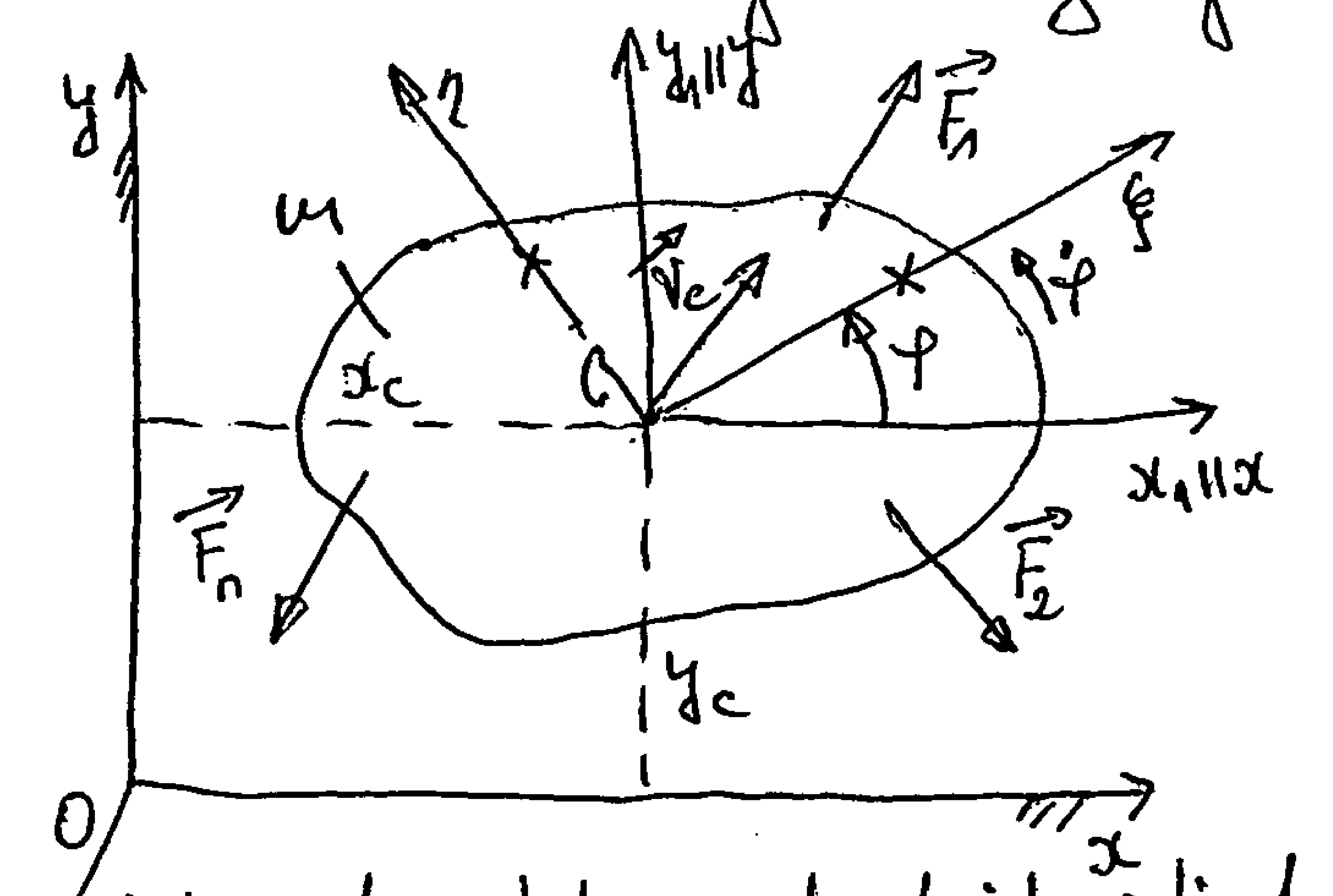
X sedmica nastave

- predavanja sa primjerima

7.3 Ravno kretanje krutog tijela



Cx_1y_1 – translatorno pokretni koordinatni sistem vezan za centar inercije tijela.
$C\xi\eta$ – koordinatni sistem čvrsto vezan za tijelo (ravni presjek tijela i ravni mat. sim.)

Pretpostavke:

- tijelo ima ravan materijalne simetrije (Oxy ravan)
- sve sile koje djeluju na tijelo leže u ovoj ravni
- početne brzine svih tačaka tijela simetrično su raspoređene u odnosu na ravan Oxy.

Pod ovim uslovima slobodno kruto tijelo će izvoditi ravno kretanje. Takođe, posredstvom veza tijelo može biti prinuđeno da vrši ravno kretanje.

Položaj krutog tijela koje vrši ravno kretanje određen je u svakom trenutku položajem pola i uglom obrtanja tijela oko pola. Dinamički zadatak ravnog kretanja najprostije se rješava ako za pol izaberemo centar inercije C tijela; u tom slučaju položaj tijela je određen koordinatama x_C, y_C i uglom obrtanja φ.

