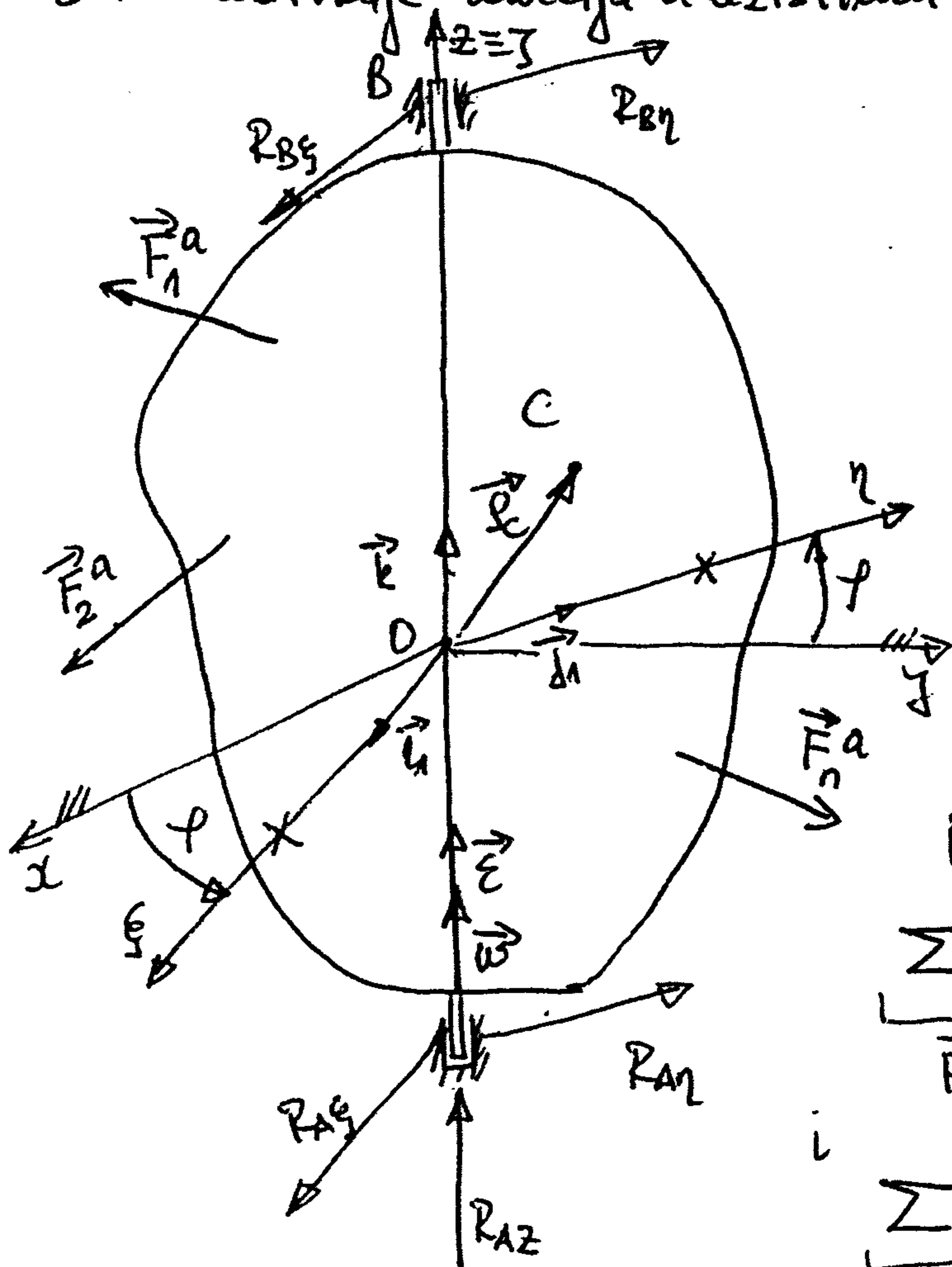


XII sedmica nastave
- predavanja i primjeri -

8.4 Obzornost reakcija u ležištima tijela koje se okreće oko nepokretne ose



$O\xi\eta z$ - početni koordinatni sistem vezan za tijelo

\vec{F}_i^a ($i=1, \dots, n$) - aktivne sile

$\vec{R}_A = R_{A\xi} \vec{e}_1 + R_{A\eta} \vec{e}_2 + R_{Az} \vec{e}_3$
 $\vec{R}_B = R_{B\xi} \vec{e}_1 + R_{B\eta} \vec{e}_2$ } reakcij ležišta A, B

$\vec{r}_C = \xi_c \vec{e}_1 + \eta_c \vec{e}_2 + z_c \vec{e}_3$ - vektor položaja centra inercije

$\vec{\omega} = \omega_z \vec{e}_3, \omega_z = \dot{\varphi}$

$\vec{\epsilon} = \epsilon_z \vec{e}_3, \epsilon_z = \frac{d\omega_z}{dt} = \dot{\varphi}$

U skladu sa D'Alembertovim principom je

$$\sum_i \vec{F}_i^a + \vec{R}_A + \vec{R}_B + \vec{F}_r^{\text{in}} = 0 \quad (1)$$

$$\sum_i \vec{M}_O^{\vec{F}_i^a} + \vec{M}_O^{\vec{R}_A} + \vec{M}_O^{\vec{R}_B} + \vec{M}_O^{\text{in}} = 0 \quad (2)$$

gdje su, na osnovu (8.3.5-6) i

$$\vec{F}_z^{in} = m(\eta_c \ddot{\varphi} + \xi_c \dot{\varphi}^2) \vec{l}_1 + m(-\xi_c \ddot{\varphi} + \eta_c \dot{\varphi}^2) \vec{j}_1, \quad (3)$$

$$\vec{M}_O^{in} = (J_{\xi z} \ddot{\varphi} - J_{\eta z} \dot{\varphi}^2) \vec{l}_1 + (J_{\eta z} \ddot{\varphi} + J_{\xi z} \dot{\varphi}^2) \vec{j}_1 - J_z \ddot{\varphi} \vec{e}, \quad (4)$$

$$\vec{M}_O^{\vec{R}_A} = \vec{OA} \times \vec{R}_A = \begin{vmatrix} \vec{l}_1 & \vec{j}_1 & \vec{e} \\ 0 & 0 & -\overline{OA} \\ R_{A\xi} & R_{A\eta} & R_{Az} \end{vmatrix} = R_{A\eta} \overline{OA} \vec{l}_1 - R_{A\xi} \overline{OA} \vec{j}_1; \quad \vec{M}_O^{\vec{R}_B} = \vec{OB} \times \vec{R}_B = -R_{B\eta} \overline{OB} \vec{l}_1 + R_{B\xi} \overline{OB} \vec{j}_1; \quad (5)$$

