

XIII sedmica nastave
- predavanja i primjeri -

9. Zakon o promjeni kinetičke energije sistema

9.1 Kinetička energija sistema. Kenigova teorema

Kinetička energija sistema E_k jednaka je zbiru kinetičkih energija svih materijalnih tačaka iz kojih se sastoji sistem

$$E_k = \sum E_{ki} = \frac{1}{2} \sum m_i v_i^2 \quad (1)$$

Posmatrajmo kretanje sistema kao u odnosu na nepokretni koordinatni sistem $Oxyz$ i u odnosu na translaciono pokretni koordinatni sistem $Cxyz'$, vezan za centar inercije sistema.

$$\vec{v}_i = \vec{v}_c + \vec{v}_{ir} \quad (2)$$

$$\frac{d}{dt}(2) \rightarrow \vec{v}_i = \vec{v}_c + \dot{\vec{r}}_i \quad (3)$$

\vec{v}_{ir} - brzina udele tačke u odnosu na $Cxyz'$ (relativna brzina)

$$v_i^2 = \vec{v}_i \cdot \vec{v}_i \stackrel{(3)}{=} v_c^2 + 2 \vec{v}_c \cdot \dot{\vec{r}}_i + \dot{\vec{r}}_i^2 = v_{ir}^2$$

$$\Rightarrow E_k = \frac{1}{2} (\sum m_i) v_c^2 + \vec{v}_c \cdot (\sum m_i \dot{\vec{r}}_i) + \frac{1}{2} \sum m_i v_{ir}^2$$

$$= \frac{d}{dt} \sum m_i \dot{\vec{r}}_i = \frac{d}{dt} (m \dot{\vec{r}}_c) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{E_k = \frac{1}{2} m v_c^2 + E_{kr}, \quad E_{kr} = \frac{1}{2} \sum m_i v_{ir}^2} \quad (4)$$

Formulu (4) se izdaje Kenigova teorema: kinetička energija sistema jednaka je zbiru kinetičke energije centra inercije, pod pretpostavkom da je u njemu skoncentrisana masa sistema, i kinetičke energije relativnog kretanja u odnosu na translaciono pokretni koordinatni sistem vezan za centar inercije.

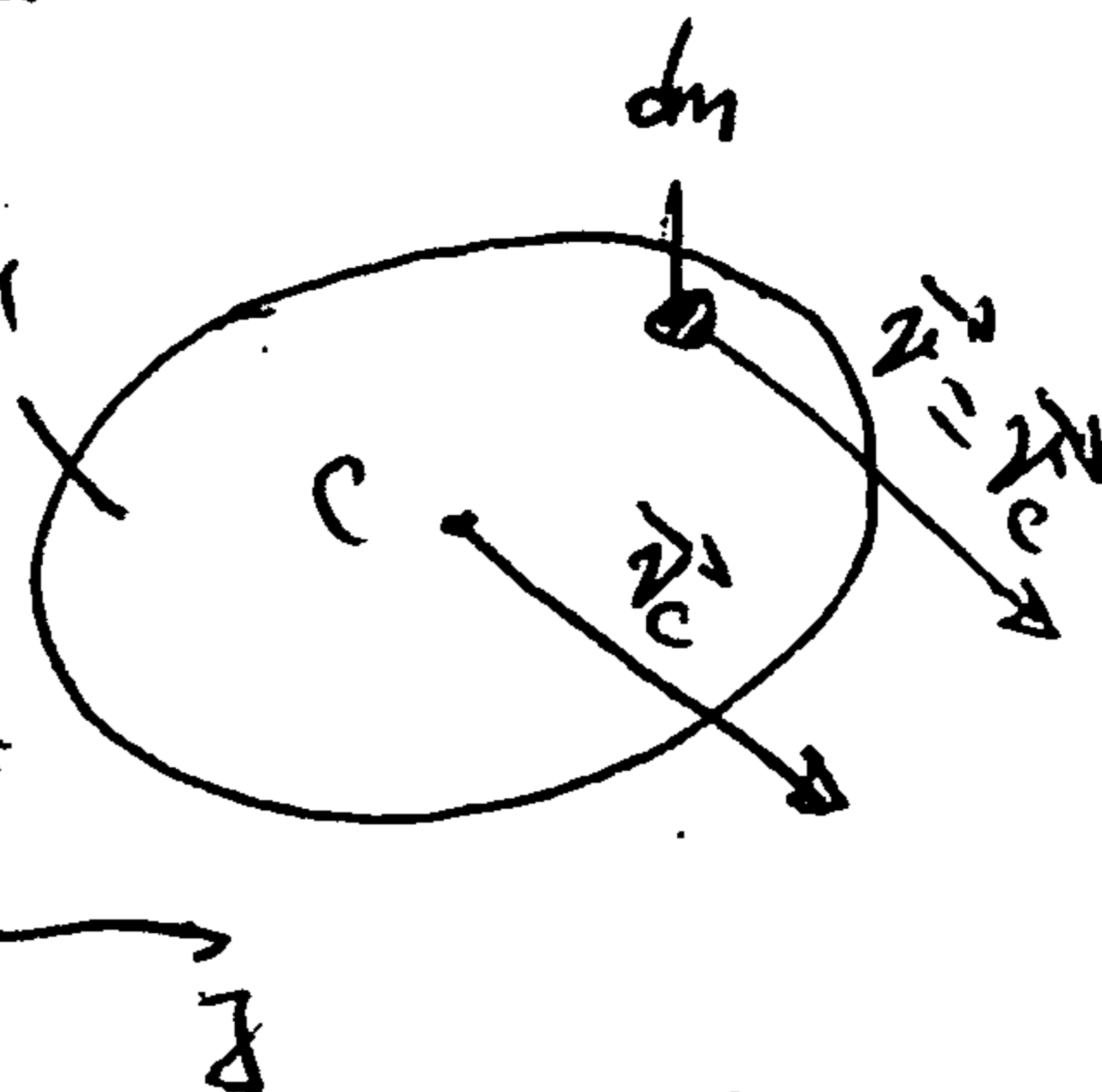
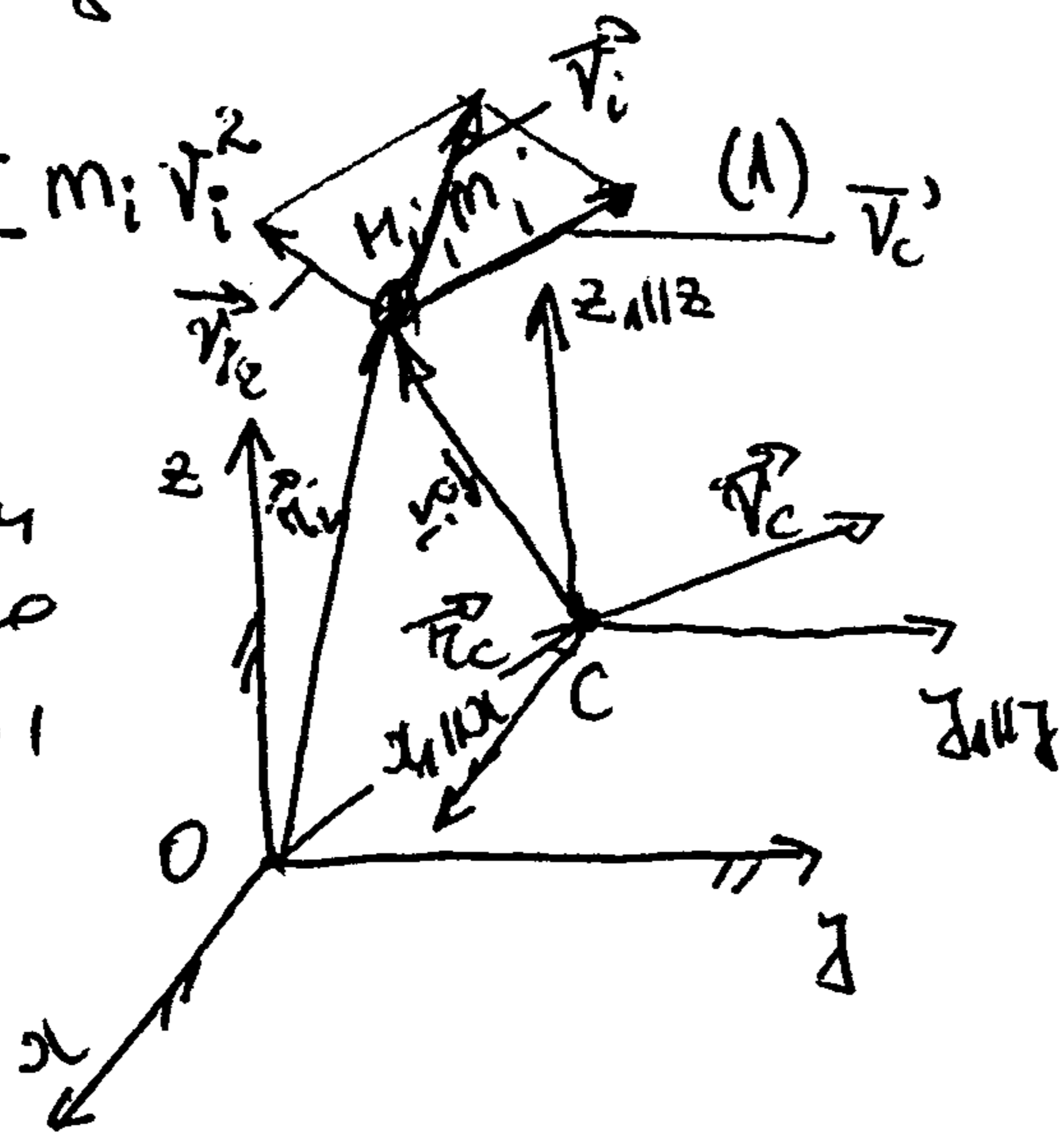
9.1.1 Kinetička energija krutog tijela