Sastavljanje diferencijalnih jednačina ravnog kretanja krutog tijela bazirano je na primjeni zakona o kretanju centra inercije i o promjeni kinetičkog momenta za centralnu osu Cz upravnu na ravan kretanja.

$$m\vec{a}_C = \sum \vec{F}_i\,, \quad \vec{a}_C = \ddot{\vec{r}}_C = \ddot{x}_C\vec{i} + \ddot{y}_C\vec{j}$$

$$\frac{dL_{Cz}}{dt} = \sum M_{Cz}^{\vec{F}_i}\,, \quad L_{Cz} = L_{Crz} = J_C\dot\varphi\,, \quad J_C = J_{Cz} \text{ – moment inercije za osu } Cz$$

Projicirajući prvu jednačinu na koordinatne ose, konačno dobijemo dif. jed. ravnog kretanja tijela

$$\left.\begin{aligned} m\ddot{x}_C &= \sum F_{ix} \\ m\ddot{y}_C &= \sum F_{iy} \\ J_C\ddot\varphi &= \sum M_C^{\vec{F}_i} \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Kada su poznate jednačine kretanja tijela $x_C = x_C(t)$, $y_C = y_C(t)$, $\varphi = \varphi(t)$, iz jednačina (1) određujemo glavni vektor $\vec{F}_R = \sum \vec{F}_i$ i glavni moment za osu Cz, $M_{Cz} = \sum M_C^{\vec{F}_i}$ spoljašnjih sila, koje djeluju na tijelo. S druge strane, ako su poznate spoljašnje sile i početni uslovi: $x_C(t_0) = x_{C0}$, $y_C(t_0) = y_{C0}$, $\varphi(t_0) = \varphi_0$, $\dot{x}_C(t_0) = \dot{x}_{C0}$, $\dot{y}_C(t_0) = \dot{y}_{C0}$, $\dot\varphi(t_0) = \dot\varphi_0$, integracijom jednačina (1) određujemo zakon ravnog kretanja $x_C = x_C(t)$, $y_C = y_C(t)$, $\varphi = \varphi(t)$.

Ako je tijelo neslobodno, poslije primjene principa oslobađanja od veza, primjenjujemo jednačine (1), podrazumijevajući pod spoljašnjim silama i aktivne sile i reakcije veza.

Umjesto jednačina (1) kada je poznata putanja centra inercije C tijela, jednačine ravnog kretanja pišemo u obliku

$$m\frac{dv_C}{dt} = \sum F_{iT}\,, \quad m\frac{v_C^2}{R_k} = \sum F_{iN}\,, \quad J_C\ddot\varphi = \sum M_C^{\vec{F}_i} \qquad (2)$$

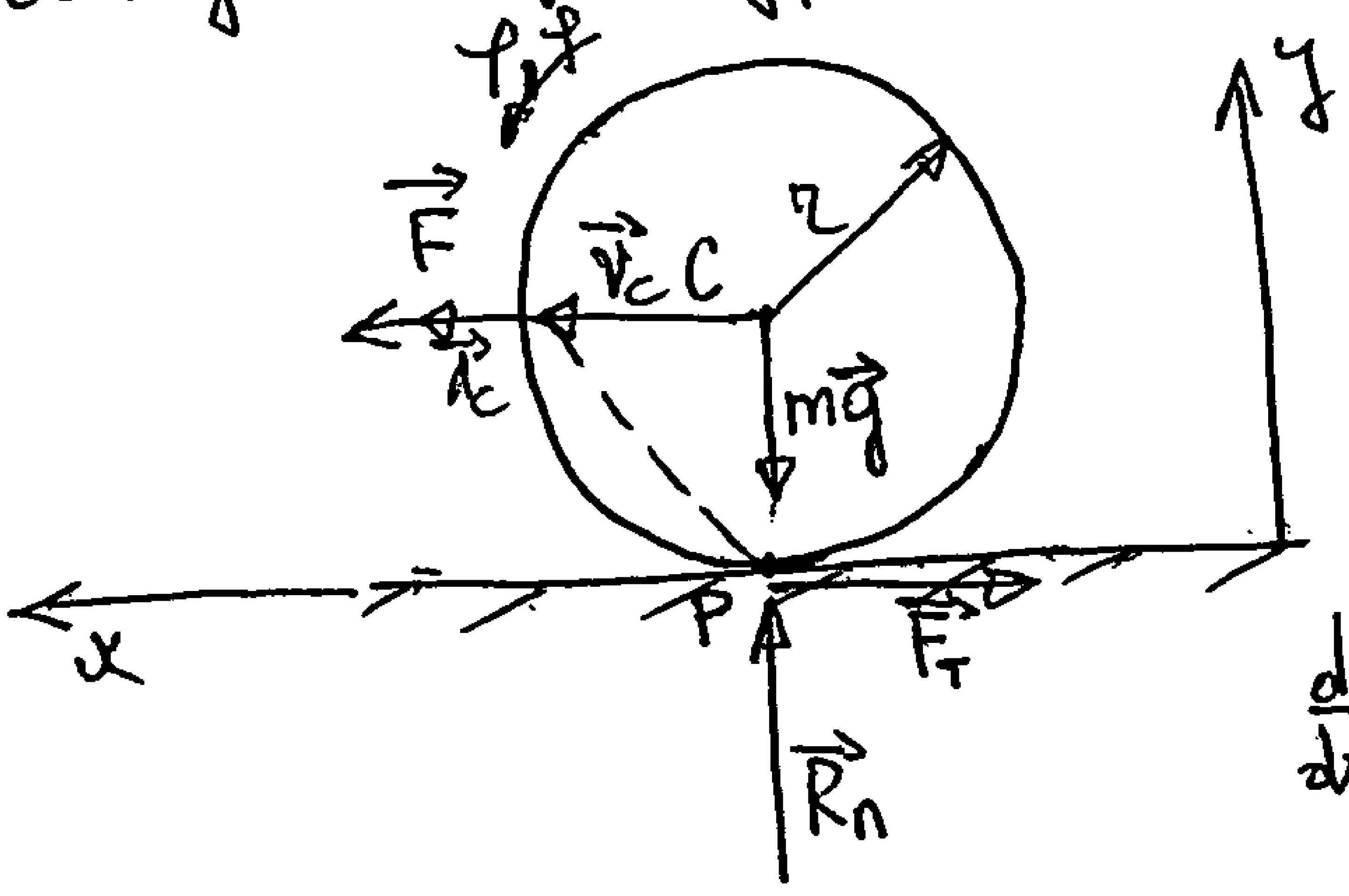
gdje su $\sum F_{iT}$ i $\sum F_{iN}$ zbirovi projekcija spoljašnjih sila na pravce tangente i normale putanje centra inercije, a R_k poluprečnik krivine iste putanje.