Skalarni oblici jednacina (1) i (2), uzimajući u obzir (3)-(5), ~~su~~ su

$$\left. \begin{aligned} \sum F_{i\xi}^a + R_{A\xi} + R_{B\xi} + m(\eta_c \ddot{\varphi} + \xi_c \dot{\varphi}^2) &= 0 \\ \sum F_{i\eta}^a + R_{A\eta} + R_{B\eta} + m(-\xi_c \ddot{\varphi} + \eta_c \dot{\varphi}^2) &= 0 \\ \sum F_{iz}^a + R_{Az} &= 0 \\ \sum M_{\xi}^{\vec{F}_i^a} + R_{A\eta} \overline{OA} - R_{B\eta} \overline{OB} + J_{\xi z} \ddot{\varphi} - J_{\eta z} \dot{\varphi}^2 &= 0 \\ \sum M_{\eta}^{\vec{F}_i^a} - R_{A\xi} \overline{OA} + R_{B\xi} \overline{OB} + J_{\eta z} \ddot{\varphi} + J_{\xi z} \dot{\varphi}^2 &= 0 \\ \sum M_z^{\vec{F}_i^a} - J_z \ddot{\varphi} &= 0 \end{aligned} \right\} (6)$$

Poslednja jednacina porijek sistema je, red zoni je izvedena, diferencijalna jednacina obrotanja. Iz nje, uz poznate početne uslove, određuje se zakon kretanja $\varphi = \varphi(t)$, a na osnovu njega i zakon promjene ugaone brzine $\dot{\varphi} = \dot{\varphi}(t)$.

Ako su ugaono ubrzanje i ugaona brzina poznati, a omise, pri datim silama \vec{F}_i^a , rešenje na osnovu jednacina (6) i (5), problem pronalazenja reakcija ležišta svodi se na rešavanje prvih pet jednacina (6) po pet nepoznatih: $R_{A\xi}, R_{A\eta}, R_{Az}, R_{B\xi}, R_{B\eta}$.

Pa da uoči da reakcije ležišta zavise tako od aktivnih sila tako i od dinamičkog stanja tijela, tj. od $\ddot{\varphi}$ i $\dot{\varphi}^2$. Svaku od reakcija ležišta možemo razložiti na dvije komponente: statičku (koja zavisi samo od aktivnih sila) i dinamičku (koja je posledica kretanja, tj. zavisi od inercijalnih sila).

$$\vec{R}_A = \vec{R}_A^{st} + \vec{R}_A^d, \quad \vec{R}_B = \vec{R}_B^{st} + \vec{R}_B^d \quad (7)$$

Statičke reakcije dobicemo iz jednacina (6) i (5), ako u njih stavimo $\ddot{\varphi} = \dot{\varphi} = 0$, tj.

$$\left\{ \begin{aligned} \sum F_{i\xi}^a + R_{A\xi}^{st} + R_{B\xi}^{st} &= 0; \quad \sum M_{\xi}^{\vec{F}_i^a} + R_{A\eta}^{st} \overline{OA} - R_{B\eta}^{st} \overline{OB} = 0; \\ \sum F_{i\eta}^a + R_{A\eta}^{st} + R_{B\eta}^{st} &= 0; \quad \sum M_{\eta}^{\vec{F}_i^a} - R_{A\xi}^{st} \overline{OA} + R_{B\xi}^{st} \overline{OB} = 0; \\ \sum F_{iz}^a + R_{Az}^{st} &= 0; \end{aligned} \right. \quad (8)$$

Dobro, statičke reakcije same bi postojale i kad bi se tijelo zaustavilo i bilo u ravnoteži pod dejstvom datog sistema sila.

Ako (7) unesemo u (6)₁₋₅, uzimajući u obzir (8), dobijemo sledeći sistem jednačina

$$\left. \begin{aligned} R_{A\xi}^d + R_{B\xi}^d + m(\eta_c \ddot{\varphi} + \xi_c \dot{\varphi}^2) &= 0 \\ R_{A\eta}^d + R_{B\eta}^d + m(-\xi_c \ddot{\varphi} + \eta_c \dot{\varphi}^2) &= 0 \\ R_{Az}^d &= 0 \\ R_{A\eta}^d \overline{OA} - R_{B\eta}^d \overline{OB} + J_{\xi z} \ddot{\varphi} - J_{\eta z} \dot{\varphi}^2 &= 0 \\ -R_{A\xi}^d \overline{OA} + R_{B\xi}^d \overline{OB} + J_{\eta z} \ddot{\varphi} + J_{\xi z} \dot{\varphi}^2 &= 0 \end{aligned} \right\} (9)$$

iz kojih određujemo dinamičke komponente reakcija ležišta.

Sada se može postaviti pitanje: Pod kojim uslovima će dinamičke reakcije ležišta biti jednake nuli?

Ako stavimo $\vec{R}_A = \vec{R}_B = \vec{0}$, prve dve jednačine sistema (9), daje

$$\left. \begin{aligned} \xi_c \dot{\varphi}^2 + \eta_c \ddot{\varphi} &= 0 \\ \eta_c \dot{\varphi}^2 - \xi_c \ddot{\varphi} &= 0 \end{aligned} \right\} (10)$$

što možemo tretirati kao homogeni sistem algebarskih jednačina po ξ_c i η_c i

$$\Delta = \begin{vmatrix} \dot{\varphi}^2 & \ddot{\varphi} \\ -\ddot{\varphi} & \dot{\varphi}^2 \end{vmatrix} = \dot{\varphi}^4 + \ddot{\varphi}^2 \neq 0$$

pa će uslovi (10) biti zadovoljeni samo onda kada je

$$\xi_c = 0, \quad \eta_c = 0 \quad (11)$$

tj., kada se centar inercije tijela nalazi na osi rotacije.