a) translaciono kretanje

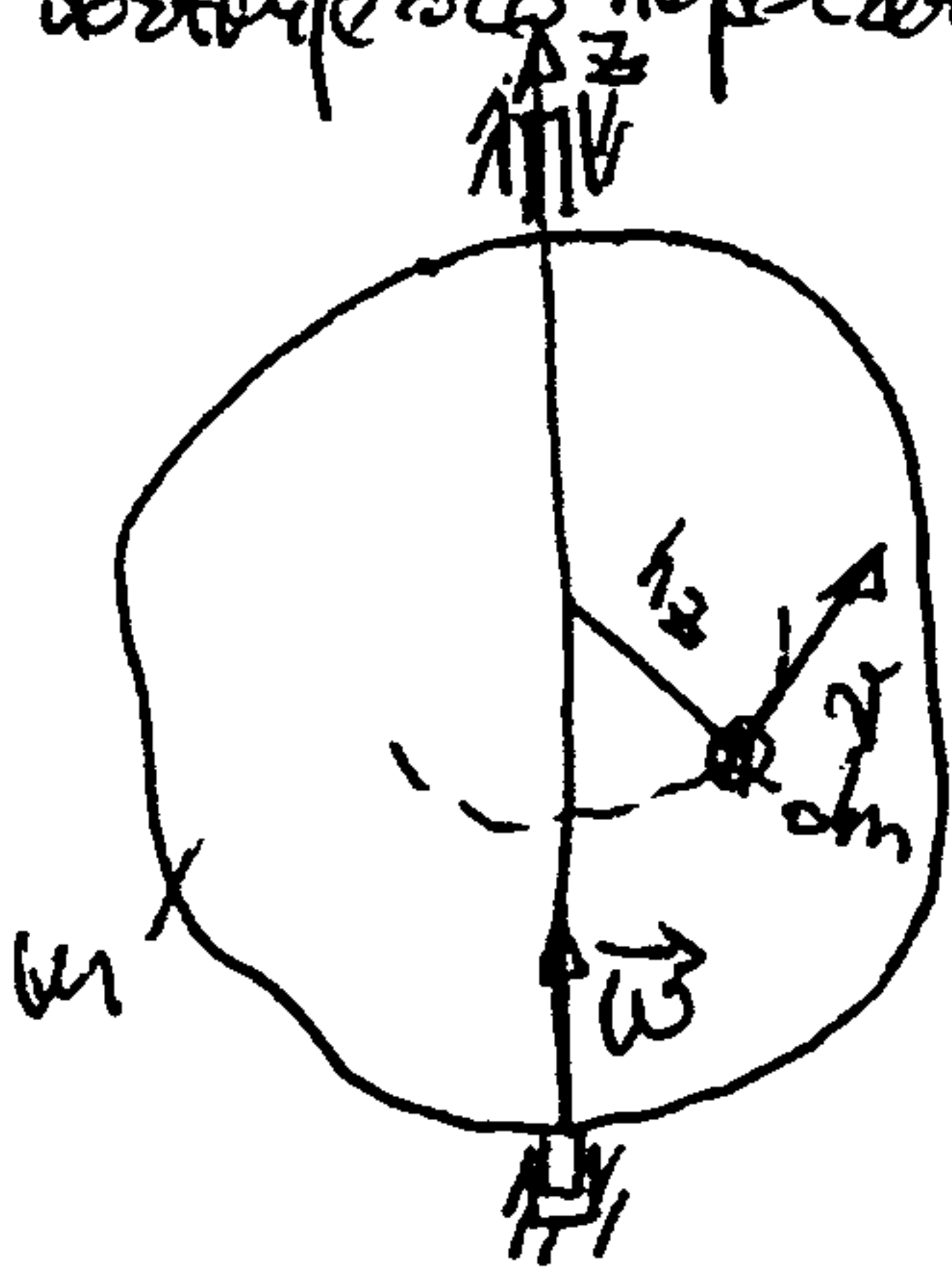
$$E_k = \frac{1}{2} \int v^2 dm = \frac{1}{2} \int v_c^2 dm \Rightarrow \frac{1}{2} v_c^2 \int dm$$

$$\boxed{E_k = \frac{1}{2} M v_c^2}$$

Kinetička energija tijela pri translacionom kretanju jednaka je polovini proizvoda mase tijela i kvadrata brzine centra inercije (brzine tijela).