7.3.1 Kotrljanje tijela po podlozi

U probleme ravnog kretanja spadaju prostiji slučajevi kotrljanja tijela. Pri tome osnovnu ulogu imaju sile trenja sa svim svojim specifičnim osobinama koje su proučene u statici.

a) Kotrljanje po idealno krutoj podlozi.

Neka se cilindar poluprečnika osnove r i mase m kotrlja bez klizanja po idealno krutoj horizontalnoj podlozi pod dejstvom horizontalne sile F.



$$\vec{v}_C = \dot{x}_C \vec{i}, \quad \vec{a}_C = \ddot{x}_C \vec{i}$$

U slučaju kotrljanja bez klizanja tačka dodira P između cilindra i horizontalne ravni je trenutni pol brzine, pa je

$$\dot{x}_C = r\dot{\varphi} \quad (1)$$ – kinematički uslov kotrljanja bez klizanja

$$\frac{d}{dt}(1) \Rightarrow \ddot{x}_C = r\ddot{\varphi} \quad (2)$$

Na cilindar djeluju sila teže $m\vec{g}$, sila $\vec{F}$ i reakcija podloge koja se razlaže na dvije komponente: normalnu $\vec{R}_n$ i silu trenja $\vec{F}_T$ u horizontalnom pravcu. Dif. jed. ravnog kretanja su:

$$\left.\begin{aligned} m\ddot{x}_c &= F - F_T \\ 0 &= -mg + R_n \\ J_c\ddot{\varphi} &= F_T \cdot r \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

$$(3) \xrightarrow{(2)} \quad \ddot{x}_c = \frac{F}{m + J_c/r^2}, \quad F_T = \frac{J_c}{mr^2 + J_c} F, \quad R_n = mg$$

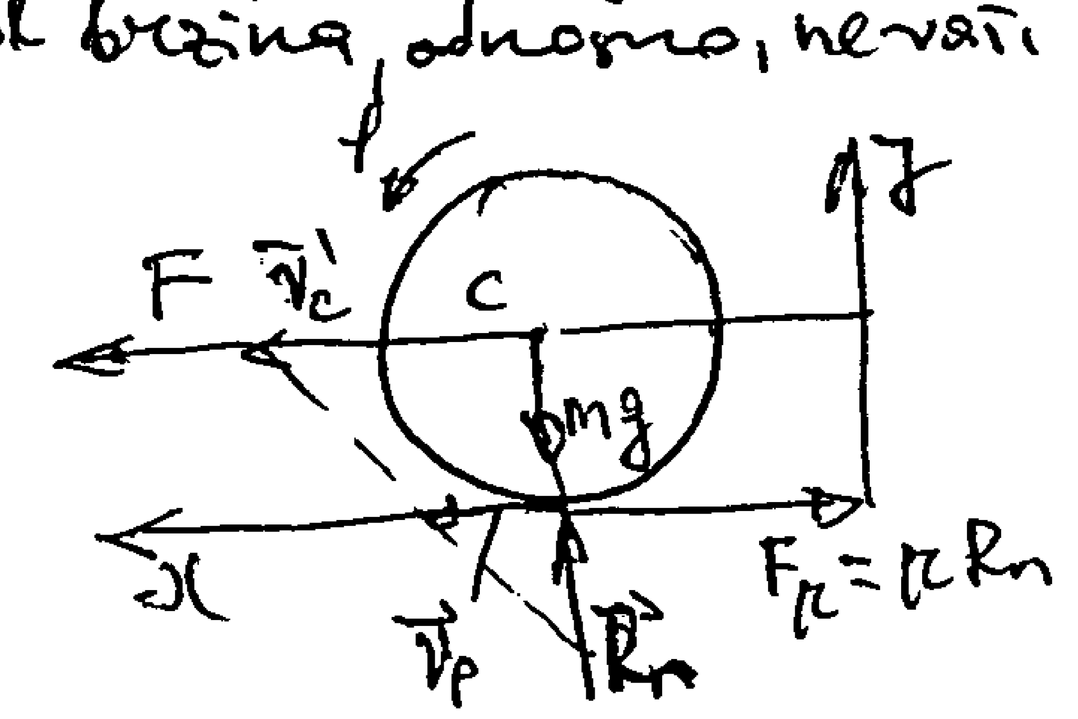
Pošto u posmatranom trenutku tačka P cilindra ne klizi po horizontalnoj ravni to je sila trenja F_T (sila trenja pri kotrljanju) identična sa silom trenja pri mirovanju koja se definiše u statici. Ona mora biti manja od granične sile trenja, koja je prema Kulonovom zakonu $F_{Tgr} = R_n \mu$ (μ – koeficijent trenja klizanja), tj

$$F_T < \mu R_n \qquad (4)$$

Uslov (4) predstavlja dinamički uslov kotrljanja bez klizanja. U našem slučaju on dovodi do uslova koji mora zadovoljavati pogonska sila F da bi se cilindar kotrljao bez klizanja, tj.