~~Pravim~~ Poslednje dve jednačine sistema (9) svode se na

$$\left. \begin{aligned} J_{\xi z} \ddot{\varphi} - J_{\eta z} \dot{\varphi}^2 &= 0 \\ J_{\xi z} \dot{\varphi}^2 + J_{\eta z} \ddot{\varphi} &= 0 \end{aligned} \right\} (12)$$

što možemo tretirati kao sistem jednačina po $J_{\xi z}$ i $J_{\eta z}$, čija je determinanta

$$\Delta = \begin{vmatrix} \ddot{\varphi} & -\dot{\varphi}^2 \\ \dot{\varphi}^2 & \ddot{\varphi} \end{vmatrix} = \ddot{\varphi}^2 + \dot{\varphi}^4 \neq 0$$

pa će uslovi (12) biti zadovoljeni samo kada je

$$J_{\xi z} = 0, \quad J_{\eta z} = 0, \quad (13)$$

odnosno kada je os rotacije glavna osa inercije tijela.

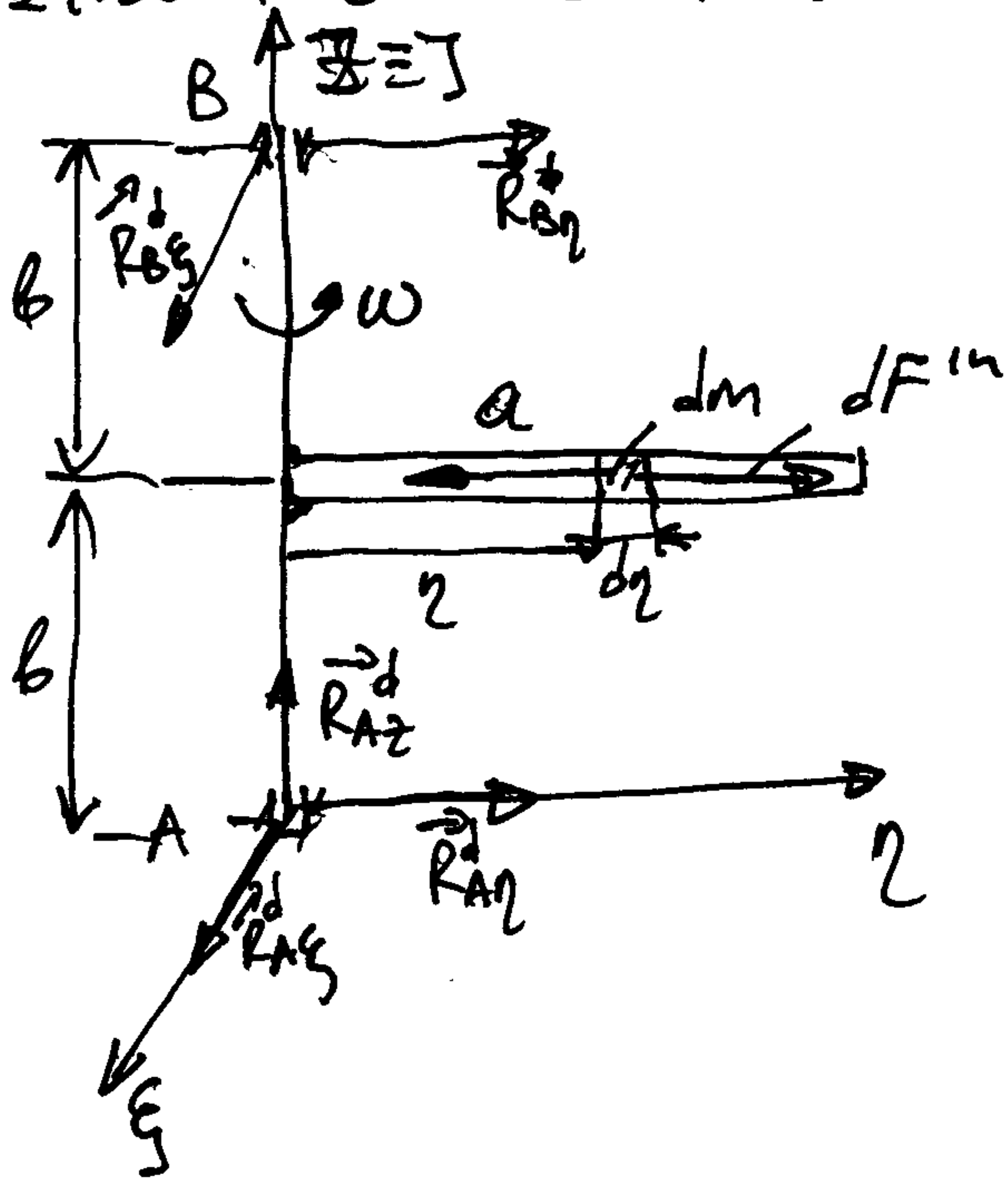
Ako je ispunjen uslov (11) kaže se da je tijelo statički uzvukotičeno, a ako su ispunjeni uslovi (11) i (13) dinamičke reakcije ležišta su jednake nuli i kaže se da je tijelo dinamički uzvukotičeno.

Prema tome, kruto tijelo koje se okreće oko nepotrebne ose bide dinamički uzavno-
kruženo ako je dotna osa glavna centralna osa inercije.

Mala odstupanja od uslova (11) i (13), tj. postojanje male neuzavnoteženosti, kod
obratnih elemenata u mašinama, pri velikim ugaonim brzinama izazivaju
značajne dinamičke reakcije, odnosno dinamička opterećenja u ležnjima.