b) rotacija oko nepokretne ose



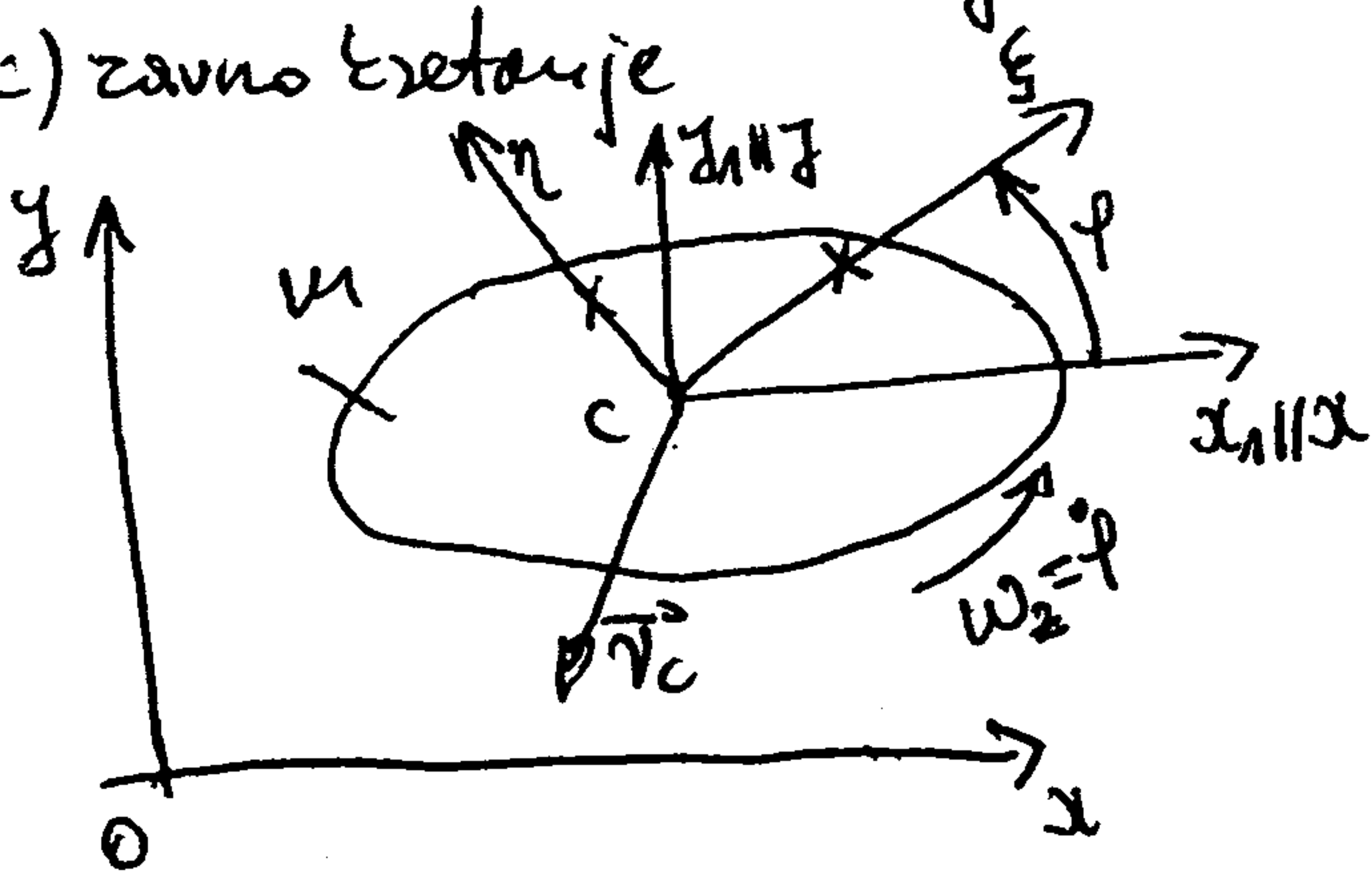
$$dE_k = E_k(dm) = \frac{1}{2} dm v^2, \quad v^2 = r^2 \omega^2$$

$$E_k = \frac{1}{2} \int_{(m)} dm v^2 = \frac{1}{2} \omega^2 \int_{(m)} r^2 dm = J_z \omega^2$$

$$E_k = \frac{1}{2} J_z \omega^2$$

Kinetska energija tijela pri njegovoj rotaciji oko nepokretne ose jednaka je polovini proizvoda momenta inercije za rotaciju osu i kvadrata ugaone brzine.

c) zavno kretanje



$$(4) \Rightarrow E_k = \frac{1}{2} m v_c^2 + \frac{1}{2} J_c \omega^2$$

J_c - moment inercije tijela za centrom osu upravnu na ravni kretanja

9.2 Zakon o promjeni kinetske energije sistema

Ako na svaki tjelesni sistem primijenimo diferencijalni oblik zakona o promjeni kinetske energije materijalne tjele dobijemo

$$dE_{ki} = \delta A(\vec{F}_i^s) + \delta A(\vec{F}_i^u) \quad (i=1, \dots, n)$$

gdje su $\delta A(\vec{F}_i^s) = \vec{F}_i^s \cdot d\vec{r}_i$, $\delta A(\vec{F}_i^u) = \vec{F}_i^u \cdot d\vec{r}_i$ - elementarni radovi i-te spoljnjije i unutrasnjije sile.

Sabirajući ove izraze dobijamo diferencijalni oblik zakona o promjeni kin. en. sistema

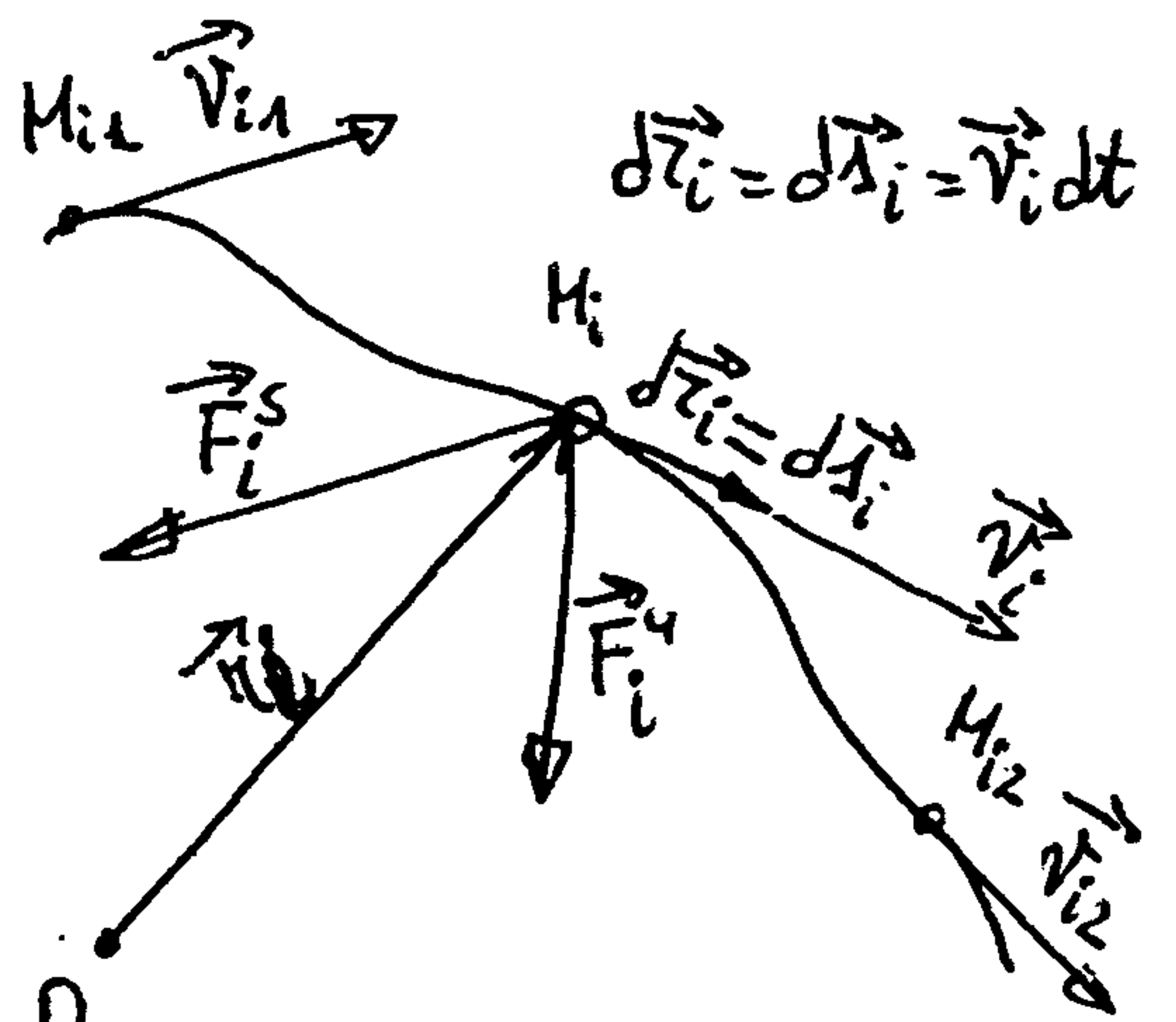
$$dE_k = \delta A^s + \delta A^u, \quad \delta A^s = \sum \delta A(\vec{F}_i^s), \quad \delta A^u = \sum \delta A(\vec{F}_i^u) \quad (1)$$

Koji glasi: Diferencijal kinetske energije sistema jednak je zbiru elementarnih radova svih spoljnjih i unutrasnjih sila, koje djeluju na sistem.