$$F < \mu \frac{mr^2 + J_c}{J_c} mg$$

Ako ovaj uslov nije zadovoljen nemoguće je ostvariti čisto kotrljanje i tada tačka P nije pol brzina, odnosno, ne važi veza (1). U slučaju kotrljanja sa klizanjem, dif. jed. ravnog kretanja su



$$m\ddot{x}_c = F - F_{tr}, \quad F_{tr} = \mu R_n$$

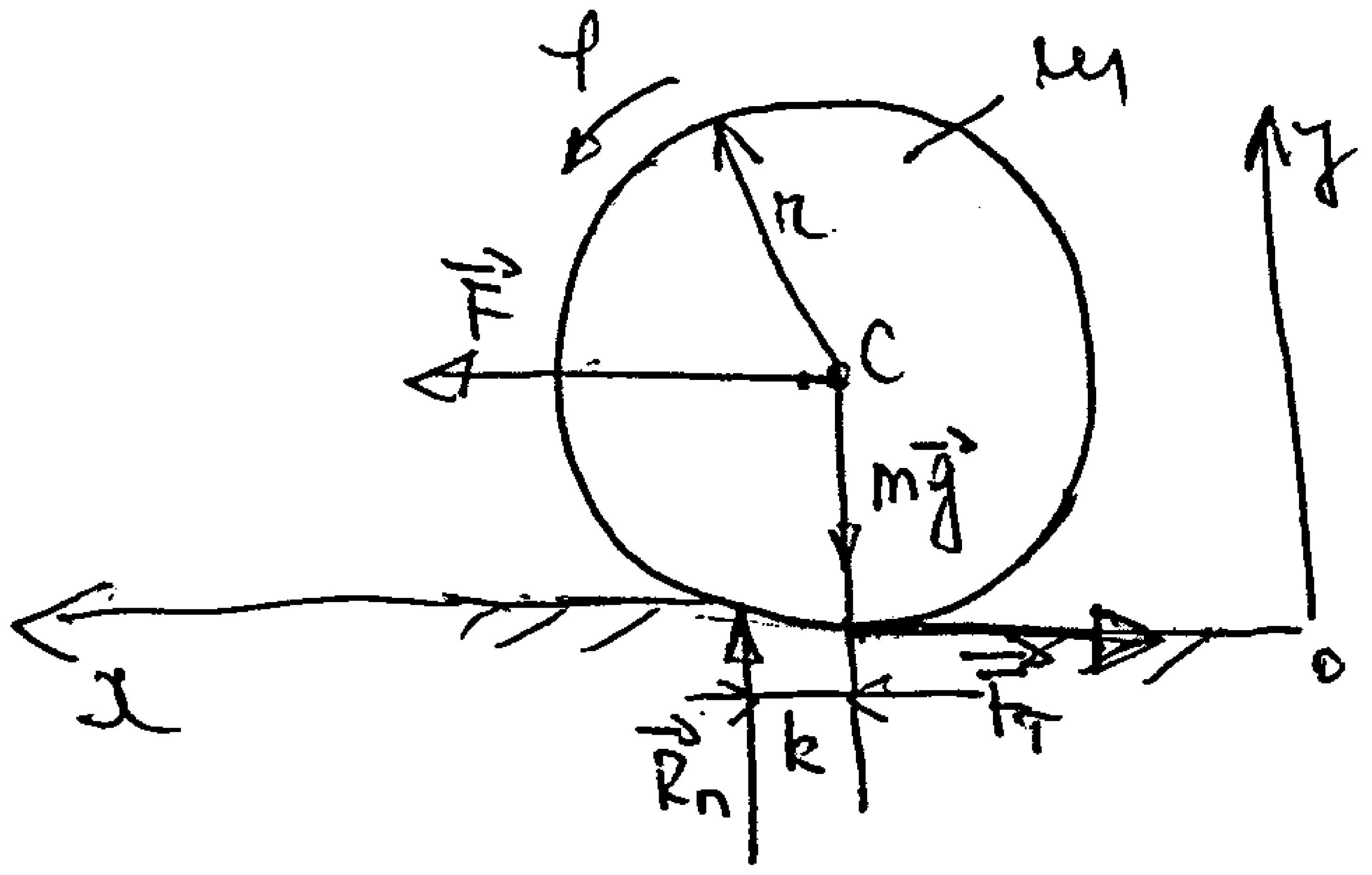
$$0 = -mg + R_n$$

$$J_c\ddot{\varphi} = F_{tr} \cdot r$$

b) Kotrljanje bez klizanja tijela po deformabilnoj podlozi

U realnijem modelu kotrljanja tijela uzima se u obzir izvjesna deformabilnost podloge, tako da sile deformacije podloge razvijaju moment otpora protiv kotrljanja čiji je smjer suprotan od smjera obrtanja cilindra.

