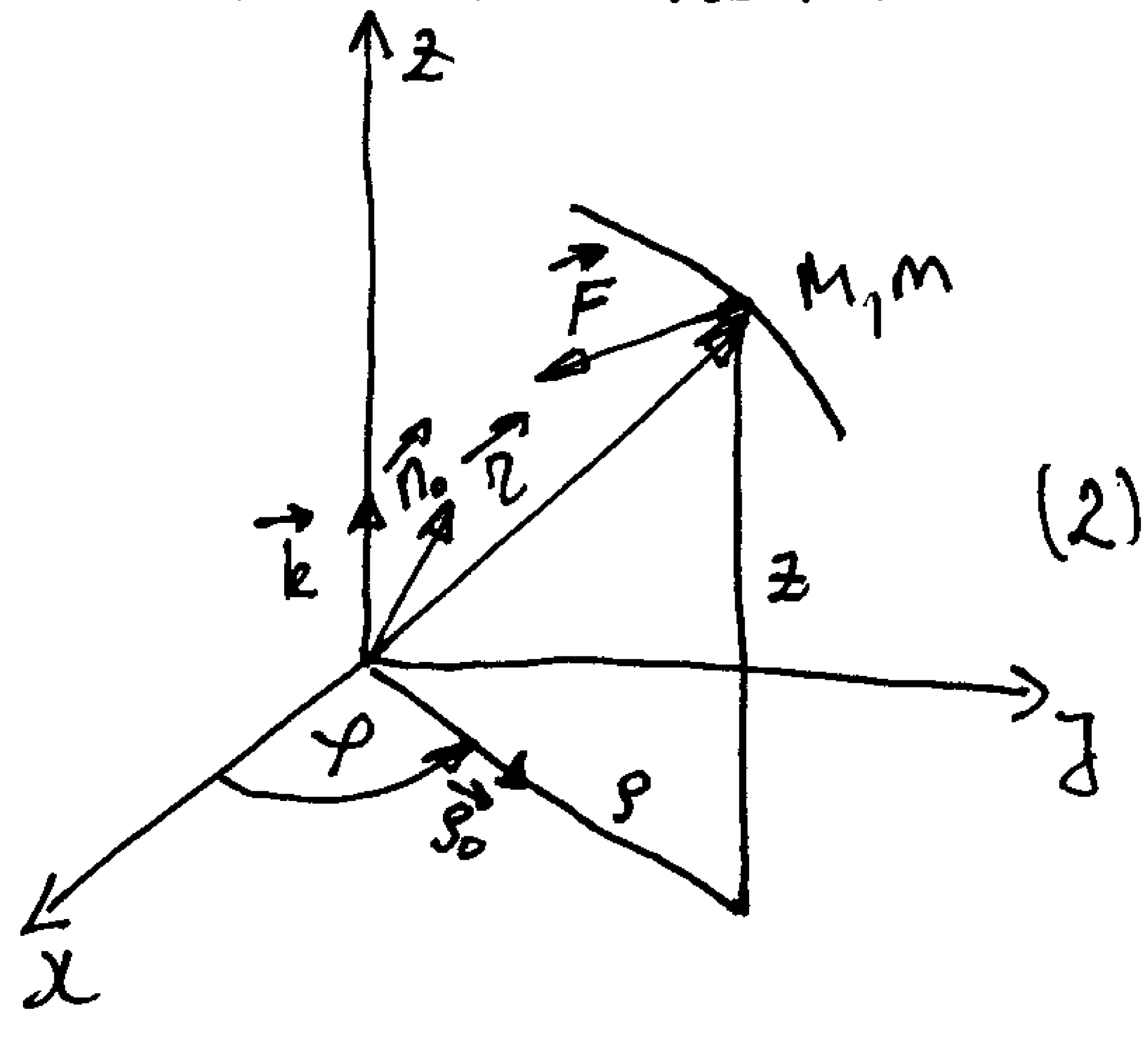


$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$
$$\vec{v} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k}$$
$$\vec{a} = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k}$$
$$\vec{F} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k}$$

$$(2) \rightarrow \left.\begin{array}{l} m\ddot{x} = F_x(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) \\ m\ddot{y} = F_y(\quad -\text{"}- \quad) \\ m\ddot{z} = F_z(\quad -\text{"}- \quad) \end{array}\right\} (3)$$

Diferencijalne jednačine kretanja (3) predstavljaju sistem od 3 obične diferencijalne jednačine drugog reda u kojima su nezavisno promjenljiva vrijeme, a zavisno promjenljive Dekartove koordinate tačke (x, y, z).

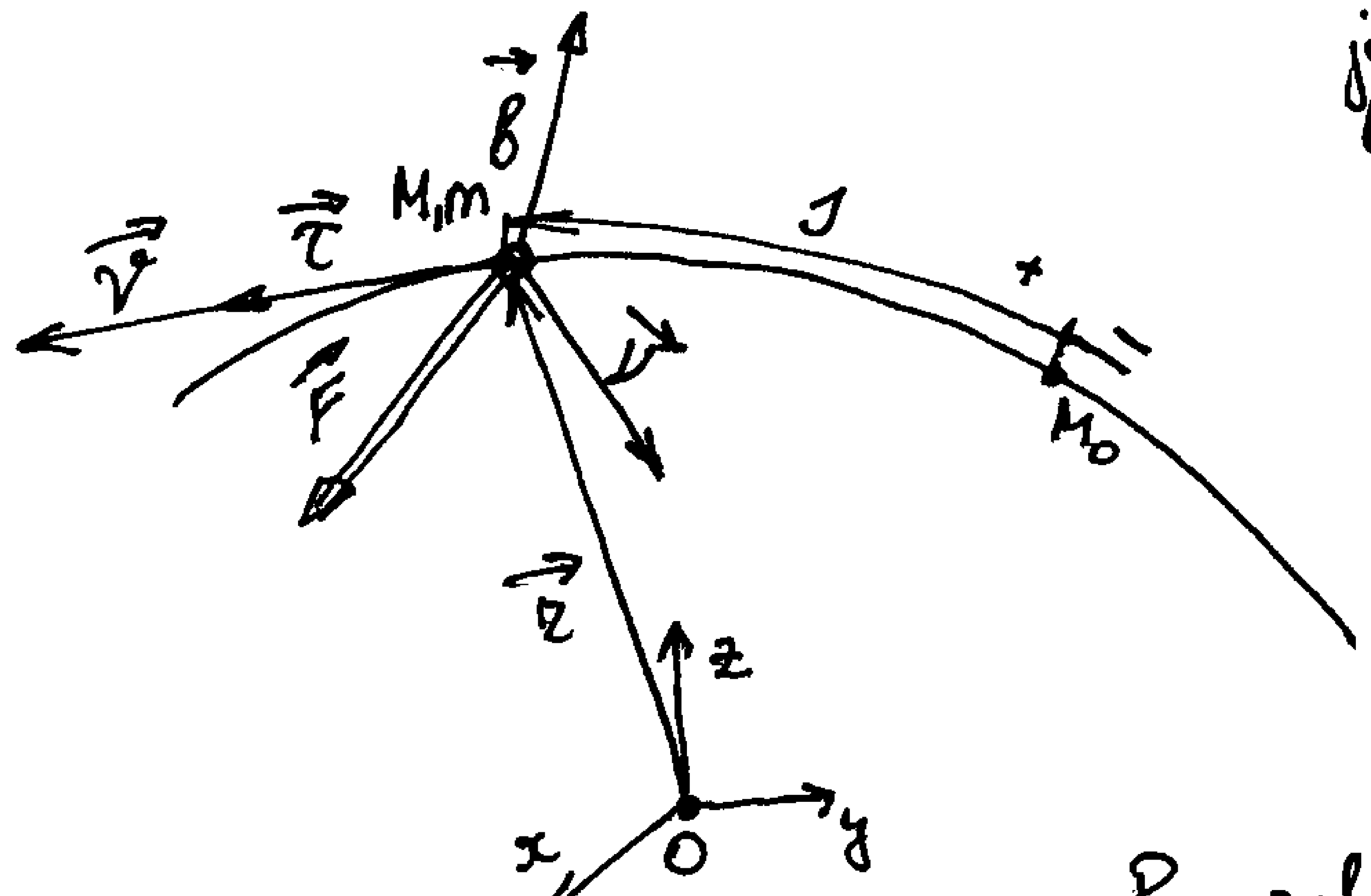
b2) Polarno-cilindarski koordinatni sistem



$$\vec{r} = \rho\vec{\rho}_0 + z\vec{k}; \quad \vec{v} = v_\rho\vec{\rho}_0 + v_\varphi\vec{n}_0 + v_z\vec{k}, \quad v_\rho = \dot{\rho}, \; v_\varphi = \rho\dot{\varphi}, \; v_z = \dot{z}$$
$$\vec{a} = a_\rho\vec{\rho}_0 + a_\varphi\vec{n}_0 + a_z\vec{k}, \quad a_\rho = \ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2, \; a_\varphi = \rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi}, \; a_z = \ddot{z}$$
$$\vec{F} = F_\rho\vec{\rho}_0 + F_\varphi\vec{n}_0 + F_z\vec{k}$$

$$(2) \rightarrow \left.\begin{array}{l} m(\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2) = F_\rho(t, \rho, \varphi, z, \dot{\rho}, \dot{\varphi}, \dot{z}) \\ m(\rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi}) = F_\varphi(\quad -\text{"}- \quad) \\ m\ddot{z} = F_z(\quad -\text{"}- \quad) \end{array}\right\} (4)$$

63) Prirodni koordinatni sistem



Kada je poznata putanja materijalne tačke, onda je njen položaj na putanji u svakom trenutku određen lučnom koordinatom $s = \overset{\frown}{M_0M}$.

$\vec r = \vec r(s) = x(s)\vec i + y(s)\vec j + z(s)\vec k$ – jednačina putanje u funkciji lučne koordinate.

Jedinični vektori prirodnog trijedra su:

$\vec \tau = \dfrac{d\vec r}{ds}$ – jed. vek. tangente

$\vec \nu = R_k \dfrac{d\vec \tau}{ds}$ – jed. vek. glavne normale, gdje je R_k poluprečnik krivine trajektorije u tački M.