Integriranjem jednačine (1) dolazi se do integralnog oblika ovog zakona

$$E_{k2} - E_{k1} = A^s(u_{12}) + A^u(u_{12}), \quad (2)$$

tj. promjena kinetske energije sistema na konacnom pomjeranju jednak je zbiru radova svih spoljnjih i unutrasnjih sila na odgovarajucim pomjerenjima.



Ako se (1) podijeli sa dt dobija se sledeći alternativni oblik tog zakona

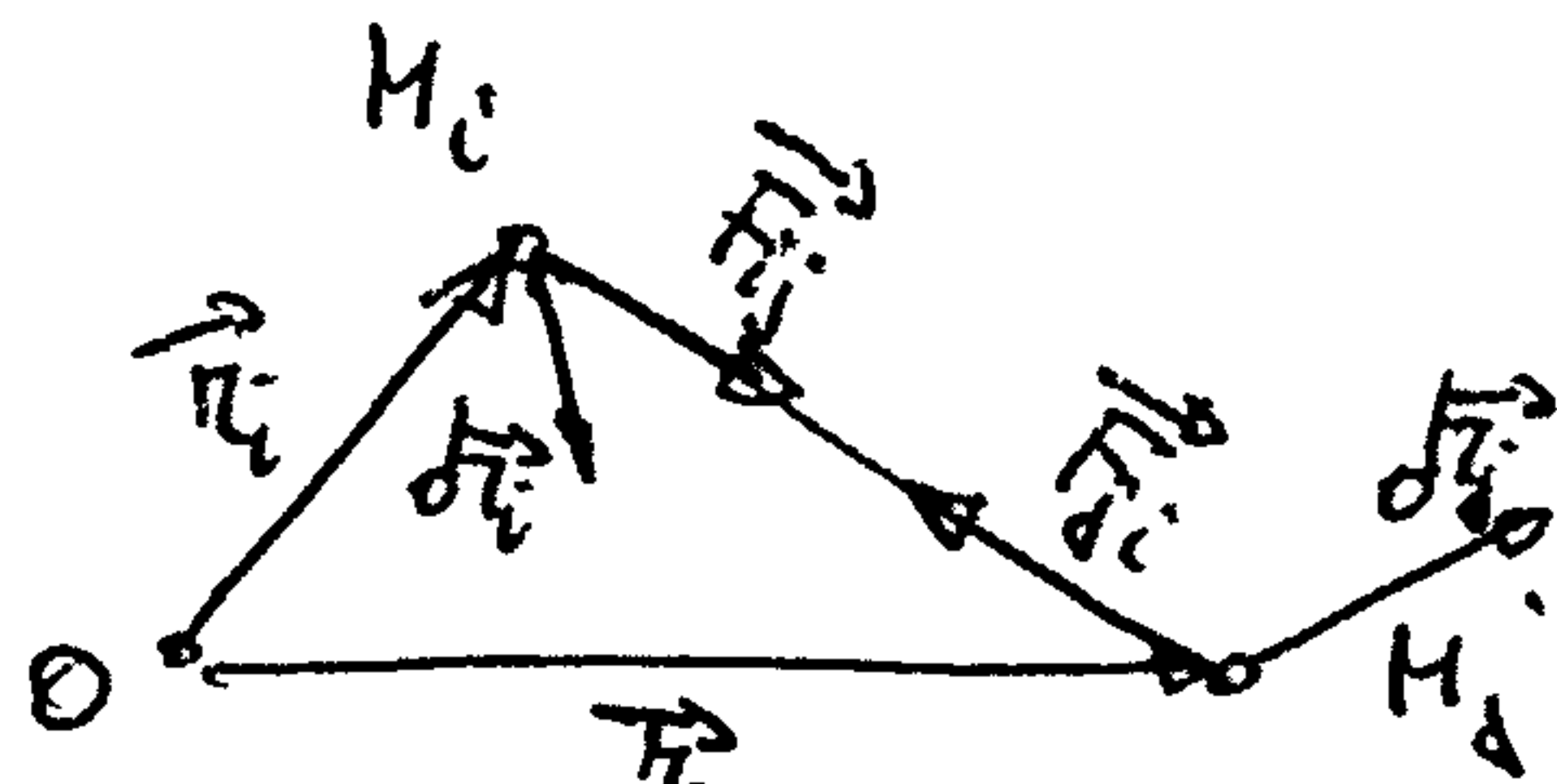
$$\frac{dE_k}{dt} = P^s + P^u, \quad P^s = \sum \vec{F}_i^s \cdot \vec{v}_i, \quad P^u = \sum \vec{F}_i^u \cdot \vec{v}_i \quad (3)$$

koji glasi: Izvod kinetičke energije sistema po vremenu jednak je zbiru snaga spoljnjih i unutrašnjih sila.

U opštem slučaju, rad unutrašnjih sila sistema je različit od nule. Ali, u slučaju neizmjenljivog sistema, a to je takav sistem kod koga razdaljanja između njegovih tačaka ostaju ne-promjenjiva tokom kretanja (npr. kruto tijelo), rad unutrašnjih sila jednak je nuli.

Za to, budući da se unutrašnje sile javljaju u parovima međusobno suprotnih sila, za jedan takav par \vec{F}_{ij} i \vec{F}_{ji} bice

$$\begin{aligned} \delta A(\vec{F}_{ij}) + \delta A(\vec{F}_{ji}) &= \vec{F}_{ij} \cdot d\vec{r}_i + \vec{F}_{ji} \cdot d\vec{r}_j \\ &= \vec{F}_{ji} (d\vec{r}_j - d\vec{r}_i) = \vec{F}_{ji} \cdot d(\vec{r}_j - \vec{r}_i) \end{aligned}$$



$$\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}$$

$$= \vec{F}_{ji} \cdot d(\vec{M}_i \vec{M}_j) = 0, \text{ jer je za neizmjenljiv sistem } \vec{M}_i \vec{M}_j = \text{const}, \text{ pa je } d(\vec{M}_i \vec{M}_j) \perp \vec{M}_i \vec{M}_j$$

Kada su neke sile \vec{F}_i (bilo spoljne ili unutrašnje) konzervativne tada su njihove projekcije na ose Dekartovog koordinatnog sistema:

$$F_{ix} = -\frac{\partial E_p}{\partial x_i}, \quad F_{iy} = -\frac{\partial E_p}{\partial y_i}, \quad F_{iz} = -\frac{\partial E_p}{\partial z_i} \quad (i=1, \dots, n)$$

gdje je $E_p = E_p(x_1, y_1, z_1, \dots, x_n, y_n, z_n)$ potencijalna energija poja tih sila. Elementarni rad tog sistema sila je

$$\delta A = \sum \vec{F}_i \cdot d\vec{r}_i = -\sum \left(\frac{\partial E_p}{\partial x_i} dx_i + \frac{\partial E_p}{\partial y_i} dy_i + \frac{\partial E_p}{\partial z_i} dz_i \right) = -dE_p$$

tj. elementarni rad konzervativnih sila jednak je negativnom diferencijalu potencijalne energije.