$M_k = R_n \cdot k$, k - krak (koeficijent) trenja pri kotrljanju koji se određuje eksperimentalno a ima dimenziju dužine.



$$\ddot{x}_C = r\ddot{\varphi}$$

$$m\ddot{x}_C = -F_T$$

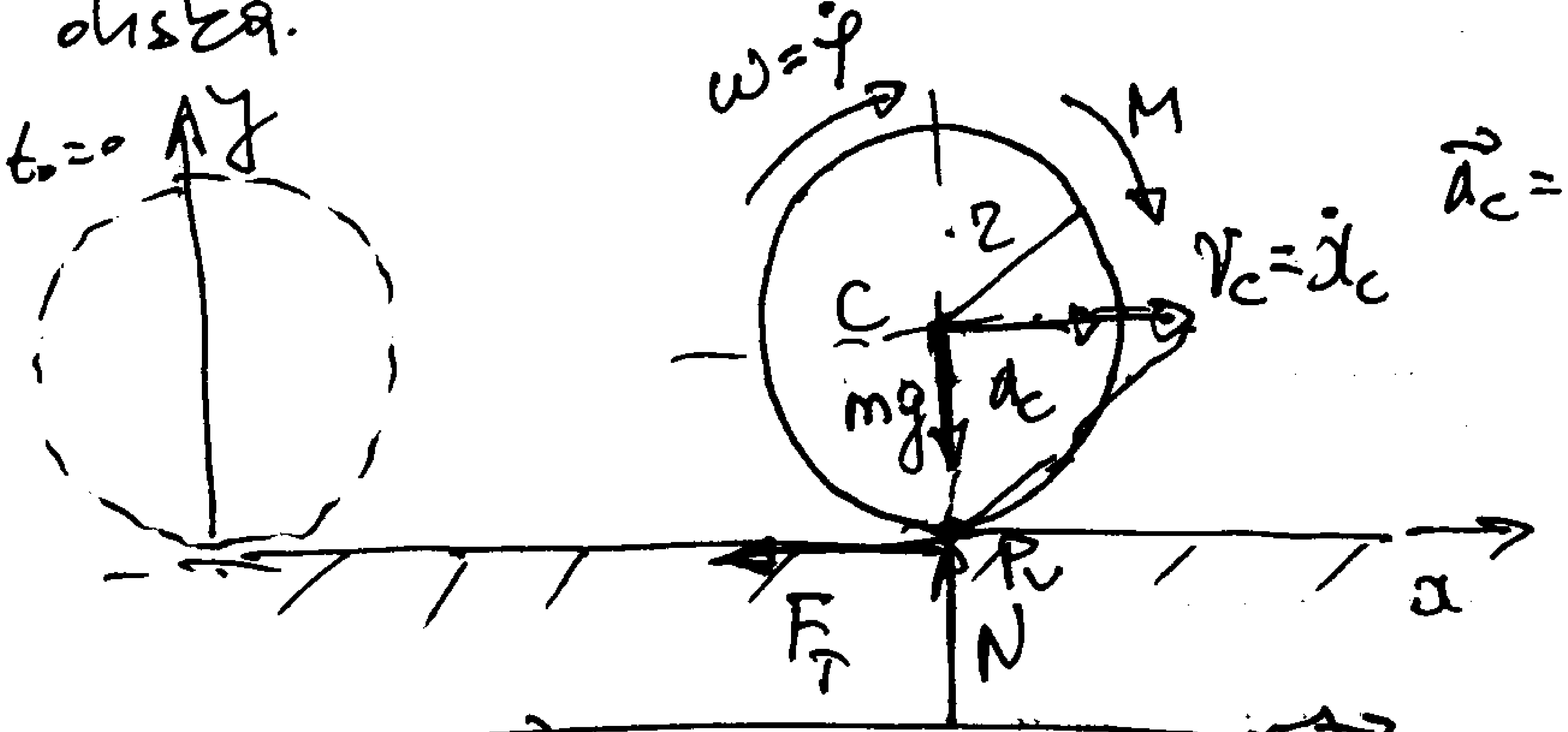
$$0 = -mg + R_n$$

$$J_C\ddot{\varphi} = F_T r - R_n \cdot k$$

N: U slučajevima kada se uzima da je statički koeficijent trenja μ_s različit od kinematičkog μ, u relaciji (4) je μ stat. koef. trenja.

Ravno kretanje k.t. (zadaci)

1. Homogeni disk, mase m i poluprečnika r, počinje kretanje bez početne brzine kotrljajući se bez klizanja po horizontalnoj ravni pod dejstvom sprega konstantnog momenta M. Ako je disk u početnom trenutku mirovao, odrediti jednačinu kretanja centra mase diska.



$$\vec{v}_C = v_C\vec{i} = \dot{x}_C\vec{i}$$

$$\vec{a}_C = a_C\vec{i} = \ddot{x}_C\vec{i}$$

$\dot{x}_C = r\dot\varphi$ – kinematički uslov kotrljanja bez klizanja

$$\Downarrow$$

$$\ddot{x}_C = r\ddot\varphi \quad (*)$$

$$\cancel{m\vec{a}_C = \sum \vec{F}_i^s \Rightarrow m\vec{a}_C = m\vec{g}+\vec{N}+\vec{F}_T}$$

$$m\ddot{x}_C = \sum F_{ix}^s \Rightarrow m\ddot{x}_C = -F_T \quad (1)$$

$$m\ddot{y}_C = \sum F_{iy}^s \Rightarrow m\cdot 0 = -mg+N \quad (2)$$

$$J_C\ddot\varphi = \sum M_C^{\vec{F}_i^s} \Rightarrow J_C\ddot\varphi = F_T r + M \quad (3), \quad J_C = mr^2/2$$

$$(1)(3) \xRightarrow{(*)} \ddot{x}_C = \frac{2M}{3mr} = const \xRightarrow{(**)} x_C = \cancel{x_{C0}}^{\,0} + \cancel{\dot{x}_{C0}}^{\,0} t + \frac{2M}{3mr}\frac{t^2}{2}$$