Otklanjanje ove neuzavnoteženosti ^(balansiranje) može se postići dodavanjem ili oduzimanjem
koncentrisanih masa (najčešće dvije) tako da dotna osa postane glavna centralna
osa inercije

7. Homogeni štap, mase m i dužine l , završen je pod pravim uglom za vertikalnu osovinu koja se okreće konstantnom ugaonom brzinom ω . Odrediti dinamičke reakcije u ležistima A i B.



- Prvi (direktni) način.

Postavimo koordinatni sistem $A\xi\eta\zeta$ koji se okreće zajedno sa štapom tako da štap leži u ravni $A\eta\zeta$.

- Uočimo elementarni deo štapa i približimo mu inercijalnu silu, a uticaj ležišta zamijenimo dinamičkim reakcijama.

$$dF^{in} = a dm, \quad a = \eta \omega^2 \text{ jer je } \omega = \text{const}$$

$$dm = s'' dq, \quad s'' = \frac{m}{l}$$

$$\Rightarrow dF^{in} = \frac{m}{l} \omega^2 \eta dq \quad (*)$$

Udvoji zvonake (inercijalne + dinamičke reakcije):

$$" \sum F_{\xi i} = 0 " \quad R_{A\xi}^d + R_{B\xi}^d = 0 \quad (1)$$

$$" \sum F_{\eta i} = 0 " \quad R_{A\eta}^d + R_{B\eta}^d + \int_{(m)} dF^{in} = 0 \quad (2)$$

$$" \sum F_{\zeta i} = 0 " \quad R_{A\zeta}^d = 0 \quad (3)$$

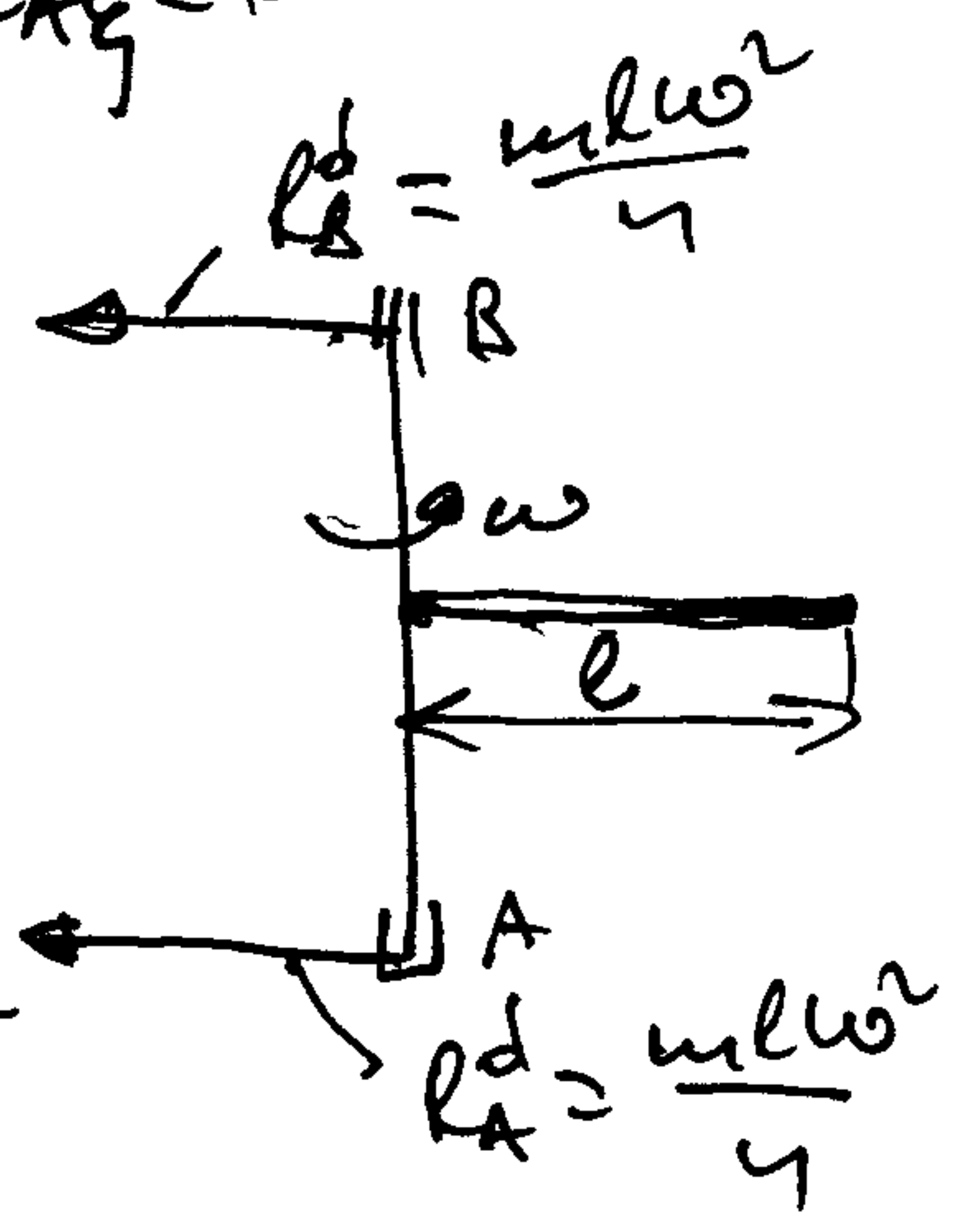
$$" \sum M_{\xi} = 0 " \quad R_{B\eta}^d \cdot 2b + \int_{(m)} b \cdot dF^{in} = 0 \quad (4)$$

$$" \sum M_{\eta} = 0 " \quad R_{B\xi}^d \cdot 2b = 0 \Rightarrow R_{B\xi}^d = 0 \stackrel{(1)}{\Rightarrow} R_{A\xi}^d = 0$$