Kada su sve sile koje vrsu rad konzervativne, na osnovu (1) je

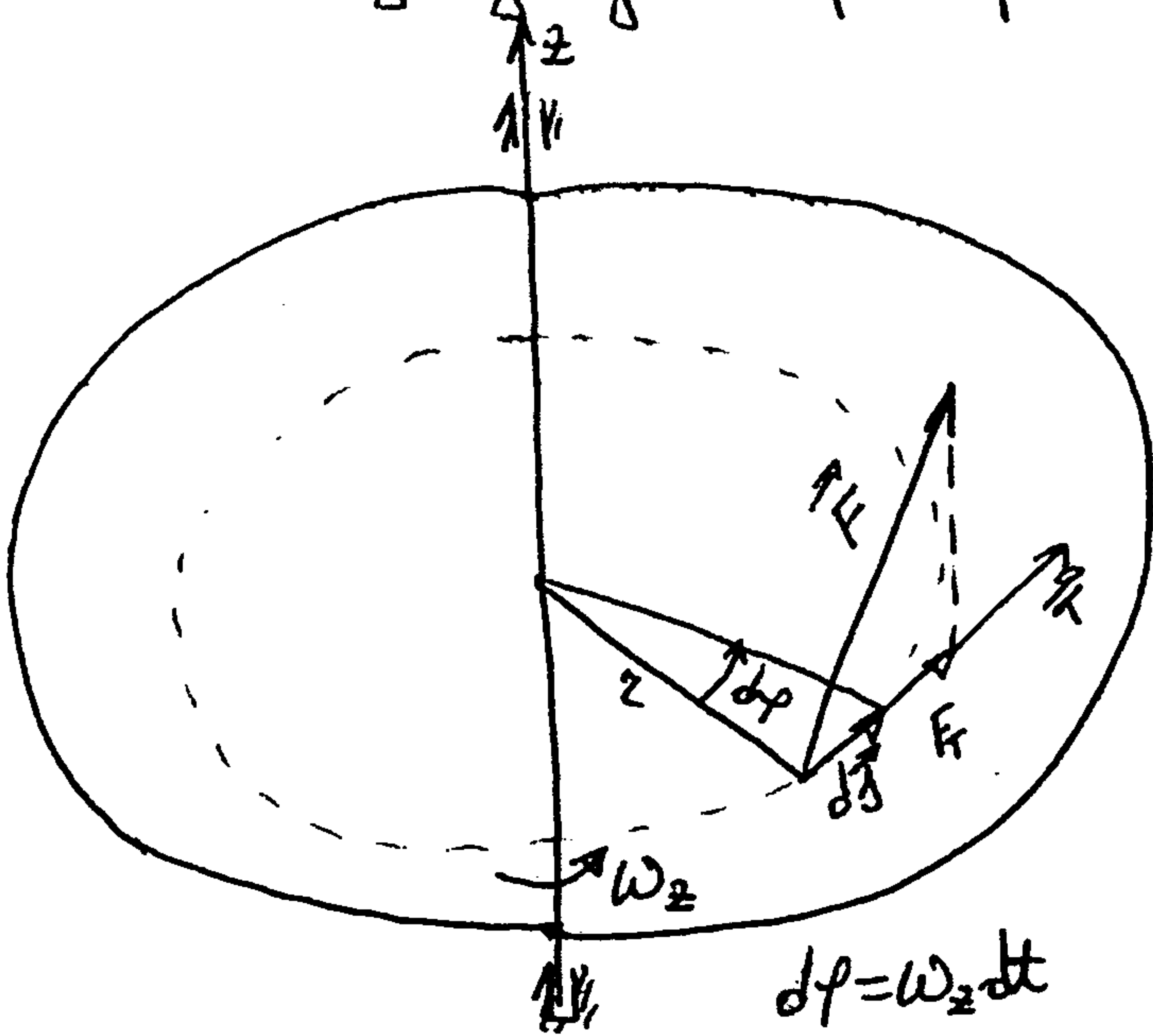
$$d(E_k + E_p) = 0 \Leftrightarrow E_k + E_p = \text{const.}$$

Što predstavlja zakon održavanja mehaničke energije sistema: Ako su sve sile koje vrsu rad konzervativne, ukupna mehanička energija sistema ostaje konstantna tokom kretanja.

Mehanički sistemi za koje vazi ovaj zakon zovu se konzervativni sistemi. Takvi su, npr., sistemi čije su sve aktivne sile konzervativne, a veze idealne i nepromjenljive.

9.3 Neži slučajevi izračunavanja rada

a) Rad sile koja djeluje na tijelo koje se okreće



$$\delta A = \vec{F} \cdot d\vec{s} = F_T ds$$

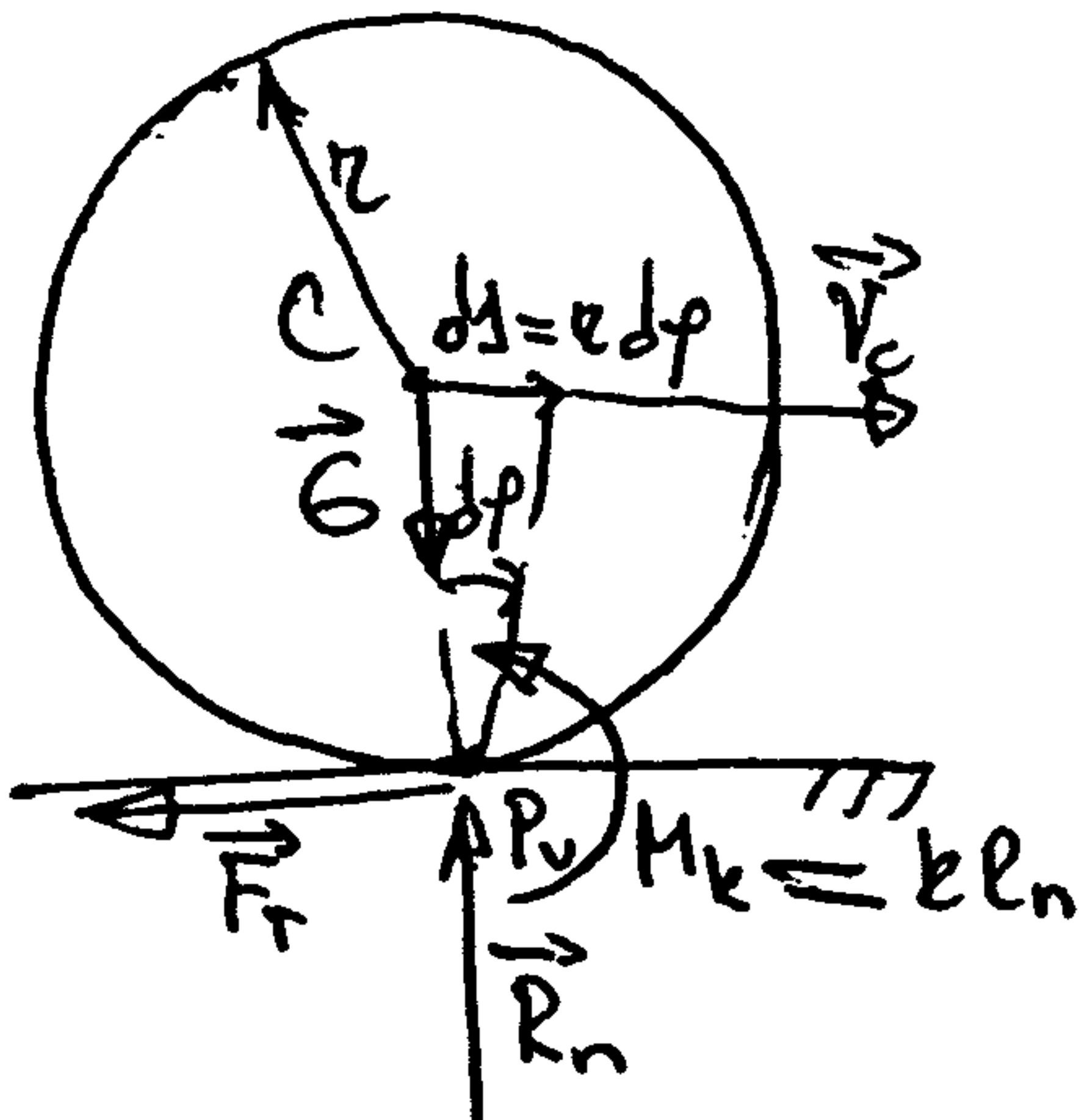
$$ds = r d\phi$$

$$\delta A = \underbrace{F_T r}_{M_z} d\phi$$

$$\boxed{\delta A = M_z^{\vec{F}} d\phi} \quad P = \frac{\delta A}{dt} = M_z^{\vec{F}} \omega_z$$

Elementarni rad sile koja djeluje na tijelo koje se okreće jednak je proizvodu momenta i elementarnog ugla okretanja.