$\vec b = \vec \tau \times \vec \nu$ – jed. vek. binormale

$\vec \nu = R_k \dfrac{d\vec \tau}{ds}$

$$\vec v = v_\tau \vec \tau = \dot s \vec \tau; \quad \vec a = a_\tau \vec \tau + a_\nu \vec \nu; \quad a_\tau = \frac{dv_\tau}{dt} = \ddot s, \quad a_\nu = \frac{v^2}{R_k} = \frac{\dot s^2}{R_k}$$

$$\vec F = F_\tau \vec \tau + F_\nu \vec \nu + F_b \vec b$$

$$(2) \rightarrow \left.\begin{aligned} m\ddot s &= F_\tau(t, s, \dot s) \\ \frac{m\dot s^2}{R_k} &= F_\nu(\ -\text{ıı}-\ ) \\ 0 &= F_b \end{aligned}\right\} (5)$$

(5) – dif. jed. kretanja tačke u odnosu na prirodni trijedar

Posledenja jednačina pokazuje da rezultujuća sila, isto kao i ubrzanje, leži u oskulatornoj ravni.

1.2 Zadaci dinamike

<u>Prvi zadatak</u>: pri poznatom zakonu kretanja i masi tačke treba odrediti silu koja uslovljava kretanje.

Ako je zakon kretanja dat vektorskom funkcijom $\vec r = \vec r(t)$, tada neposredno određujemo vektor sile pomoću jednakosti (osnovne jednačine dinamike)

$$\vec F = m\ddot{\vec r}$$

Ako su date jednačine kretanja u odnosu na neki koordinatni sistem, tada direktnom primjenom jednačina (3), (4) ili (5) određujemo odgovarajuće projekcije sile.

<u>Drugi zadatak</u>: Treba odrediti zakon kretanja tačke kada je poznata sila koja na nju djeluje, masa tačke i početni uslovi – položaj tačke i brzina u početnom trenutku ($\vec r(t_0) = \vec r_0$, $\vec v(t_0) = \vec v_0$)

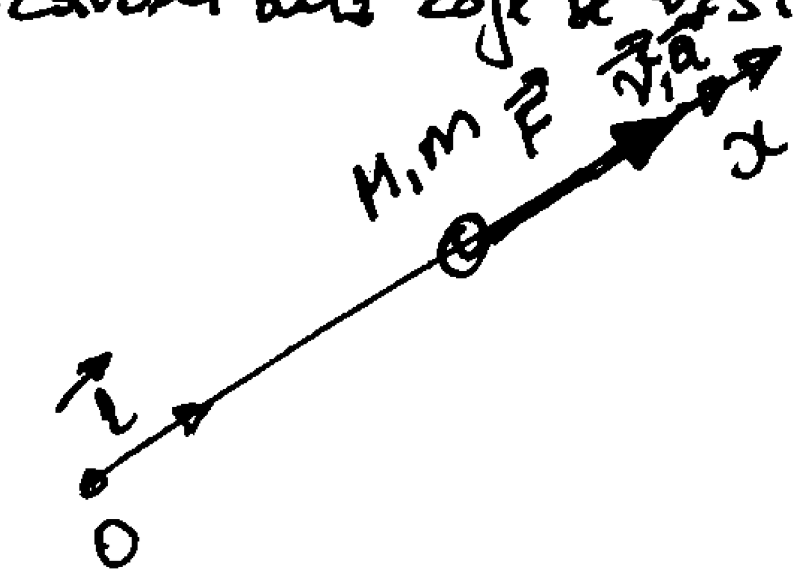
Rješavanje ovog zadatka, koji je suštinski zadatak dinamike, svodi se na integraljenje diferencijalnih jednačina kretanja saglasno početnim uslovima.

$$m\ddot{\vec r} = \vec F(t, \vec r, \dot{\vec r}) \xrightarrow[\text{poč. uslovi: } \vec r(t_0) = \vec r_0,\ \dot{\vec r}(t_0) = \vec v_0]{\int} \vec r = \vec r(t)$$

1.3. Pravolinijsko kretanje tačke

Tačka se kreće pravolinijski ako se za sve vrijeme kretanja nalazi na istoj pravoj liniji. Kako se pravac ubrzanja poklapa sa pravcem sile koja djeluje na materijalnu tačku, to proizilazi da je potreban i dovoljan uslov za pravolinijsko kretanje da sila ima konstantan pravac, a početna brzina, ukoliko je različita od nule, pravac sile.

Jednu osu koordinatnog sistema, recimo x, postavimo tako da se poklapa sa pravom duž koje se vrši kretanje. Tada je



$$\vec{r} = x\vec{i},\quad \vec{v} = \dot{x}\vec{i},\quad \vec{a} = \ddot{x}\vec{i},\quad \vec{F} = F_x\vec{i}$$

Projiciranjem osnovne jednačine dinamike $m\vec{a} = \vec{F}$ na x osu dobijamo dif. jed. pravolinijskog kretanja

$$m\ddot{x} = F_x(t, x, \dot{x}) \qquad (6)$$

Osnovni zadatak dinamike svodi se na to da se na osnovu jednačine (6), znajući silu F_x, odredi zakon kretanja (konačna jednačina kretanja) tačke: $x = x(t)$. Pošto je (6) diferencijalna jednačina drugog reda, u svakom konkretnom slučaju kada se ustanovi kakav oblik ima njena desna strana, određenim matematičkim postupcima, poslije dvostruke integracije, može se dobiti opšte rješenje dif. jed. (6) oblika

$$x = f(t, C_1, C_2) \qquad (7)$$

gdje su C_1 i C_2 proizvoljne integracione konstante. Konstante C_1 i C_2 određuju se na osnovu početnih uslova koji se, u ovom slučaju, daju u obliku

$$x(t_0) = x_0,\quad \dot{x}(t_0) = \dot{x}_0 \qquad (8)$$

Obično se uzima, mada nije obavezno, da je početni trenutak $t_0 = 0$, tj vrijeme mjerimo od početka kretanja.

Na osnovu (7) je

$$\frac{dx}{dt} = f_1(t, C_1, C_2) \qquad (9)$$

pa, imajući u vidu (8), dobijamo jednačine

$$x_0 = f(t_0, C_1, C_2),\quad \dot{x}_0 = f_1(t_0, C_1, C_2)$$

iz kojih nalazimo

$$C_1 = f_2(t_0, x_0, \dot{x}_0),\quad C_2 = f_3(t_0, x_0, \dot{x}_0),$$

što kada se uvrsti u (7) dovodi do konačne jednačine kretanja tačke

$$x = x(t, t_0, x_0, \dot{x}_0) \qquad (10)$$

<u>Specijalni slučajevi integraljenja dif. jednačine (6)</u>

a) $F_x = \text{const}$ (slučaj jednakopromjenljivog kretanja)

(6) $\rightarrow\ \ddot{x} = \frac{F_x}{m} = \text{const.}$

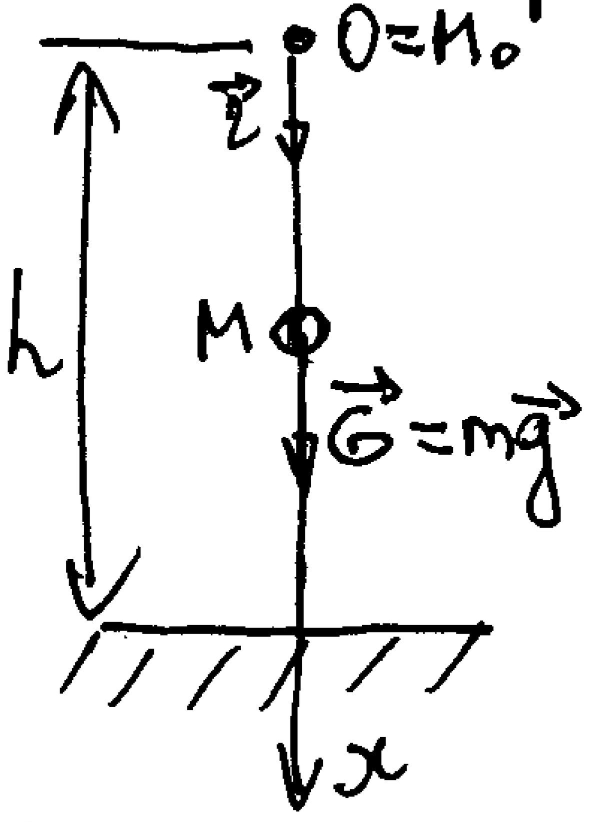
$\rightarrow\ d\dot{x} = \frac{F_x}{m}\,dt \xrightarrow{\int} \dot{x} = \frac{F_x}{m}t + C_1 \xrightarrow{\dot{x}(t_0=0)=\dot{x}_0} C_1 = \dot{x}_0$

$\rightarrow\ \dot{x} = \frac{F_x}{m}t + \dot{x}_0$ – zakon promjene brzine

$$dx = \left(\frac{F_x}{m}t + \dot{x}_0\right)dt \xrightarrow{\int} x = \frac{F_x}{2m}t^2 + \dot{x}_0 t + C_2 \xrightarrow{x(t_0=0)=x_0} C_2 = x_0$$

$x = \frac{F_x}{2m}t^2 + \dot{x}_0 t + x_0$ – jednačina jednako promjenljivog kretanja (ako je $F_x > 0$ – jednako ubrzano kretanje, $F_x < 0$ – jednako usporeno kretanje).

Pr. Slobodni pad u bezvazdušnom prostoru u homogenom polju sile teže.