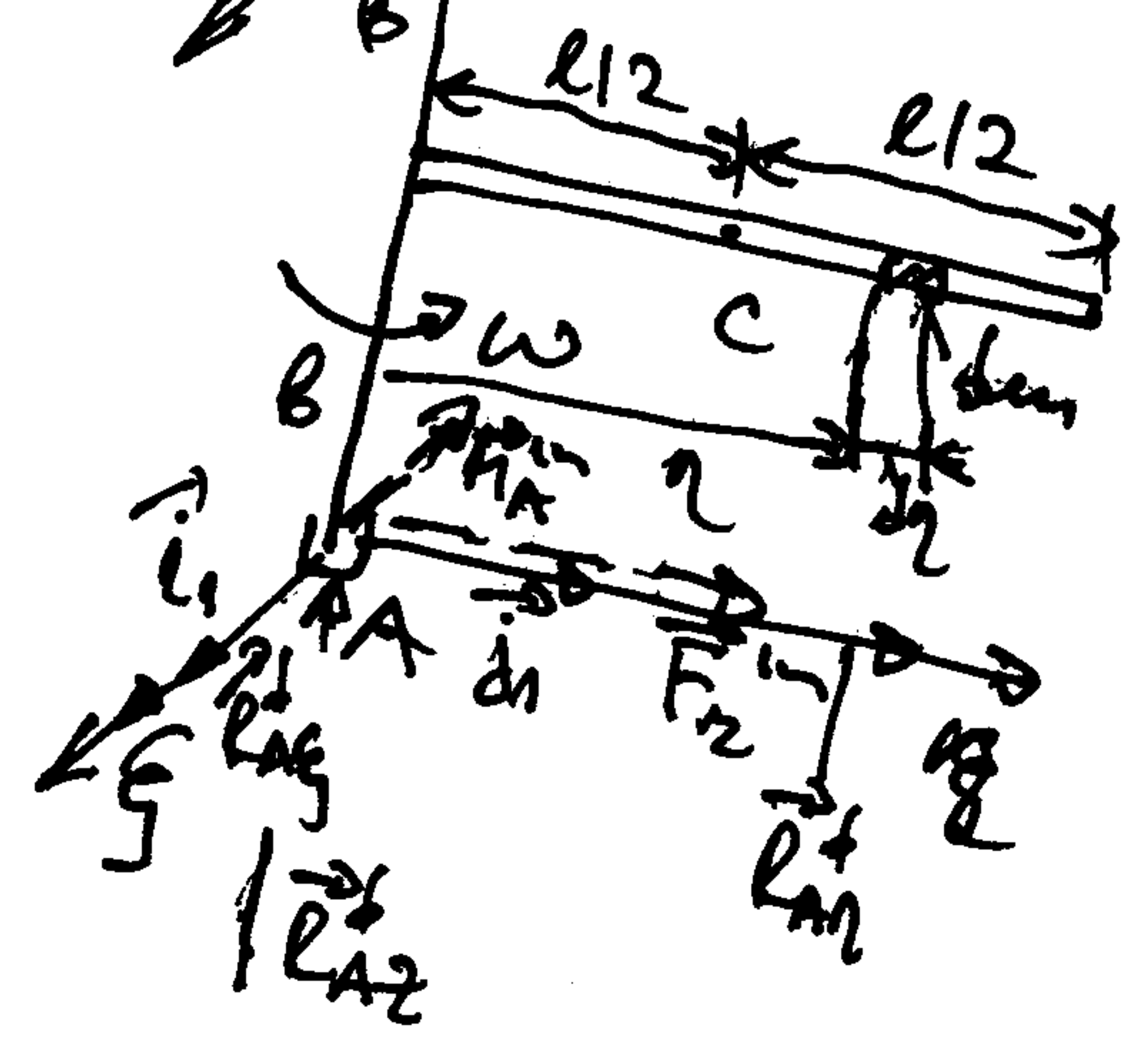
$$\int_{(m)} dF^{in} = \frac{m}{l} \omega^2 \int_0^l \eta dq = m \frac{l}{2} \omega^2$$

$$\int_{(m)} b dF^{in} = b \int_{(m)} dF^{in} = m \frac{lb}{2} \omega^2$$

$$(4), (2) \Rightarrow R_{B\eta}^d = -\frac{ml\omega^2}{4}, \quad R_{A\eta}^d = -\frac{ml\omega^2}{4}$$



inverted i frame



$$\vec{F}_2^{in} = m(\rho_c \epsilon + \xi_c \omega^2) \vec{i}_1 + m(-\rho_c \epsilon + \rho_c \omega^2) \vec{i}_2$$

$$\vec{M}_A^{in} = (J_{\xi 2} \epsilon - J_{\eta 2} \omega^2) \vec{i}_1 + (J_{\eta 2} \epsilon + J_{\xi 2} \omega^2) \vec{i}_2 - J_c \epsilon \vec{i}_1$$

$\omega = \text{const} \Rightarrow \epsilon = 0$
 $\xi_c = 0, \rho_c = \frac{l}{2}, J_{\xi 2} = \int \xi^2 dm = 0$

$$J_{\eta 2} = \int \eta^2 dm, dm = \rho'' d\eta = \frac{m}{l} d\eta$$

$$J_{\eta 2} = b \frac{m}{l} \int_0^l \eta^2 d\eta = m \frac{b^2 l}{2}$$

$$\vec{F}_2^{in} = m \frac{l}{2} \omega^2 \vec{i}_1, \vec{M}_A^{in} = -\frac{m b^2 l}{2} \omega^2 \vec{i}_1$$

$$\vec{R}_A + \vec{R}_B + \vec{F}_2^{in} = 0 \Rightarrow \begin{cases} R_{A\xi} + R_{B\xi} = 0 \\ R_{A\eta} + R_{B\eta} + m \frac{l}{2} \omega^2 = 0 \\ R_{A2} = 0 \end{cases}$$