b) Rad sile trenja kada se tijelo kotrlja bez klizanja

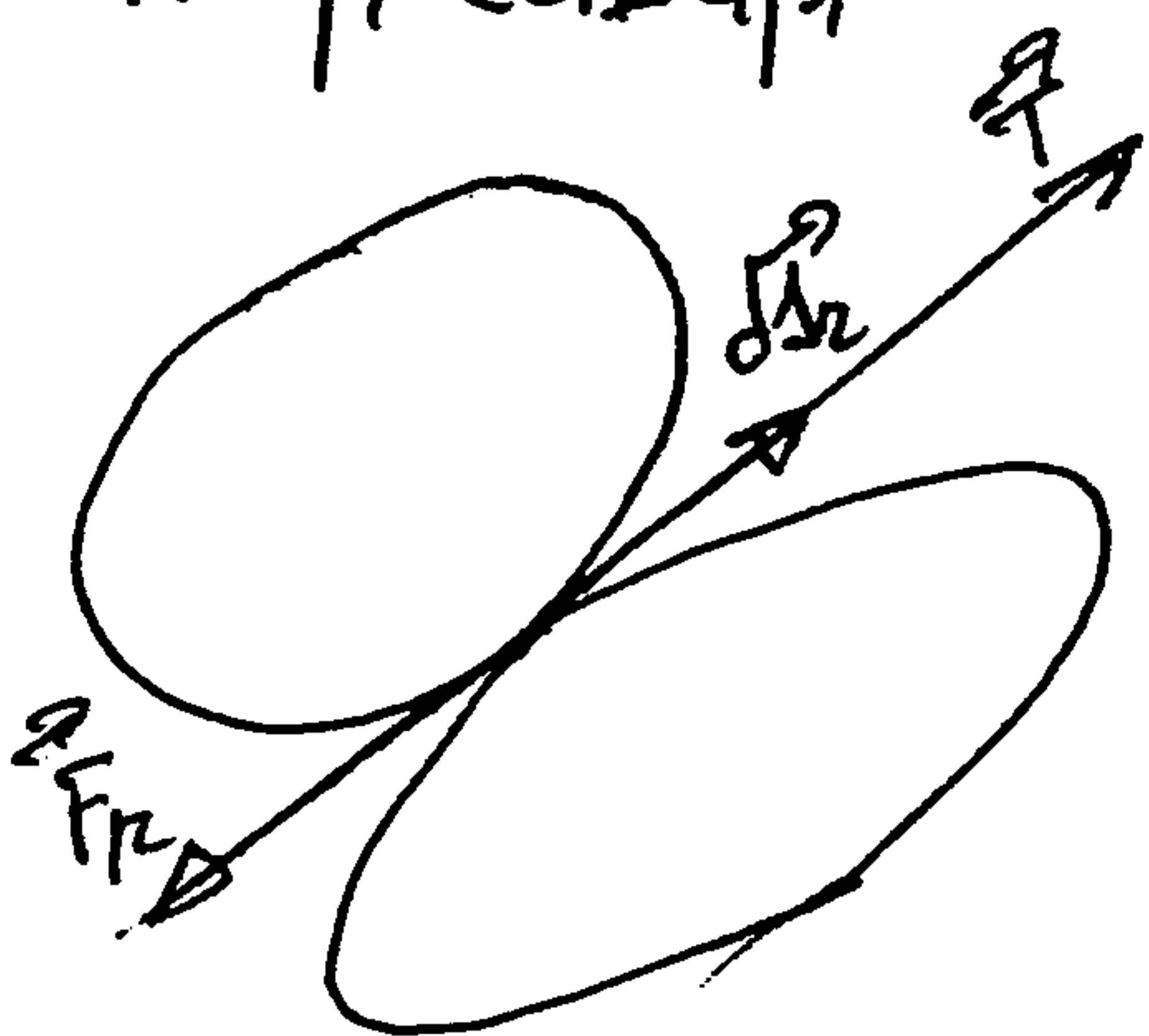


$\delta A(\vec{F}_T) = \vec{F}_T \cdot d\vec{s}_P = 0$ - pri kotrljanju bez klizanja rad sile trenja je jednak nuli

$$\delta A(M_k) = -M_k d\phi, \quad d\phi = \frac{ds}{r}$$

$$\delta A(M_k) = -k \frac{R_n}{r} ds$$

c) Rad sile trenja klizanja

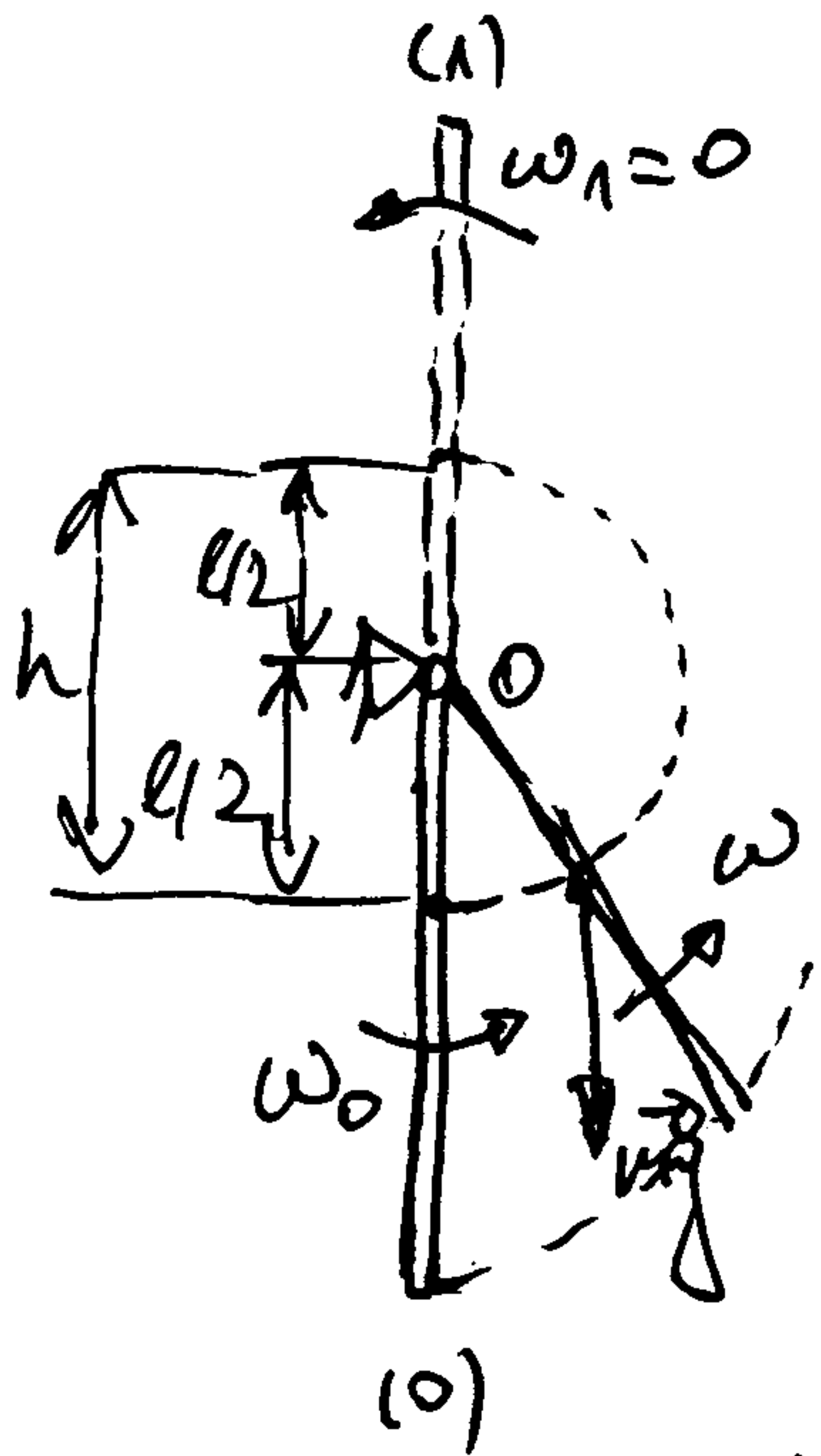


$d\vec{s}_z$ - vektor elementarnog relativnog pomjeranja između dodirujućih točaka

$$\delta A = -F_T ds_z$$

- zadaci -

1. Količin početnu ugaonu brzinu ω_0 treba saopštiti homog-
nom štapi, mase m i dužine l , u najnižem položaju, da bi
on obzračio se oko horizontalne osi O u pravcu pola obzta.