$m\vec{a} = m\vec{g} \rightarrow m\ddot{x} = mg$

poč. uslovi: $x(t_0=0)=0$, $\dot{x}(t_0=0)=0$

$\ddot{x} = g$

$\rightarrow \boxed{\dot{x} = gt}$

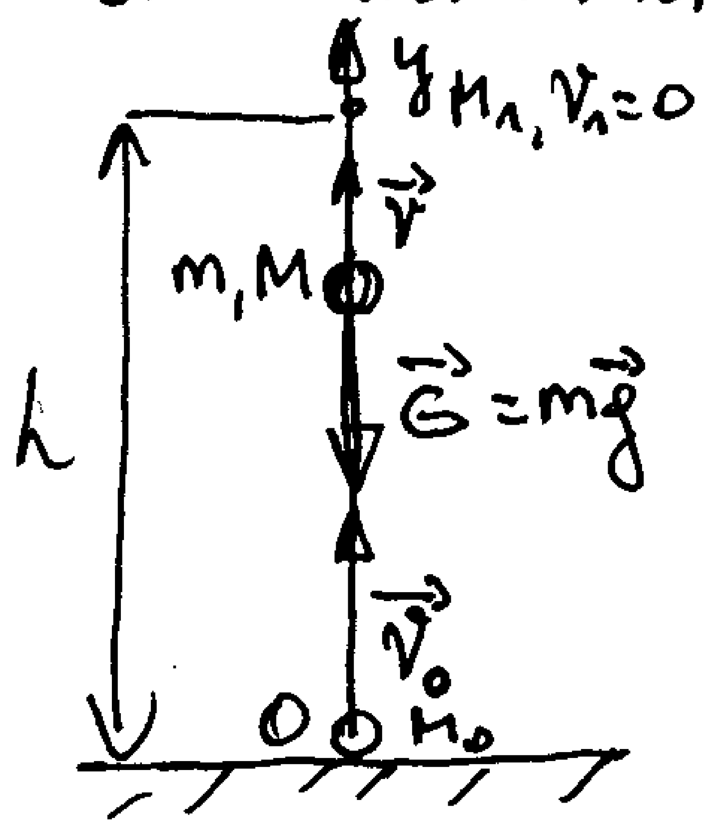
$\boxed{x = g\frac{t^2}{2}}$

$t_1 = \sqrt{\frac{2h}{g}}$ – vrijeme padanja tačke

$\vec{v}_1 = \dot{x}(t_1)\vec{i} = \sqrt{2gh}\,\vec{i}$

$v_1 = \sqrt{2gh}$ – brzina kojom tačka udara pov. zemlje.

Pr. Vertikalni hitac u bezvazdušnom prostoru u homogenom polju sile teže.



$m\vec{a} = m\vec{g} \rightarrow \ddot{y} = -g$

poč. uslovi: $y(t_0=0)=0$, $\dot{y}(t_0=0)=v_0$

$\rightarrow \boxed{\dot{y} = -gt + v_0}$, $\dot{y}(t)=0 \rightarrow t_1 = \frac{v_0}{g}$ – vrijeme penjanja

$\boxed{y = v_0 t - \frac{gt^2}{2}}$, $h = y(t_1) = \frac{v_0^2}{2g}$ – visina penjanja

b) $F_x = F_x(t)$ – sila je funkcija vremena

$m\ddot{x} = F_x(t)$

$d\dot{x} = \frac{1}{m}F_x(t)dt$

$\dot{x} = \frac{1}{m}\underbrace{\int F_x(t)dt}_{=f_1(t)} + C_1$

$x = \frac{1}{m}\underbrace{\int f_1(t)dt}_{=f_2(t)} + C_1 t + C_2$

$x = \frac{1}{m}f_2(t) + C_1 t + C_2 t$

Konstante C_1 i C_2 određuju se iz početnih uslova

c) $F_x = F_x(x)$ – sila zavisi od položaja tačke

$m\ddot{x} = F_x(x)$

Transformacija

$\ddot{x} = \frac{d\dot{x}}{dt} = \frac{d\dot{x}}{dx}\frac{dx}{dt}$, odnosno $\ddot{x} = \dot{x}\frac{d\dot{x}}{dx}$, razdvaja promjenljive u dif. jednačini kretanja, tj.

$$\dot{x}\,d\dot{x} = \frac{1}{m} F_x(x)\,dx$$

$$\rightarrow \quad \frac{1}{2}\dot{x}^2 = \frac{1}{m}\underbrace{\int F_x(x)\,dx}_{=f_1(x)} + C_1$$

$$\dot{x} = \pm\sqrt{\frac{2}{m} f_1(x) + 2C_1}$$

Znak + ili − bira se zavisno od smjera brzine

$$\frac{dx}{\pm\sqrt{\frac{2}{m}f_1(x)+2C_1}} = dt \xrightarrow{\int} f_2(x,C_1) = t + C_2, \quad f_2(x,C_1) = \int \frac{dx}{\pm\sqrt{\frac{2}{m}f_1(x)+2C_1}},$$

odakle rješavajući po x dobijamo

$$x = f_3(t, C_1, C_2) \text{ – opšte rješenje dif. jed. kretanja}$$

d) $F_x = F_x(\dot{x})$ – sila zavisi od brzine

$$m\ddot{x} = F_x(\dot{x})$$

$$m\frac{d\dot{x}}{F_x(\dot{x})} = dt \xrightarrow{\int} f_1(\dot{x}) = t + C_1, \quad f_1(\dot{x}) = m\int\frac{d\dot{x}}{F_x(\dot{x})},$$

Rješavajući po brzini $\dot{x}$, dobijamo

$$\dot{x} = f_2(t, C_1),$$

odakle je

$$x = \underbrace{\int f_2(t,C_1)\,dt}_{=f_3(t,C_1)} + C_2$$

$$x = f_3(t, C_1) + C_2 \quad \text{– opšte rješenje}$$

N: Prethodna dif. jednačina može se rješavati i primjenom transformacije

$$\ddot{x} = \dot{x}\frac{d\dot{x}}{dx},$$

što daje

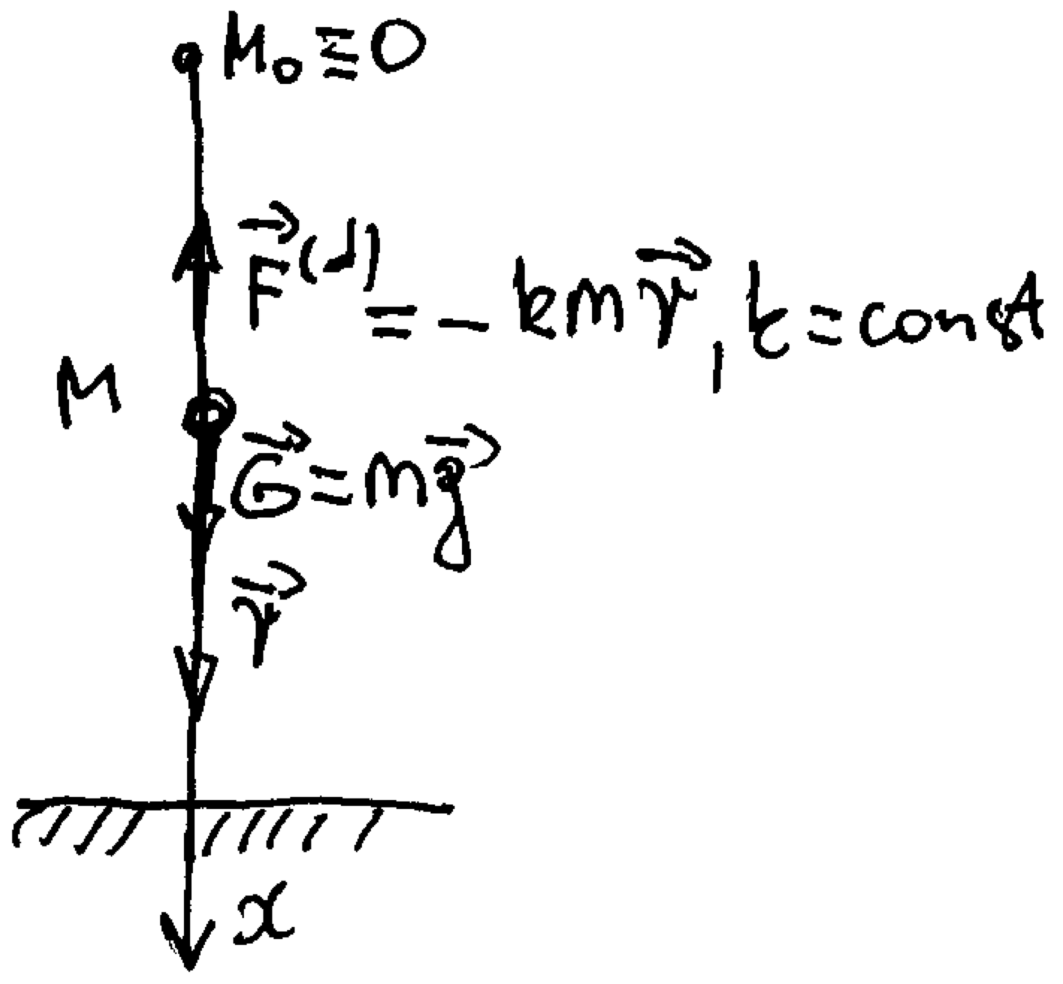
$$m\frac{\dot{x}\,d\dot{x}}{F_x(\dot{x})} = dx \xrightarrow{\int} f_1(\dot{x}) = x + C_1, \quad f_1(\dot{x}) = \int\frac{m\dot{x}\,d\dot{x}}{F_x(\dot{x})}$$

$$\rightarrow \dot{x} = f_2(x, C_1) \rightarrow \frac{dx}{f_2(x,C_1)} = dt \xrightarrow{\int} f_3(x,C_1) = t + C_2, \quad f_3 = \int\frac{dx}{f_2(x,C_1)},$$

$$\rightarrow x = f_4(t, C_1, C_2)$$

Ovaj drugi – postupak se primjenjuje kada se traži zavisnost brzine od položaja: $\dot{x} = f(x)$.

Pr. Slobodni pad u vazduhu kada je otpor proporcionalan brzini.