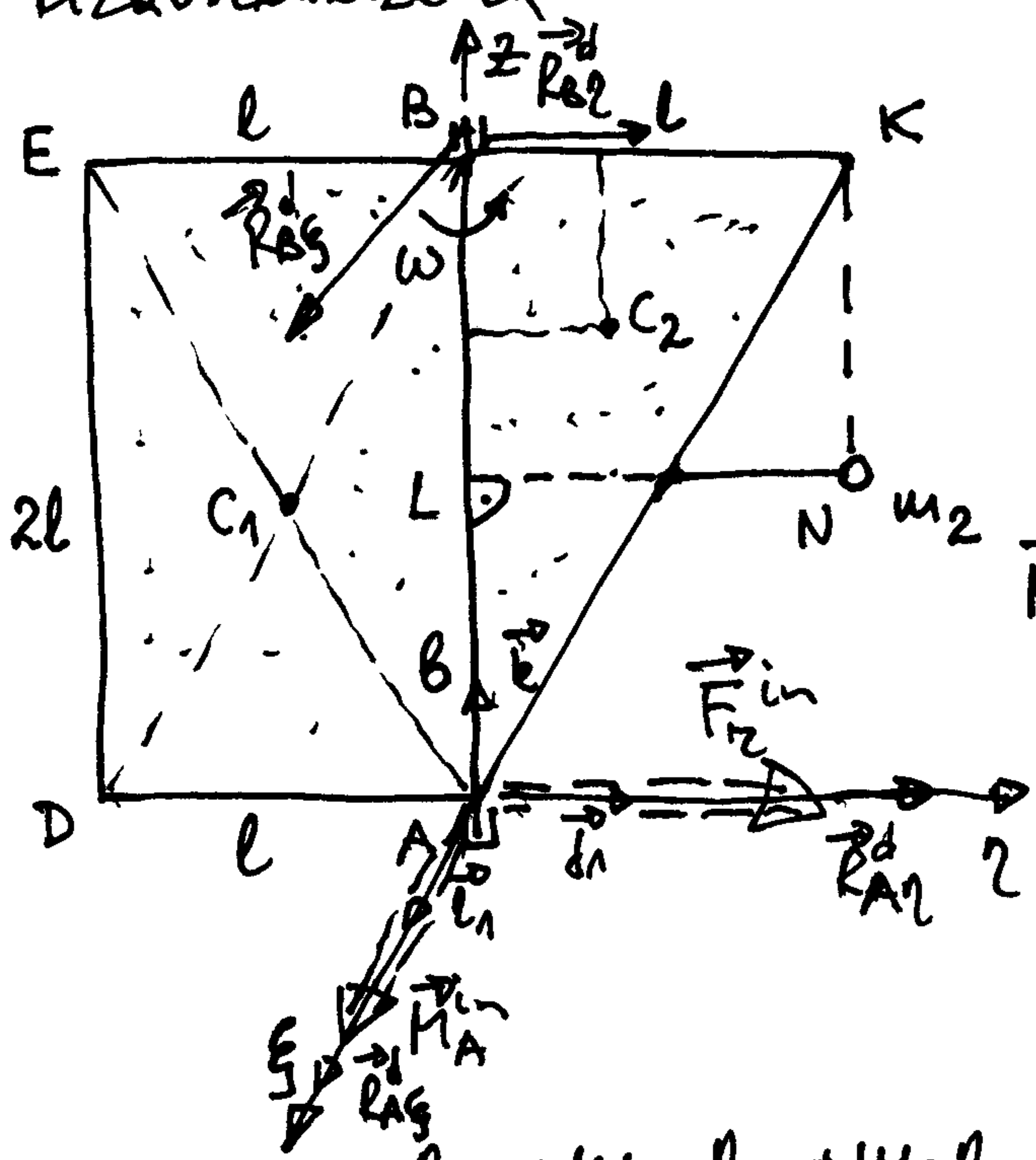
$$\vec{M}_A + \vec{M}_A^{in} = 0 \Rightarrow \begin{cases} -R_{B\eta} \cdot 2b - \frac{m b^2 l}{2} \omega^2 = 0 \\ R_{B\xi} \cdot 2b = 0 \end{cases}$$

$$R_{A\xi} = R_{B\xi} = R_{A2} = 0$$

$$R_{B\eta} = -\frac{m l \omega^2}{4}, R_{A\eta} = -\frac{m l \omega^2}{4}$$

8. Homogena tanka ploča oblika trapeza, mase m_1 i dimenzija prikazanih na slici, obzede se oko ose AB konstantnom ugaonom brzinom ω . Za ploču, u ravni ploče, posredstvom lakoog stepa, čvrsto je vezana kugla N, zamenarjivih dimenzija, mase m_2 tako da je $AL = b$.

- Odrediti dinamičke reakcije ležišta A i B.
- Kolika treba da je masa m_2 i razstojanje b pa da dinamičke reakcije budu jednake nuli, tj. da ploča bude dinamički uzavnotežena.



Kada se odrediju dinamičke reakcije, osim njih utimaju se u dotir još samo inercijalne sile, koje redukovane na tačku A se svode na glavni vektor i glavni moment odreden formulama

$$\vec{F}_r^{in} = m(\eta_c \epsilon + \xi_c \omega^2) \vec{e}_1 + m(-\xi_c \epsilon + \eta_c \omega^2) \vec{e}_2$$

$$\vec{M}_A^{in} = (J_{\xi\xi} \epsilon - J_{\eta\xi} \omega^2) \vec{e}_1 + (J_{\eta\xi} \epsilon + J_{\xi\xi} \omega^2) \vec{e}_2 - J_{\xi\xi} \epsilon \vec{e}_3$$