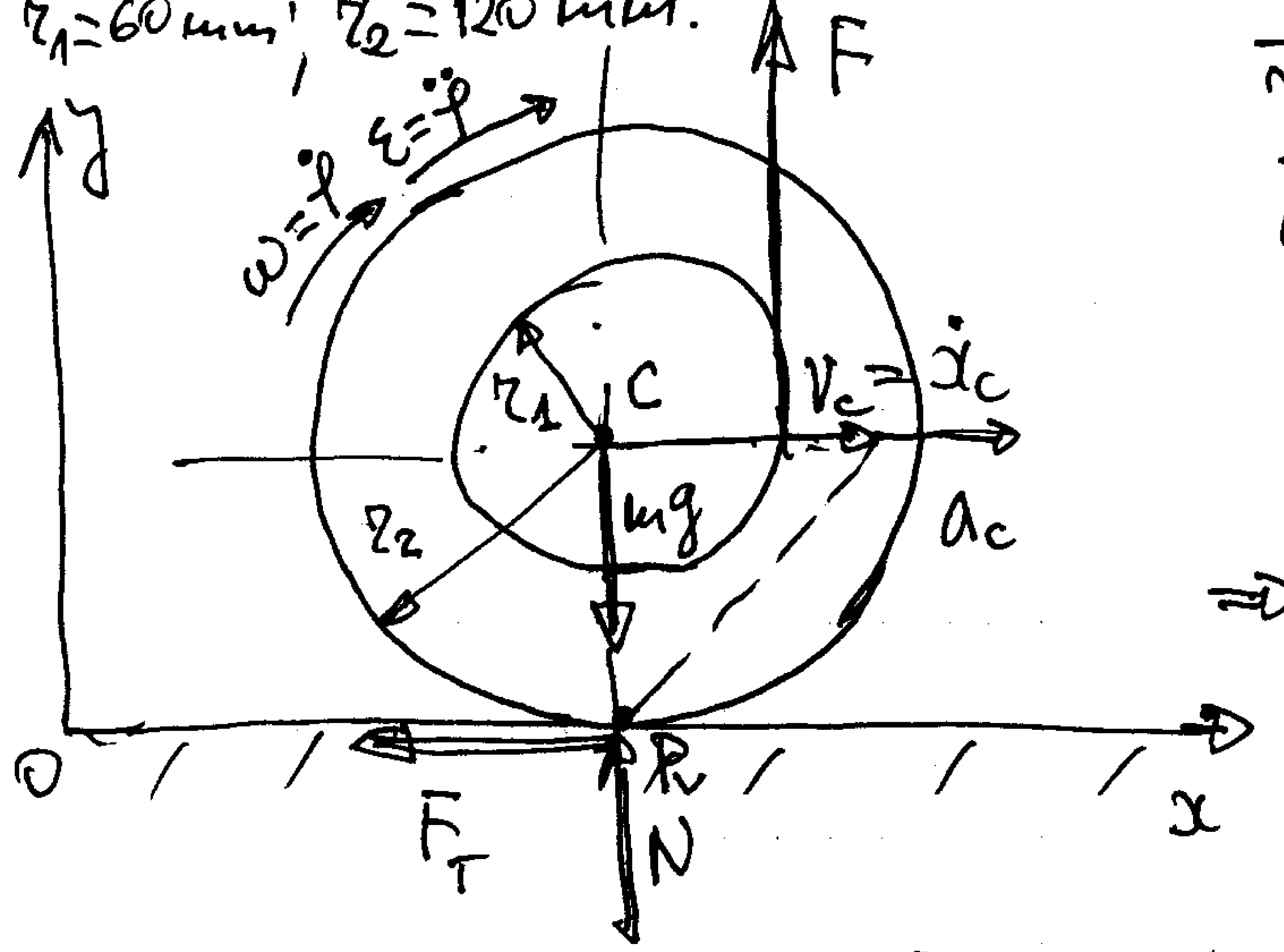
$$\boxed{x_C = \frac{Mt^2}{3mr}}$$ – jednačina kretanja centra diska

Koliki mora biti minimalni statički koeficijent trenja između diska i ravni u prethodnom zadatku da bi se ostvarilo kotrljanje bez klizanja?

$$(1) \xRightarrow{(**)} F_T = \frac{2M}{3r} \quad ; \quad (2) \Rightarrow N = mg$$

$$F_T = \mu_{s\min} N \Rightarrow \boxed{\mu_{s\min} = \frac{2M}{3mgr}}$$

2. Konopac namotan na doboš kalema vuče se vertikalnom silom $F=20N$. Kalem je mase $m=6kg$, a njegov poluprečnik inercije za centralnu osu upravnu na ravan kretanja $i_c=90mm$. Ako se kalem kotrlja bez klizanja po horizontalnoj ravni, odrediti: a) ugaono ubrzanje kalema i ubrzanje njegovog centra C; b) minimalnu vrijednost statičkog koeficijenta trenja μ_s saglasnu sa ovakvim kretanjem. Dato je: $r_1=60mm$; $r_2=120mm$.



$\vec{v_c}=v_c\vec{i}=\dot{x}_c\vec{i}$

$\vec{a_c}=a_c\vec{i}=\ddot{x}_c\vec{i}$

Kotrljanje bez klizanja:

$\dot{x}_c=r_2\dot{\varphi}$

$\Rightarrow \quad \ddot{x}_c=r_2\ddot{\varphi} \quad (*)$

$$m\ddot{x}_c=\sum F_{ix}^s \Rightarrow m\ddot{x}_c=-F_T \qquad (1)$$

$$m\ddot{y}_c=\sum F_{iy}^s \Rightarrow m\cdot 0=-mg+F+N \quad (2)$$

$$J_c\ddot{\varphi}=\sum M_c^{\vec{F}_i^s} \Rightarrow m i_c^2\ddot{\varphi}=F_T r_2-F\cdot r_1 \quad (3)$$

$$(1),(3)\xrightarrow{(*)} \ddot{x}_c=-\frac{F r_1 r_2}{m(i_c^2+r_2^2)}=-1{,}067\frac{m}{s^2}, \quad a_c=1{,}07\frac{m}{s^2}$$