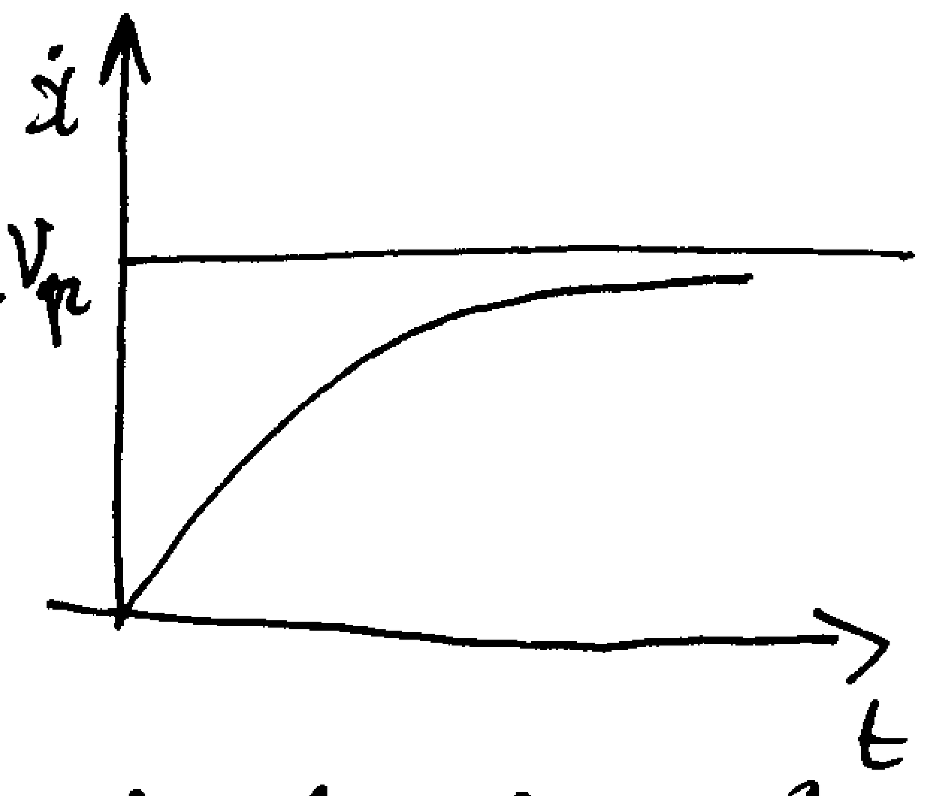


$$m\vec{a} = m\vec{g} - km\vec{v}$$

$$\ddot{x} = g - k\dot{x}$$

$$\frac{d\dot{x}}{g - k\dot{x}} = dt; \quad \frac{g}{k} = v_{gr}$$

$$\int \frac{d\dot{x}}{g - k\dot{x}} = t + C_1$$



$$v_{gr} = \lim_{t \to +\infty} \dot{x}(t) = \frac{g}{k}$$

$$-\frac{1}{k}\ln(g - k\dot{x}) = t + C_1$$

$$\dot{x}(t_0 = 0) = 0 \rightarrow C_1 = -\frac{1}{k}\ln g$$

$$\rightarrow \boxed{\dot{x} = \frac{g}{k}(1 - e^{-kt})} \text{ - zakon promjene brzine}$$

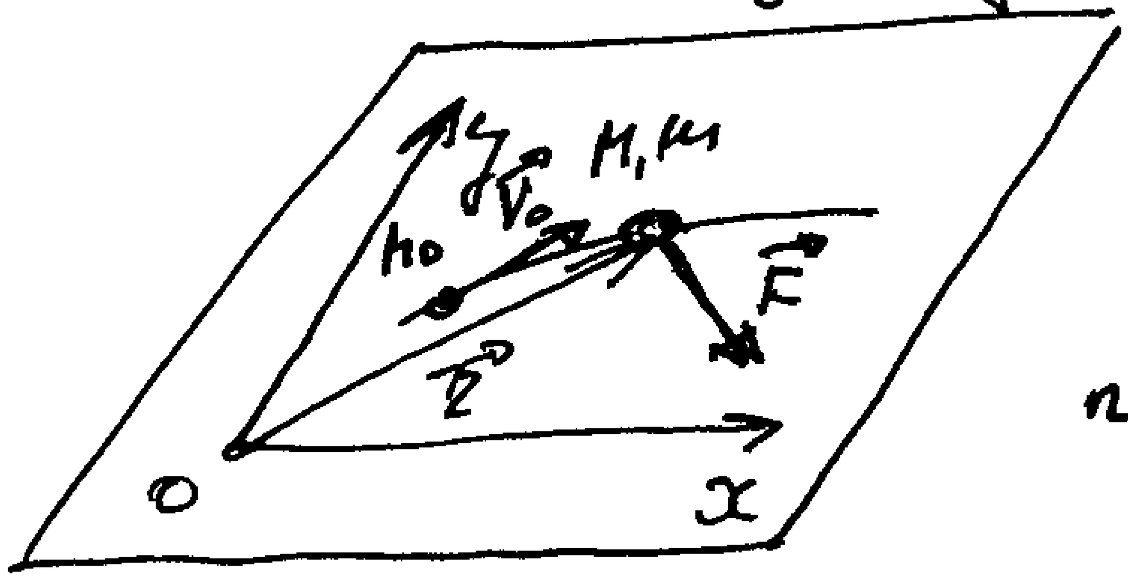
$$x = \frac{g}{k}\int (1 - e^{-kt})\,dt + C_2$$

$$x(t_0 = 0) = 0$$

$$\rightarrow \quad x = \frac{g}{k}\left(t + \frac{1}{k}e^{-kt} - \frac{1}{k}\right) \text{ - zakon kretanja}$$

1.4. Kretanje tačke u ravni

Na osnovu osnovne jednačine dinamike, lako se dolazi do sljedećeg zaključka: potreban i dovoljan uslov za ravansko kretanje materijalne tačke jeste da sila koja dejstvuje na tačku i početna brzina, ukoliko je različita od nule, leže u jednoj ravni.



$$\vec{F} = F_x \vec{i} + F_y \vec{j}$$

$$\vec{v}_0 = v_{0x}\vec{i} + v_{0y}\vec{j} = \dot{x}_0\vec{i} + \dot{y}_0\vec{j}$$

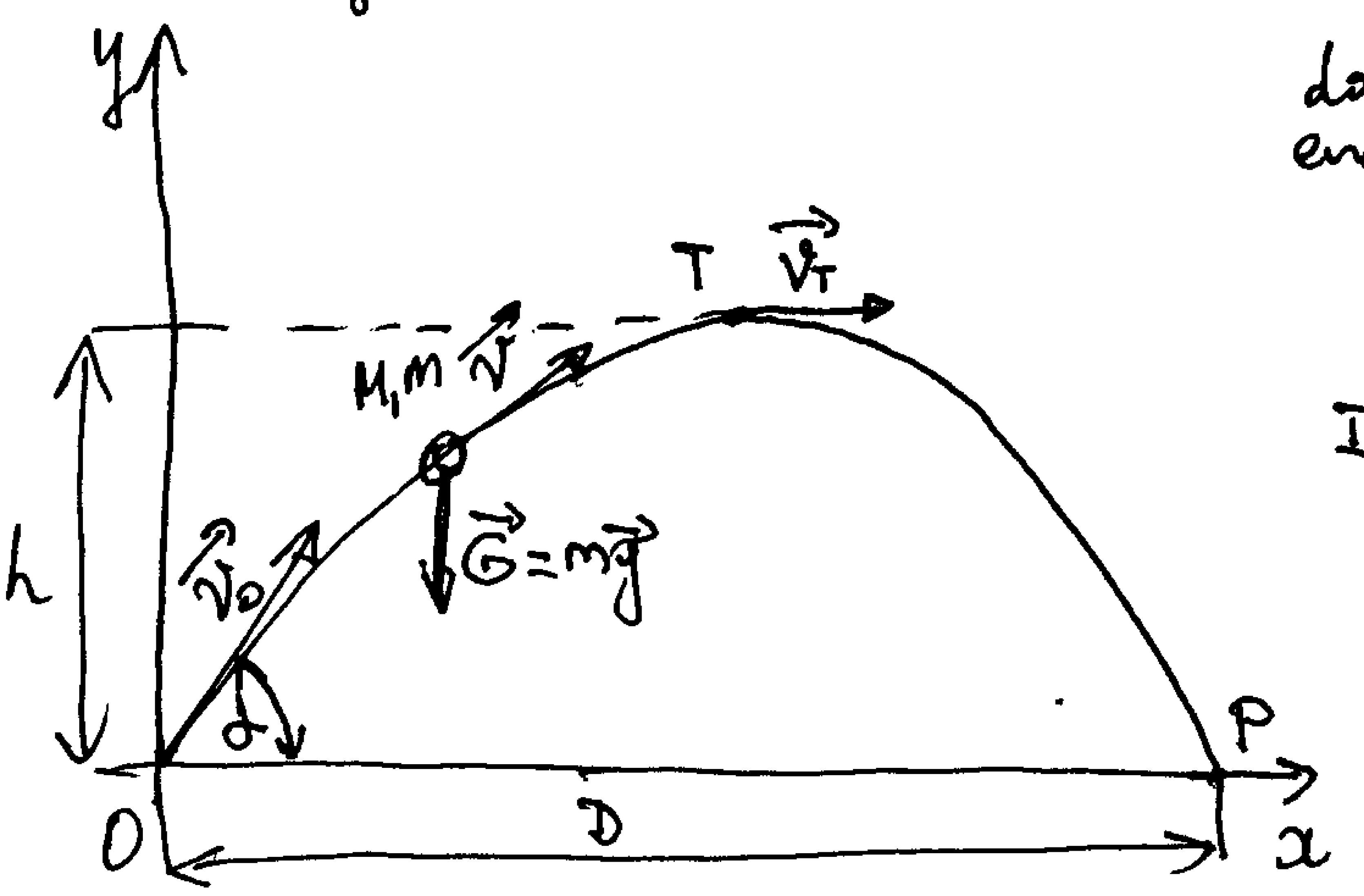
Dif. jed. kretanja u odnosu na Dekartov koordinatni sistem Oxy u ravni sile $\vec{F}$ i početne brzine $\vec{v}_0$ su:

$$m\ddot{x} = F_x(t, x, y, \dot{x}, \dot{y})$$

$$m\ddot{y} = F_y(t, x, y, \dot{x}, \dot{y})$$

Pr. Kosi hitac u bezvazdušnom prostoru, u homogenom polju sile teže

To je kretanje koje nastaje kada se mat. tačka, mase m, izbaci iz neke tačke u blizini Zemljine površine početnom brzinom $\vec{v}_0$ koja zaklapa ugao α prema horizontu (elevacioni ugao).