U našem slučaju je $\xi_c = 0, \epsilon = 0, m = m_1 + m_2$

$$J_{\xi\xi} = \int \xi^2 dm = 0$$

$$\Rightarrow \vec{F}_r^{in} = (m_1 + m_2) \eta_c \omega^2 \vec{e}_1$$

$$\vec{M}_A^{in} = -J_{\eta\xi} \omega^2 \vec{e}_1, \quad \eta_c, J_{\eta\xi} ?$$

$$\eta_c = \frac{m_1 \eta_{c1} + m_1 \eta_{c2} + m_2 \eta_N}{m_1 + m_2}, \quad m_{1P} = \frac{2}{3} m_1, \quad m_{1T} = \frac{m_1}{3}, \quad \eta_{c1} = -l, \quad \eta_{c2} = \frac{l}{3}, \quad \eta_N = l$$

$$\eta_c = \frac{g m_2 - 2 m_1 l}{g(m_1 + m_2)}, \quad J_{\eta\xi} = J_{\eta\xi}^{(m_1)} + J_{\eta\xi}^{(m_2)}, \quad J_{\eta\xi}^{(m_2)} = m_2 \eta_N z_N = m_2 l b$$

$$J_{\eta\xi}^{(m_1)} = \int \eta z dm = \int \eta z dm + \int \eta z dm; \quad dm = S' d\eta dz, \quad S' = \frac{m_1}{A} = \frac{m_1}{3l^2}$$

$$J_{\eta\xi}^{(m_1)} = \frac{m_1}{3l^2} \left[\int_{-l}^0 \eta d\eta \int_0^{z/2} z dz + \int_0^{z/2} z dz \int_0^l \eta d\eta \right] = -\frac{m_1 l^2}{6}$$

$$\Rightarrow J_{\eta\xi} = -\frac{m_1 l^2}{6} + m_2 l b$$

$$\Rightarrow \vec{F}_r^{in} = \frac{g m_2 - 2 m_1 l}{g} \omega^2 \vec{e}_1, \quad \vec{M}_A^{in} = \left(\frac{m_1 l^2}{6} - m_2 l b \right) \omega^2 \vec{e}_1$$

$$\vec{R}_A^d = R_{A\xi}^d \vec{e}_1 + R_{A\eta}^d \vec{e}_2 + R_{Az}^d \vec{e}_3; \quad \vec{R}_B^d = R_{B\xi}^d \vec{e}_1 + R_{B\eta}^d \vec{e}_2$$

D'Alembertov princip:

$$\vec{R}_A^d + \vec{R}_B^d + \vec{F}_c^{in} = 0 \Rightarrow \begin{cases} R_{A1}^d + R_{B1}^d = 0 & (1) \\ R_{A2}^d + R_{B2}^d + \frac{9m_2 - 2m_1}{9} l \omega^2 = 0 & (2) \\ R_{A3}^d = 0 & (3) \end{cases}$$

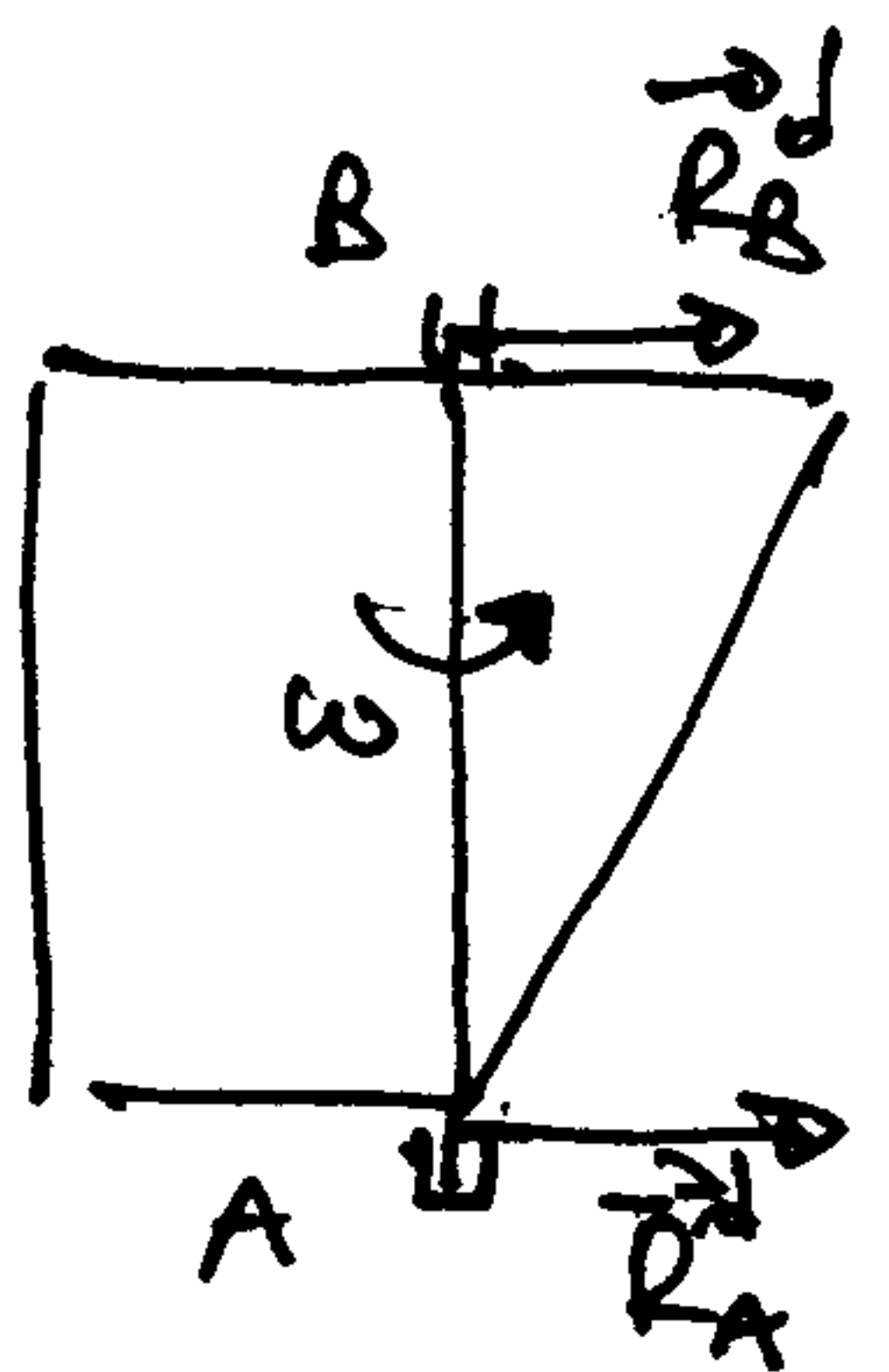
$$\vec{M}_A^d + \vec{M}_A^{in} = 0 \Rightarrow \begin{cases} -R_{B2}^d \cdot 2l + \left(\frac{m_1 l^2}{6} - m_2 l b\right) \omega^2 = 0 & (4) \\ R_{B3}^d \cdot 2l = 0 & (5) \end{cases}$$