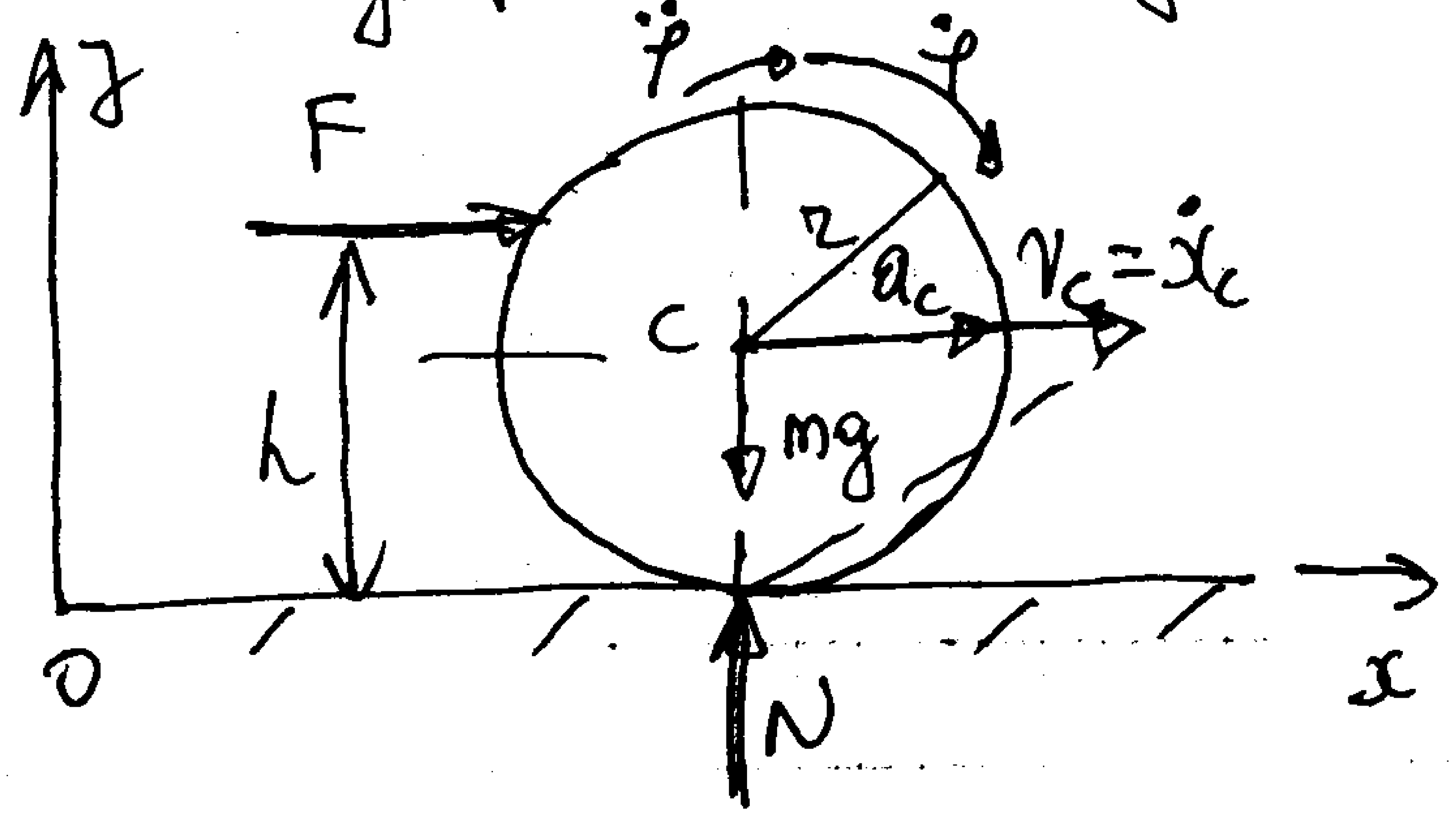
$$\varepsilon=\frac{\ddot{x}_c}{r_2}=8{,}89\, s^{-2}$$

b) $(2)\Rightarrow N=mg-F=38{,}86N$

$F_T=\mu_{s\min}N$; $(1)\Rightarrow F_T=6{,}4N$

$$\mu_{s\min}=\frac{F_T}{N}=\boxed{0{,}165}$$

3. Na kom rastojanju h od horizontalne glatke ravni treba djelovati silom F, konstantnog intenziteta i horizontalnog pravca, na homogeni disk mase m i poluprečnika r da bi se disk kotrljao bez klizanja po horizontalnoj ravni.