Zanemarujući otpor vazduha imamo da na tačku djeluje samo sila teže pa su diferencijalne jednačine kretanja

$$m\ddot{x} = 0$$

$$m\ddot{y} = -mg$$

Integraleći ove dif. jednačine dobijamo

$$\dot{x} = C_1, \quad x = C_1 t + C_2$$

$$\dot{y} = -gt + C_3, \quad y = -\frac{gt^2}{2} + C_3 t + C_4$$

Za početne uslove:

$$x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = v_0 \cos\alpha$$

$$y(0) = 0, \quad \dot{y}(0) = v_0 \sin\alpha$$

određujemo integracione konstante i dobijamo zakon promjene brzine

$$\dot{x} = v_0 \cos\alpha, \quad \dot{y} = v_0 \sin\alpha - gt$$

kao i konačne jednačine kretanja

$$x = v_0 t \cos\alpha, \quad y = v_0 t \sin\alpha - g\frac{t^2}{2}$$

Eliminacijom vremena t iz poslednjih jednačina nalazimo jednačinu trajektorije

$$y = x \operatorname{tg}\alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2\alpha} \quad \text{– parabola}$$

$\dot{y}(t_T) = 0 \rightarrow t_T = \frac{v_0}{g}\sin\alpha$ – trajanje leta na uzlaznom dijelu putanje

$y(t_P) = 0 \rightarrow t_P = 2\frac{v_0}{g}\sin\alpha = 2t_T$ – trajanje leta

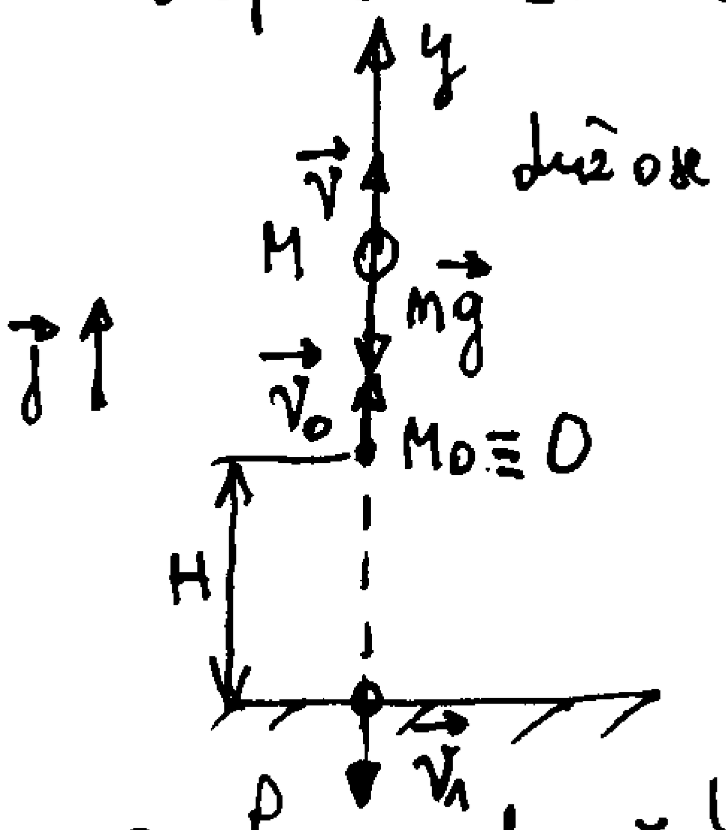
$D = x(t_P) = \frac{v_0^2}{g}\sin 2\alpha$ – domet $\rightarrow D_{max} = D(\alpha = 45^\circ) = \frac{v_0^2}{g}$

$h = y(t_T) = \frac{v_0^2}{2g}\sin^2\alpha$ – visina penjanja $\rightarrow h_{max} = h(\alpha = 90^\circ) = \frac{v_0^2}{2g}$

N: Ako je tačka O iznad površine Zemlje i $\alpha = 0$ imamo horizontalni hitac.

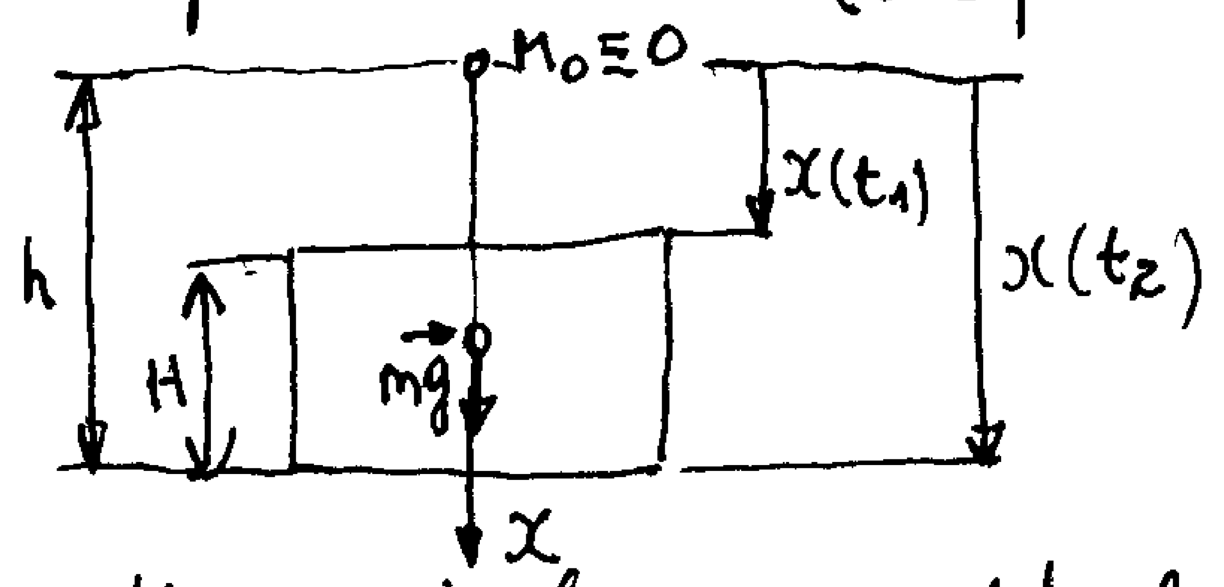
Dinamika slobodne tačke (zadaci za vježbanje)

1. Sa visine $H=100m$, iznad zemljine površine, izbaci se vertikalno naviše materijalna tačka brzinom $v_0=20\,m/s$. Kolikom brzinom tačka pada na zemlju? Otpor vazduha zanemariti.



- Kretanje je vertikalni hitac, čija je konačna jednačina kretanja duž ose Oy: $y=v_0t-g\frac{t^2}{2}$, a zakon promjene brzine $\dot{y}=v_0-gt$, $\vec{v}=\dot{y}\vec{j}$
- Iz uslova $y(t_1)=-H$ određuje se trenutak t_1 udara tačke o z. površinu, pa je $\vec{v}_1=\dot{y}(t_1)\vec{j}$; za date vrijednosti dobija se: $t_1=6{,}99\,s$ i $\vec{v}_1=-48{,}57\vec{j}\,(m/s)$.

2. Posmatrač koji sjedi u prostoriji i gleda kroz prozor visine $H=2m$ vidio je kamen koji pada vertikalno. Kamen se u okviru prozora mogao vidjeti tokom $0{,}1\,s$. Odrediti visinu, mjerenu od donje ivice prozora, sa koje je ispušten kamen (bez početne brzine). Otpor vazduha zanemariti i uzeti da je $g=9{,}8\frac{m}{s^2}$.

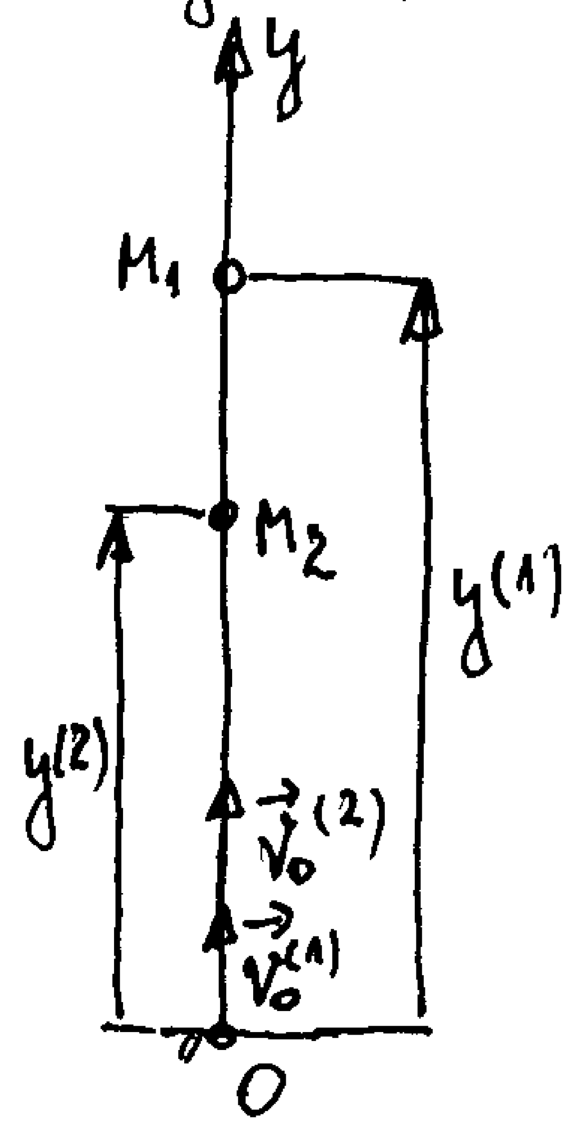


- Konačna jednačina slobodnog pada: $x=g\frac{t^2}{2}$

$t_1=t_2-\Delta t$, $\Delta t=0{,}1\,s$

$x(t_2)-x(t_2-\Delta t)=H \rightarrow t_2=2{,}09\,s \rightarrow h=x(t_2)=21{,}42\,m$

3. Kamen je bačen vertikalno uvis brzinom $30\,m/s$, a jedan sekund kasnije je iz istog početnog položaja vertikalno uvis bačen drugi kamen. Kolika treba da bude početna brzina drugog kamena da bi se sudario sa prvim kad ovaj dospije u najviši položaj? Otpor vazduha zanemariti i uzeti da je $g=9{,}8\,m/s^2$.