$$(5) \Rightarrow R_{B3}^d = 0, (1) \Rightarrow R_{A1}^d = 0, (3) R_{A3}^d = 0$$

$$(4) \Rightarrow R_{B2}^d = \left(\frac{m_1 l}{12} - m_2 \frac{b}{2}\right) \omega^2,$$

$$(2) \Rightarrow R_{A2}^d = \left(\frac{95}{36} m_1 l + \frac{m_2 (6-2l)}{2}\right) \omega^2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \vec{R}_A^d = \left(\frac{95}{36} m_1 l + \frac{m_2 (6-2l)}{2}\right) \omega^2 \vec{j}_1 \\ \vec{R}_B^d = \left(\frac{m_1 l}{12} - m_2 \frac{b}{2}\right) \omega^2 \vec{j}_1 \end{cases}$$



$$b) \vec{R}_A^d = 0, \vec{R}_B^d = 0$$

$$\Downarrow \quad \Downarrow \quad \Downarrow \\ m_2 b = \frac{m_1 l}{6}$$

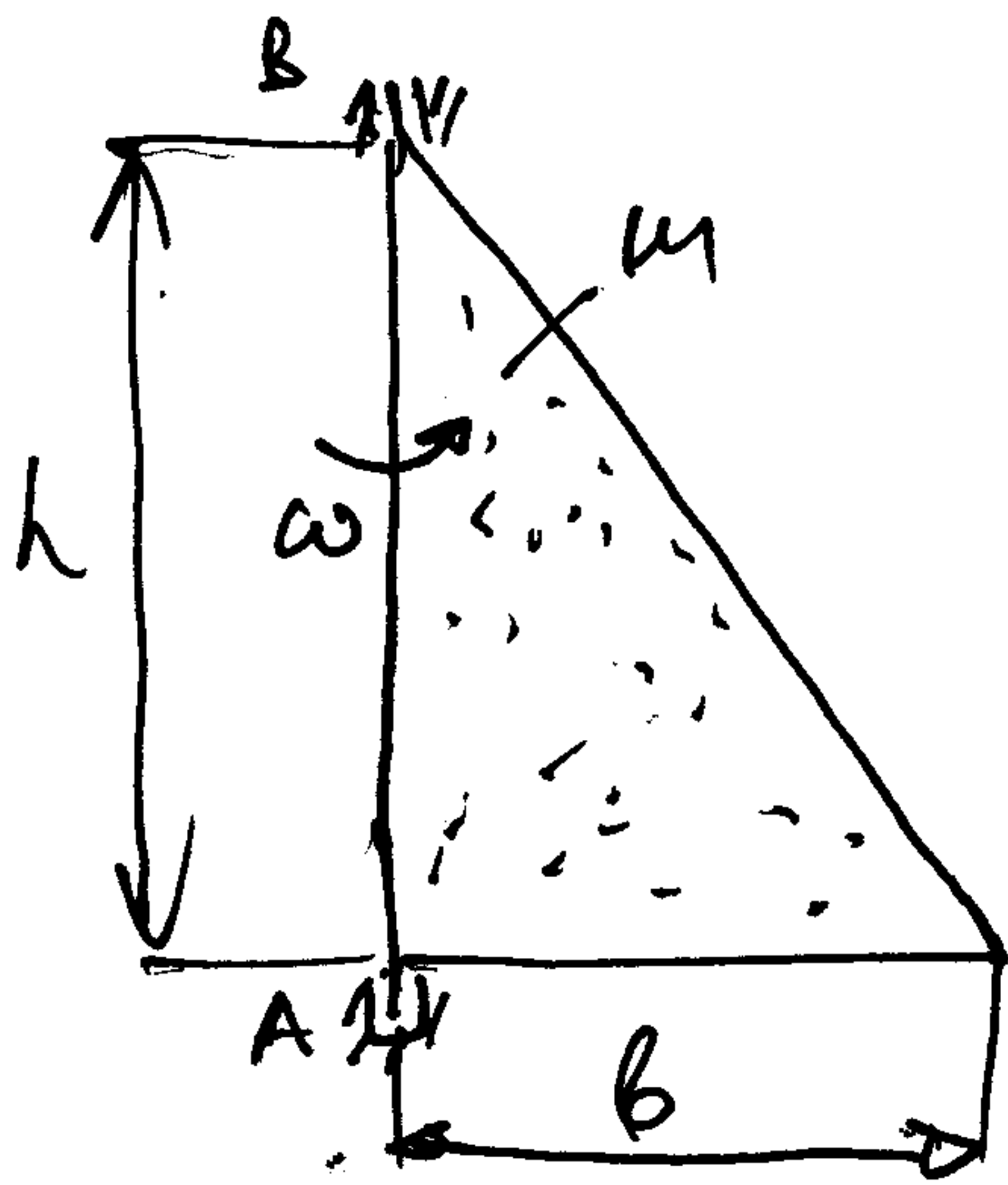
$$\boxed{m_2 = \frac{2}{9} m_1, b = \frac{3}{4} l}$$

Dzupinacin, direktno postrojeni uslove da je orbita osa

$$I_c = 0 \quad \text{glavna centralna osa inercije} \\ \Downarrow \quad m_2 = \frac{2}{9} m_1$$

$$I_{\eta z} = 0 \quad \Downarrow \quad b = \frac{3}{4} l$$

9. Homogena ploča, mase m , u obliku pravouglanog trougla zavrnuta je za vertikalnu osovinu koja se obzire konstantnom ugaonom brzinom ω . Odrediti dinamičke reakcije u ležajevima A i B.



$$R: \quad \vec{r}_A^d = -\frac{mb\omega^2}{4} \vec{d}_1$$

$$\vec{r}_B^d = -\frac{mb\omega^2}{12} \vec{d}_1$$