$$m\ddot{x}_c = \sum F_{ix}^s \Rightarrow m\ddot{x}_c = F \quad (1) \Rightarrow \ddot{x}_c = \frac{F}{m}$$

$$m\ddot{y}_c = \sum F_{iy}^s \Rightarrow m\cdot 0 = -mg + N \quad (2)$$

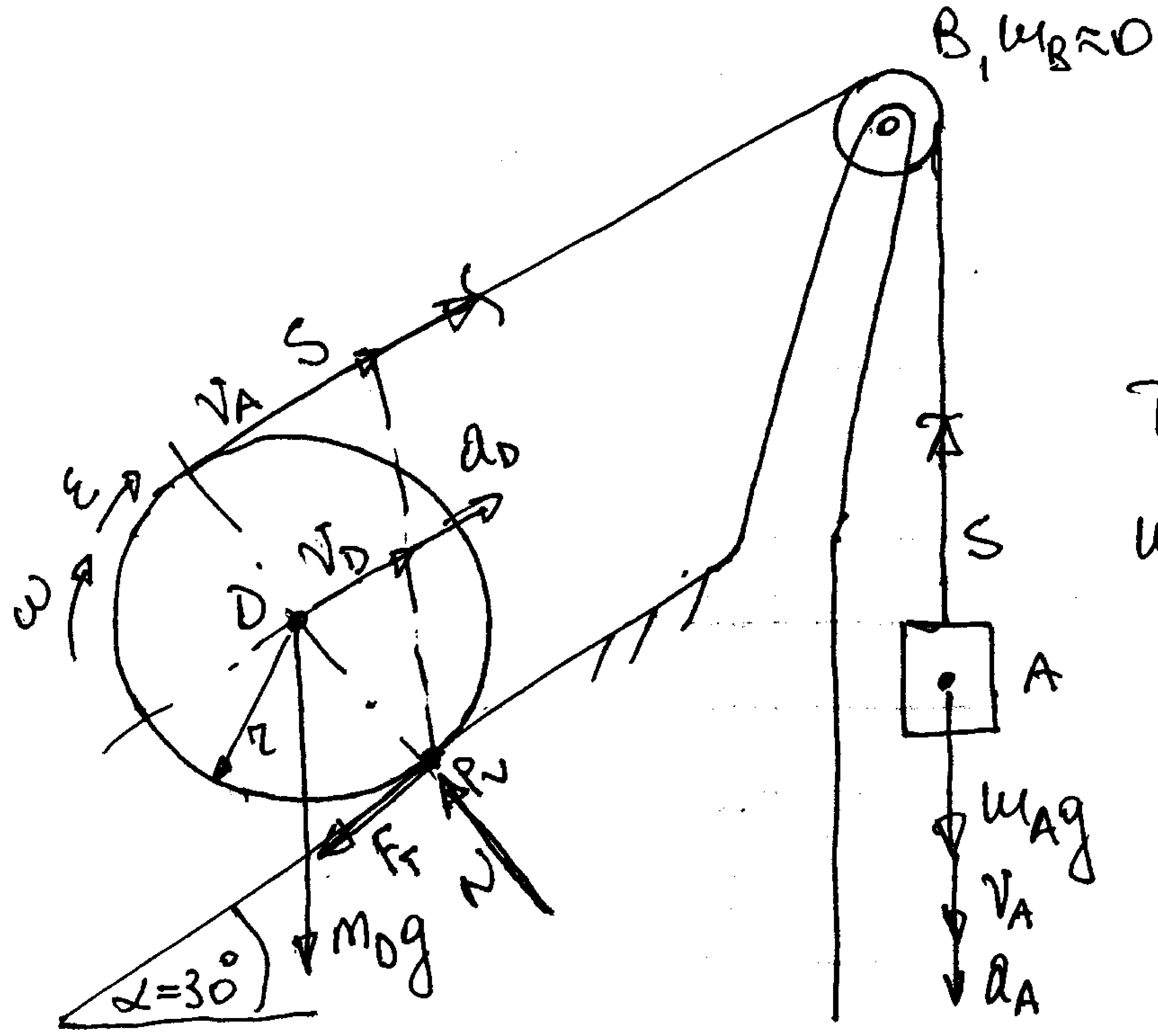
$$J_c\ddot{\varphi} = \sum M_c^{\vec{F}_i^s} \Rightarrow \frac{mr^2}{2}\cdot\ddot{\varphi} = F(h-r) \quad (3) \Rightarrow \ddot{\varphi} = \frac{2F(h-r)}{mr^2}$$

Kotrljanje bez klizanja: $\dot{x}_c = r\dot{\varphi} \Rightarrow \ddot{x}_c = r\ddot{\varphi}$

$$\Rightarrow \frac{F}{m} = \frac{2F(h-r)}{mr^2}\cdot r \Rightarrow \boxed{h = \frac{3}{2}r}$$

Nap. (U ovom modelu sila trenja je jednaka nuli jer je ravan glatka)

4. Teret A, mase $m_A = m$, vezan je za jedan kraj nerastegljivog užeta koje je prebačeno preko koture B, zanemarljive mase, a zatim namotano na koturu D, mase $m_D = 2m$. Kotur smatrati homogenim diskom koji se kotrlja bez klizanja po strmoj ravni nagiba $\alpha = 30°$. Odrediti ubrzanje centra kotura D.



$m_A = m, \; m_D = 2m$

$v_A = 2 v_D \xrightarrow{d/dt} a_A = 2 a_D \; (*)$

$\omega = \dfrac{v_A}{2r} \xrightarrow{d/dt} \varepsilon = \dfrac{2a_D}{2r} \; (**)$

Tijelo A (pravolinijska translacija):

$m_A a_A = m_A g - S \quad (1)$

Tijelo D (ravno kretanje): $m_D \vec{a}_D = m_D \vec{g} + \vec{S} + \vec{N} + \vec{F}_T \Rightarrow m_D a_D = -m_D g \sin\alpha - F_T + S \quad (2)$

$m_D \cdot 0 = -m_D g \cos\alpha + N \quad (3)$

$J_D \varepsilon = \Sigma M_D^{\vec{F}_i^s} \Rightarrow \dfrac{m_D r^2}{2} \varepsilon = F_T r + S \cdot r \quad (4)$

$(1), (2), (4) \xrightarrow{(*), (**)} \boxed{a_D = \dfrac{1}{7} g}$