- Uzmimo da vrijeme t mjerimo od trenutka izbacivanja prvog kamena

<u>Prvi kamen</u>; početni uslovi: $t_0^{(1)}=0$, $y^{(1)}(t_0^{(1)})=0$, $\dot{y}^{(1)}(t_0^{(1)})=v_0^{(1)}=30$

zakoni kretanja i promjene brzine:

$$y^{(1)}=v_0^{(1)}t-g\frac{t^2}{2};\quad \dot{y}^{(1)}=v_0^{(1)}-gt$$

$$\dot{y}^{(1)}(t_1)=0 \rightarrow t_1=\frac{v_0^{(1)}}{g}=3{,}06\,s$$ - trenutak dostizanja najvišeg položaja

<u>Drugi kamen</u>, početni uslovi: $t_0^{(2)}=1s$, $y^{(2)}(t_0^{(2)})=0$, $\dot{y}^{(2)}(t_0^{(2)})=v_0^{(2)}=?$

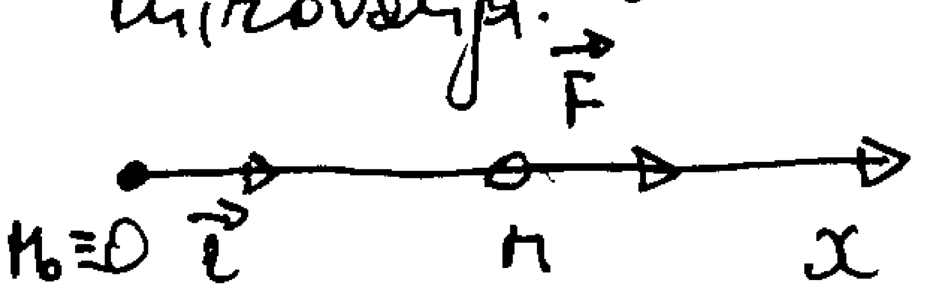
zakon kretanja:

$$y^{(2)}=v_0^{(2)}(t-t_0^{(2)})-\frac{g}{2}(t-t_0^{(2)})^2$$ (razmisliti zašto!)

uslov sudara u najvišem položaju prvog kamena: $\boxed{y^{(1)}(t_1)=y^{(2)}(t_1)}$

$$\Rightarrow v_0^{(2)}=32{,}07\,m/s$$

4. Čestica mase m i naelektrisanja q nalazi se u homogenom električnom polju promjenljivog inteziteta $\vec E = A\sin kt\,\vec i$, $A, k = const$. Na česticu tokom kretanja djeluje samo sila $\vec F = q\vec E$. Odrediti konačnu jednačinu kretanja čestice, ako je ona započela kretanje iz koordinatnog početka iz stanja mirovanja.



$$\vec F = qA\sin kt\,\vec i$$

$$m\ddot x = qA\sin kt \quad \text{– dif. jed. kret.} \quad (*)$$

$$(*) \xrightarrow[x(0)=0,\ \dot x(0)=0]{S} \quad x = \frac{qA}{mk^2}(kt - \sin kt)$$

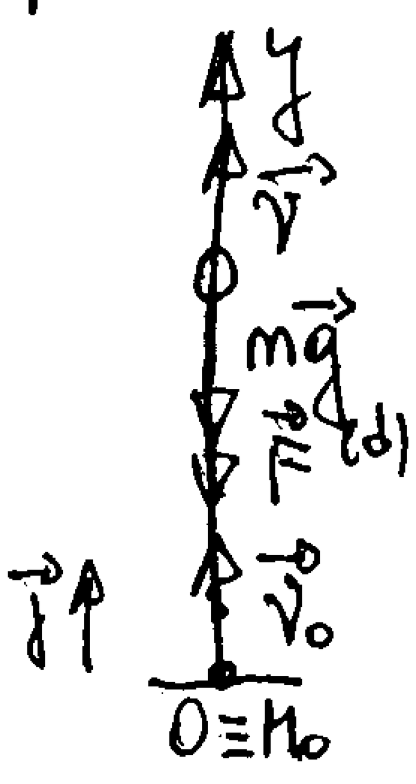
5. Tačka jedinične mase kreće se duž ose Ox pod dejstvom sile $\vec F = (1+x)\vec i$, gdje je x izraženo u metrima a F u Njutnima. Ako je u početnom trenutku tačka bila u koordinatnom početku i imala brzinu $\vec v_0 = 1\vec i$ m/s, odrediti ubrzanje i brzinu tačke nakon što ona pređe put dužine 2m.

$$m\ddot x = F_x,\ m=1,\ F_x = 1+x \to \ddot x = 1+x \quad \text{– dif. jed. kret.} \quad (*)$$

$$(*) \xrightarrow{\ddot x = \dot x\, d\dot x/dx} \int_1^{\dot x(2)} \dot x\, d\dot x = \int_0^2 (1+x)\,dx \to \frac{\dot x(2)^2}{2} - \frac12 = \left(x+\frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^2 \to \dot x(2) = 3$$

$$\Rightarrow \vec v_2 = \dot x(2)\vec i = 3\vec i \text{ m/s};\quad \vec a_2 = \ddot x(2)\vec i = 3\vec i \text{ m/s}^2$$

6. Materijalna tačka mase m izbačena je vertikalno uvis početnom brzinom v_0. Na tačku djeluje konstantna sila teže i sila otpora kretanju kroz vazduh $\vec F^{(d)} = -mk\vec v$, $k = const$. Odrediti konačnu jednačinu kretanja tačke. Ako je $v_0 = 5$ m/s i $k = 0{,}5\ s^{-1}$ izračunati visinu leta tačke i uporediti je sa visinom leta pri zanemarenom otporu.



$$m\vec a = m\vec g + \vec F^{(d)},\ \vec a = \ddot y\vec j,\ \vec v = \dot y\vec j,\ m\vec g = -mg\vec j,\ \vec F^{(d)} = -mk\vec v = -mk\dot y\vec j$$

$$\to m\ddot y = -mg - km\dot y \to \frac{d\dot y}{dt} = -(g+k\dot y) \quad \text{– dif. jed. kret.}$$

$$\to \int \frac{d\dot y}{g+k\dot y} = -\int dt + C_1 \to \frac1k \ln(g+k\dot y) = -t + C_1$$

poč. uslov: $\dot y(0) = v_0 \to C_1 = \frac1k \ln(g+kv_0)$

$$\to \dot y = \left(\frac gk + v_0\right)e^{-kt} - \frac gk \quad \text{– zakon promjene brzine}$$

$$y = \left(\frac gk+v_0\right)\int e^{-kt}dt - \frac gk\int dt + C_2 = -\frac1k\left(\frac gk + v_0\right)e^{-kt} - \frac gk t + C_2$$

poč. uslov $y(0)=0 \to C_2 = \frac1k\left(\frac gk+v_0\right)$

$$\Rightarrow \boxed{y = \frac{g+kv_0}{k^2}\left(1-e^{-kt}\right) - \frac gk t} \quad \text{– jednačina kretanja}$$

b) $\dot y(t_1)=0 \to t_1 = \frac1k\ln\left(1+\frac kg v_0\right) = 0{,}454$s – trenutak dostizanja ~~max~~ najveće visine (visina leta)

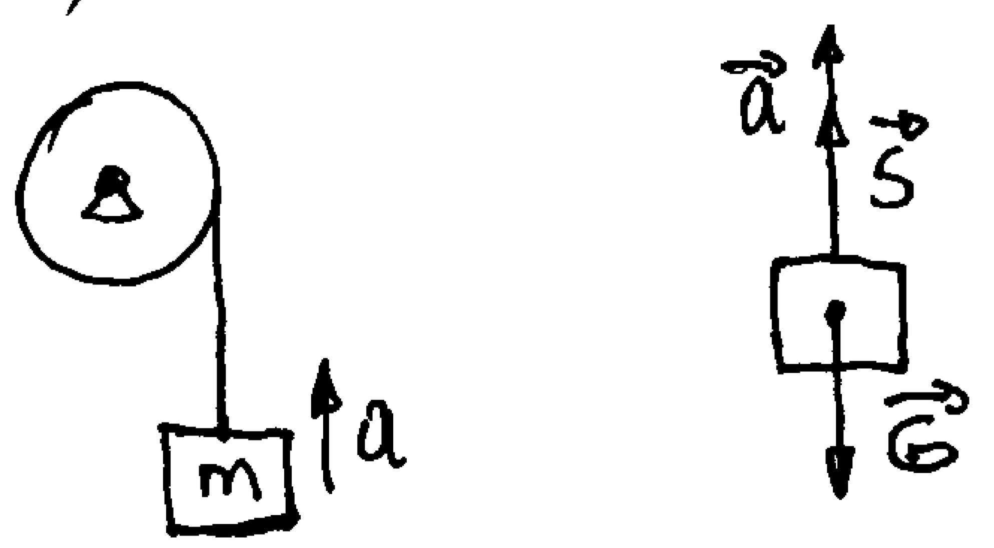
$H = y(t_1) = 1{,}09$ m – visina leta;

$h = \frac{v_0^2}{2g} = 1{,}27$ m – visina leta u bezvazdušnom prostoru;

$$\Rightarrow \boxed{H = 0{,}86h}$$

Zadaci za vježbanje

1. Tijelo mase $m = 50\,kg$, obješeno za kraj konopca, podiže se sa ubrzanjem $a = 0{,}5\ m/s^2$. Odrediti silu zatezanja konopca.