$$E_k = \frac{1}{2} J_0 \omega^2, \quad J_0 = \frac{ml^2}{3}$$

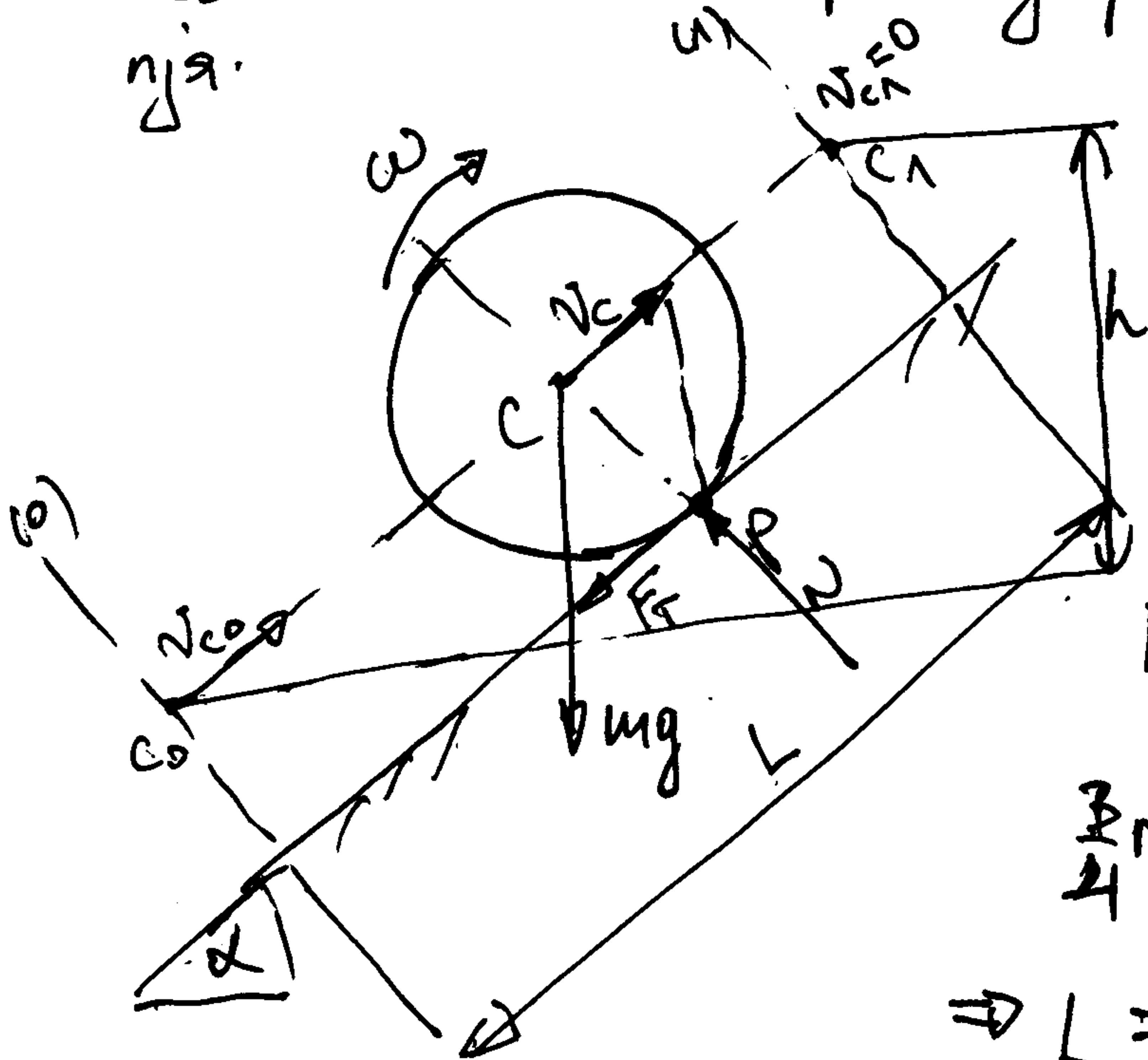
$$E_k = \frac{1}{6} ml^2 \omega^2; \quad A_{(0,1)}(m\vec{g}) = -mgh, \quad h=l$$

$$E_{k1} - E_{k0} = A_{(0,1)}(m\vec{g})$$

$$\frac{1}{6} ml^2 \omega_1^2 - \frac{1}{6} ml^2 \omega_0^2 = -mg \cdot l$$

$$\Rightarrow \omega_0 = \sqrt{6g/l}$$

2. Homogeni disk, mase m i poluprečnika r , kotrlja se bez klizanja
uz strmu ravan nagiba $\alpha = 30^\circ$. Početna brzina centra diska je
 $v_{c0} = 4 \text{ m/s}$. Odrediti put koji pređe centar C diska do zaustavlja-
nja.



Disk vrti zorno brzinom:

$$E_k = \frac{1}{2} m v_c^2 + \frac{1}{2} J_c \omega^2, \quad J_c = \frac{mr^2}{2}$$