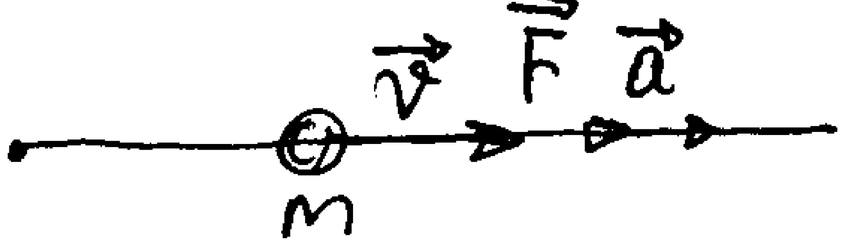


$$m\vec a = \vec G + \vec S$$

$$\uparrow\ ma = -G + S\ ,\quad G = mg = 50 \cdot 9{,}81 = 490{,}5\,N$$

$$\Rightarrow S = ma + G = 50 \cdot 0{,}5 + 490{,}5 = \boxed{515{,}5\,N}$$

2. Tačka mase $m = 12\,kg$ kreće se pravolinijski sa brzinom $v = e^{0{,}1t}$. Odrediti intezitet rezultujuće sile koja djeluje na tačku u trenutku $t_1 = 50\,s$.



$$ma = F\ ,\quad a = \frac{dv}{dt} = 0{,}1e^{0{,}1t}\ ,\quad F = 0{,}1me^{0{,}1t}\ ,\quad \boxed{F(t_1) = 178{,}1\,N}$$

3. Tačka mase $m = 1\,kg$ kreće se duž horizontalne ose Ox pod dejstvom sile $F_x = 5\sin t$. Za početne uslove: $x(0) = 0$, $\dot x(0) = 0$ odrediti: a) konačnu jednačinu kretanja tačke; b) ubrzanje, brzinu i položaj tačke u trenutku $t_1 = 2\pi\,s$.

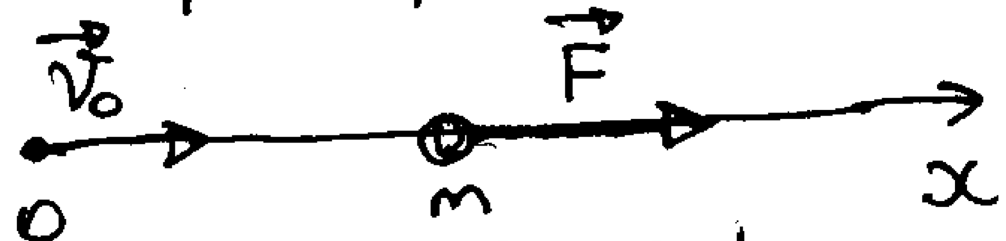
$$m\ddot x = F_x \Rightarrow \ddot x = 5\sin t\ ,\quad \dot x = 5\underbrace{\int \sin t\,dt}_{-\cos t} + C_1\ ,\quad \dot x(0) = 0 \Rightarrow C_1 = 5 \Rightarrow \dot x = 5(1-\cos t)$$

$$x = 5\int (1-\cos t)\,dt + C_2 = 5t - 5\sin t + C_2\ ,\quad x(0) = 0 \Rightarrow C_2 = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{x = 5(t - \sin t)}\ ,\quad b)\ \ddot x(t_1) = 0\ ,\ \dot x(t_1) = 0\ ,\ x(t_1) = 10\pi\,m = 31{,}4\,m$$

4. Odrediti put koji pređe tačka mase m duž ose Ox za vrijeme od jedne sekunde od početka kretanja, ako se ona kreće pod dejstvom sile $F_x = 12mt^2$. Početni uslovi su: $t_0 = 0$: $x(t_0) = 3\,m$, $\dot x(t_0) = 6\ m/s$ (Odgovor: 10 m)

5. Tačka mase $m = 2\,kg$ kreće se pravolinijski duž ose Ox pod dejstvom sile čija se projekcija na tu osu mijenja po zakonu $F_x = 3x^2$. Ako je u početnom trenutku tačka bila u koordinatnom početku i imala početnu brzinu $V_{0x} = 1\ m/s$ odrediti brzinu i ubrzanje tačke nakon što ona pređe put dužine 2 m.



$$m\ddot x = F_x \Rightarrow \ddot x = \frac{3}{2}x^2 \text{ – diferencijalna jednačina kretanja}$$

Transformacija $\ddot x = \dot x\dfrac{d\dot x}{dx}$ razdvaja promjenljive u dif. jed.: $\dot x\,d\dot x = \frac{3}{2}x^2dx$

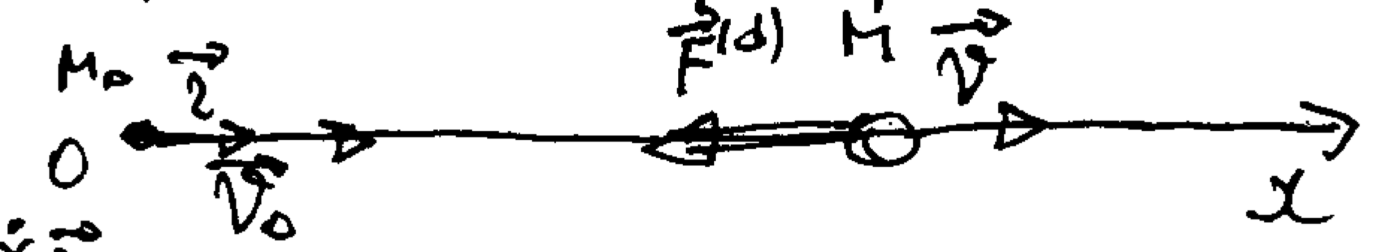
$$\Rightarrow \int \dot x\,d\dot x = \frac{3}{2}\int x^2dx + C \Rightarrow \frac{\dot x^2}{2} = \frac{3}{2}\cdot\frac{x^3}{3} + C$$

$$\text{Za } x_0 = 0,\ V_{0x} = \dot x_0 = 1 \Rightarrow C = \frac{1}{2} \Rightarrow \dot x = \sqrt{1 + x^3}$$

$$V = \dot x(x=2) = 3\ \frac{m}{s}$$

$$a = \ddot x(x=2) = 6\ \frac{m}{s^2}$$

6. Tačka mase $m=4\,kg$ kreće se pravolinijski samo pod dejstvom sile otpora $F^{(d)}=0{,}8v$. Kroz koliko sekundi od početka kretanja početnom brzinom v_0 će se brzina tačke smanjiti 10 puta. Koliki put pređe tačka za to vrijeme ako je $v_0=10\,\frac{m}{s}$.



$m\vec{a}=\vec{F}^{(d)},\quad \vec{F}^{(d)}=-0{,}8\vec{v},\quad \vec{a}=\ddot{x}\,\vec{i},\ \vec{v}=\dot{x}\,\vec{i}$

$m\ddot{x}=-0{,}8\dot{x} \rightarrow \ddot{x}=-0{,}2\dot{x}$, tj. $\dfrac{d\dot{x}}{dt}=-0{,}2\dot{x}$

$\Rightarrow \dfrac{d\dot{x}}{\dot{x}}=-0{,}2\,dt \Rightarrow \int\dfrac{d\dot{x}}{\dot{x}}=-0{,}2\int dt + C_1$

$\Rightarrow \ln\dot{x}=-0{,}2t+C_1 \quad (*)$

Početni uslov za brzinu $\dot{x}(0)=v_0 \Rightarrow C_1=\ln v_0$ u $(*) \Rightarrow \dot{x}=v_0e^{-0{,}2t} \quad (**)$

$\dfrac{v_0}{\dot{x}(t_1)}=10 \Rightarrow e^{0{,}2t_1}=10 \Rightarrow \boxed{t_1=5\ln 10=11{,}5\,s}$

$(**) \Rightarrow dx=v_0e^{-0{,}2t}dt \Rightarrow x=v_0\int e^{-0{,}2t}dt+C_2$

$x=-5v_0e^{-0{,}2t}+C_2$

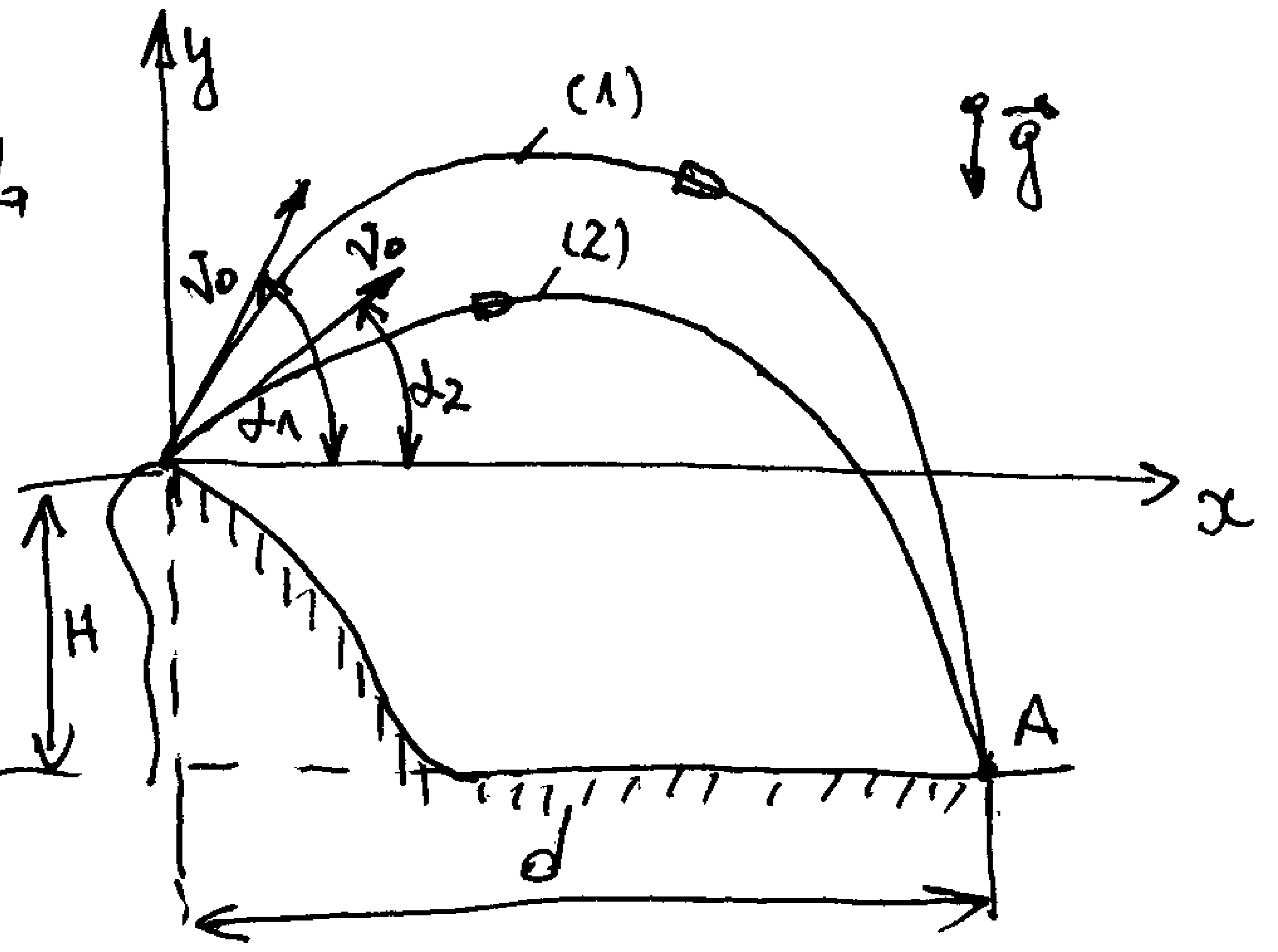
Početni uslov za položaj $x(0)=0 \Rightarrow C_2=5v_0$

$\Rightarrow x=5v_0\left(1-e^{-0{,}2t}\right)$ – konačna jednačina kretanja

Za $v_0=10\,\frac{m}{s}$ pređeni put za vrijeme t_1 je $x(t_1)=45\,m$

7. Sa vrha brda ispaljena su iz topa dva projektila istom početnom brzinom od $100\,\frac{m}{s}$ ali pod elevacionim uglovima od $30°$ i $45°$ i udarila su u istu tačku u horizontu podnožja brda. Kolika je visina brda. Otpor vazduha zanemariti.

$v_0=100\,\frac{m}{s},\ \alpha_1=45°,\ \alpha_2=30°$



Jednačine trajektorija prvog i drugog projektila su

$y^{(1)}=x^{(1)}\operatorname{tg}\alpha_1-\dfrac{g\,x^{(1)2}}{2v_0^2\cos^2\alpha_1}$

$y^{(2)}=x^{(2)}\operatorname{tg}\alpha_2-\dfrac{g\,x^{(2)2}}{2v_0^2\cos^2\alpha_2}$

U tački A je $x^{(1)}=d,\ y^{(1)}=-H;\ x^{(2)}=d,\ y^{(2)}=-H$

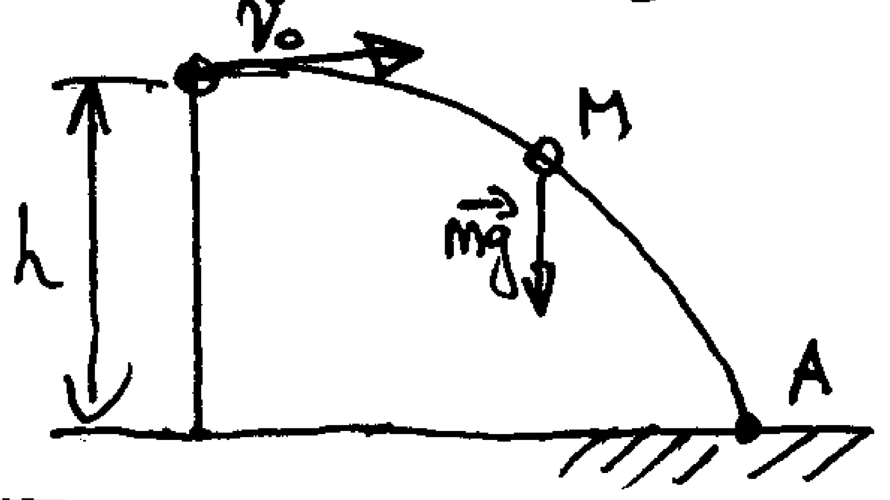
pa je

$(*)\left\{\begin{array}{l} -h=d\operatorname{tg}\alpha_1-\dfrac{g\,d^2}{2v_0^2\cos^2\alpha_1} \\ -h=d\operatorname{tg}\alpha_2-\dfrac{g\,d^2}{2v_0^2\cos^2\alpha_2}\end{array}\right.$

Izjednačavanjem desnih strana ovih jednačina uz zamjenu brojnih vrijednosti dobijamo da je $d=1292{,}5\,m$ što kada zamijenimo u jednu od jednačina $(*)$ daje

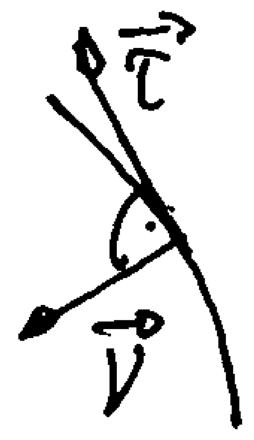
$\boxed{H=346{,}3\,m}$

8. Sa visine $h = 600\,m$ u horizontalnom pravcu izbaci se projektil početnom brzinom $v_0 = 30\,\frac{m}{s}$. Odrediti intezitet brzine kojom projektil pada na zemlju.



Odgovor: $v_A = 113\,\frac{m}{s}$

9. Tačka mase $m = 2\,kg$ kreće se po krivolinijskoj trajektoriji pod dejstvom sile $\vec{F} = 3\vec{\tau} + 4\vec{\nu}$. Odrediti intezitet ubrzanja tačke

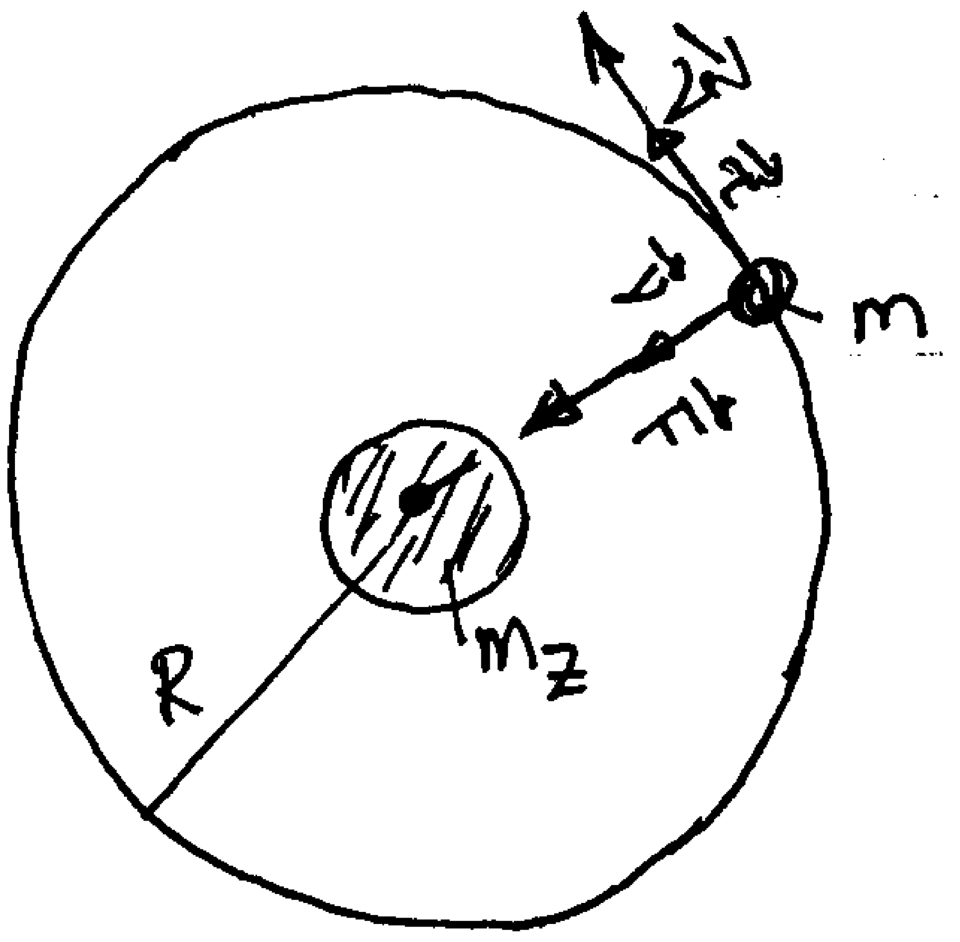


$$m\vec{a} = \vec{F} \Rightarrow m a_\tau = F_\tau \Rightarrow a_\tau = \frac{3}{2} = 1{,}5\,\frac{m}{s^2}$$

$$m a_\nu = F_\nu \qquad a_\nu = \frac{4}{2} = 2\,\frac{m}{s^2}$$

$$\Rightarrow a = \sqrt{a_\tau^2 + a_\nu^2} = 2{,}5\,\frac{m}{s^2}$$

10. Kosmička stanica kreće se oko Zemlje po kružnoj putanji poluprečnika $R = 7 \cdot 10^6\,m$. Odrediti brzinu stanice u km/s, ako je masa Zemlje $m_Z = 5{,}976 \cdot 10^{24}\,kg$, a gravitaciona konstanta $f = 6{,}672 \cdot 10^{-11}\,Nm^2/kg^2$



$$m\vec{a} = \vec{F} \Rightarrow m a_\tau = 0$$

$$m a_\nu = F_\nu$$

$$a_\nu = \frac{v^2}{R}, \quad F_\nu = F = \frac{f\, m \cdot m_Z}{R^2}$$

$$\Rightarrow v = \sqrt{\frac{f m_Z}{R}} = 7{,}55\,\frac{km}{s}$$