kotrljanje bez klizanja: $v_c = r\omega$

$$\Rightarrow E_k = \frac{3}{4} m v_c^2$$

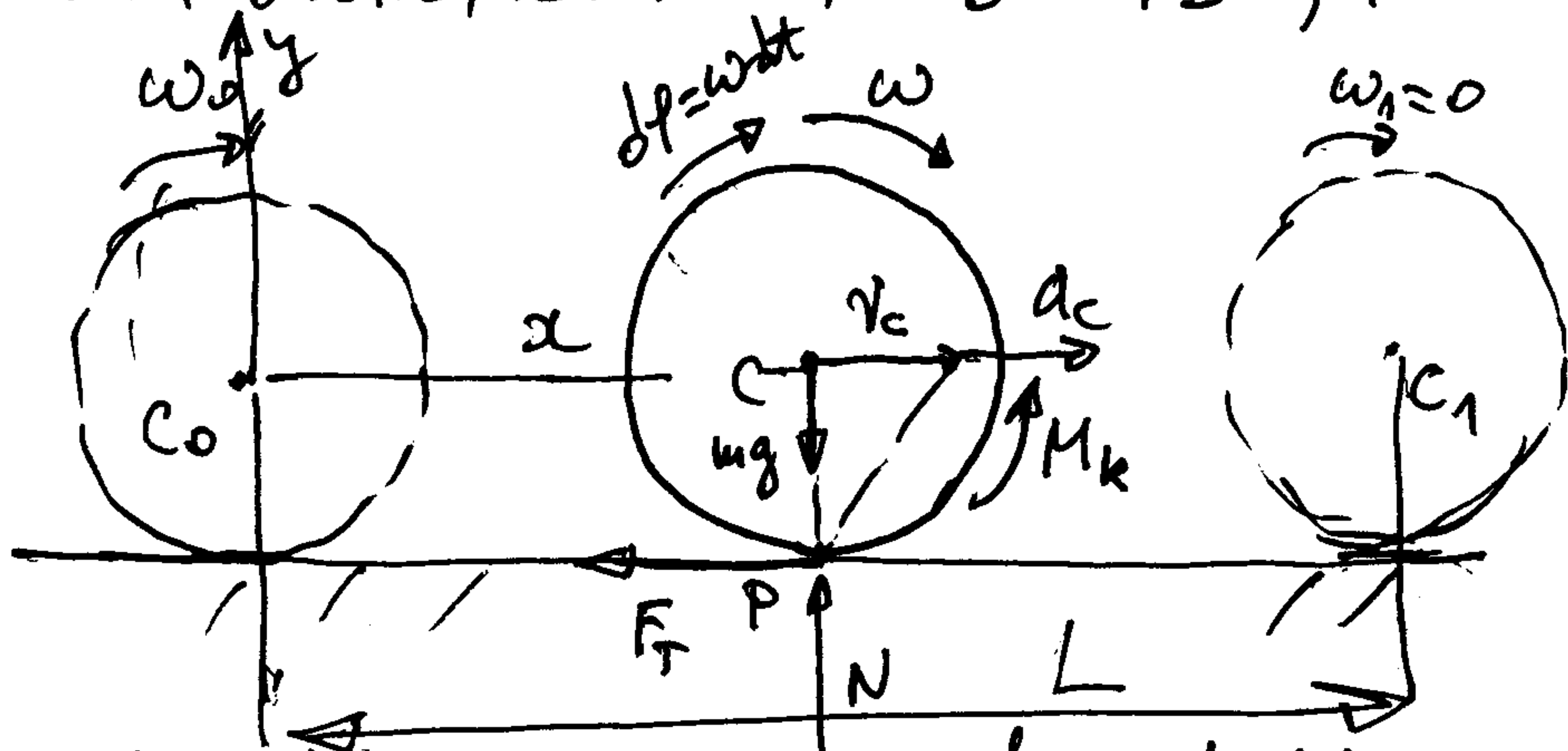
Kod vrši sama rla teie, pa je

$$E_{k1} - E_{k0} = A_{(0,1)}(m\vec{g})$$

$$\frac{3}{4} m v_{c1}^2 - \frac{3}{4} m v_{c0}^2 = -mgh, \quad h = L \sin \alpha$$

$$\Rightarrow L = \frac{3 v_{c0}^2}{4g \sin \alpha} = \boxed{2,45 \text{ m}}$$

3. Tankovidi cilindar, masa m i poluprečnika $r = 0,5 \text{ m}$, kotrja se brez klizanja po horizontalni ravni. Določiti put koji prede center C cilindra do završetka putovanja, ako je u početnom trenutku ugaona brzina cilindra $\omega_0 = 4 \text{ s}^{-1}$, a koeficijent trenja kotrjanja $k = 0,02$.



$$E_k = \frac{1}{2} m v_c^2 + \frac{1}{2} J_c \omega^2$$

$$J_c = m r^2 \text{ (masa raspoređena po obimu)}$$

$$v_c = r \omega$$

$$\Rightarrow E_k = m r^2 \omega^2$$

Rad vrši samo moment otpora kotrjanja M_k . $M_k = k N$, $N = ?$

$$m \vec{a}_c = m \vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_T$$

$$y: 0 = -mg + N \Rightarrow N = mg \Rightarrow M_k = k mg$$

$$\bar{E}_{k1} - \bar{E}_{k0} = A_{(0,1)}(M_k)$$

$$\begin{matrix} \text{"} & \text{"} \\ m r^2 \omega_1^2 & m r^2 \omega_0^2 \\ 0 & \end{matrix}$$

$$\Delta A(M_k) = -M_k d\varphi$$

$$v_c = \dot{x} = r \omega \Rightarrow dx = r \omega dt = r d\varphi$$

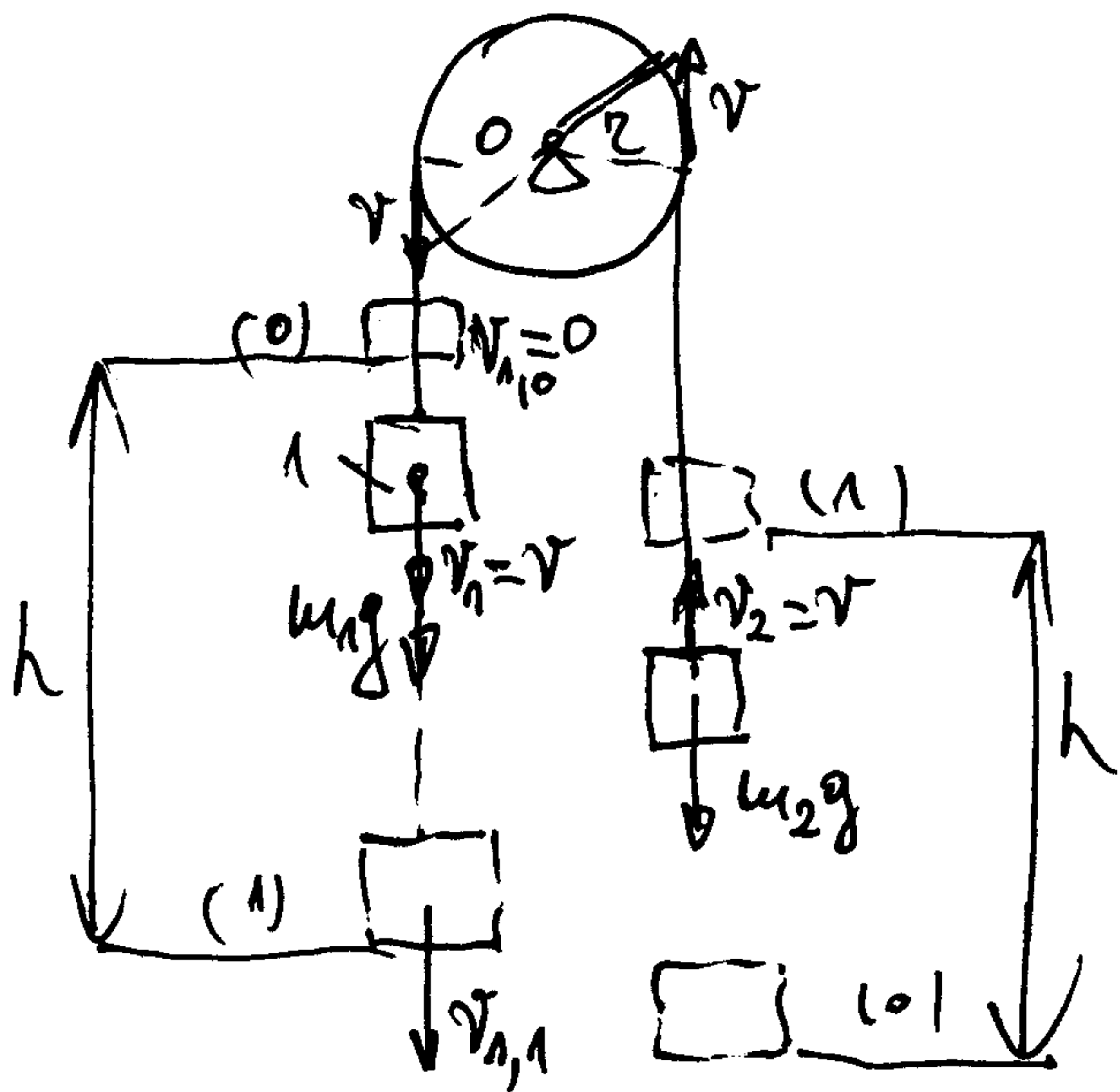
$$d\varphi = \frac{dx}{r}$$

$$\Delta A(M_k) = -k mg \frac{dx}{r}$$

$$A_{(0,1)}(M_k) = \int_0^L -k mg \frac{dx}{r} = -\frac{k mg L}{r}$$

$$\Rightarrow -m r^2 \omega_0^2 = -\frac{k mg L}{r} \Rightarrow L = \frac{r^3 \omega_0^2}{k g} = 20,4 \text{ m}$$

4. Tereti 1 i 2, masa $m_1 = 2 \text{ kg}$ i $m_2 = 1 \text{ kg}$, obješeni su za brzojve neistegljivoj konopca prebačenoj preko kotura koji se može obrtiti oko nepokretne horizontalne osi. Zanedajući masu kotura, odrediti brzinu tereta 1 u trenutku kada se spusti za visinu $h = 3 \text{ m}$. Kretanje je počelo iz mira.



$$E_k = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2$$

$$v_2 = v_1 = v$$

$$E_k = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v^2$$

$$E_{k1} - E_{k0} = A_{(0,1)}(m_1 \vec{g}) + A_{(0,1)}(m_2 \vec{g})$$

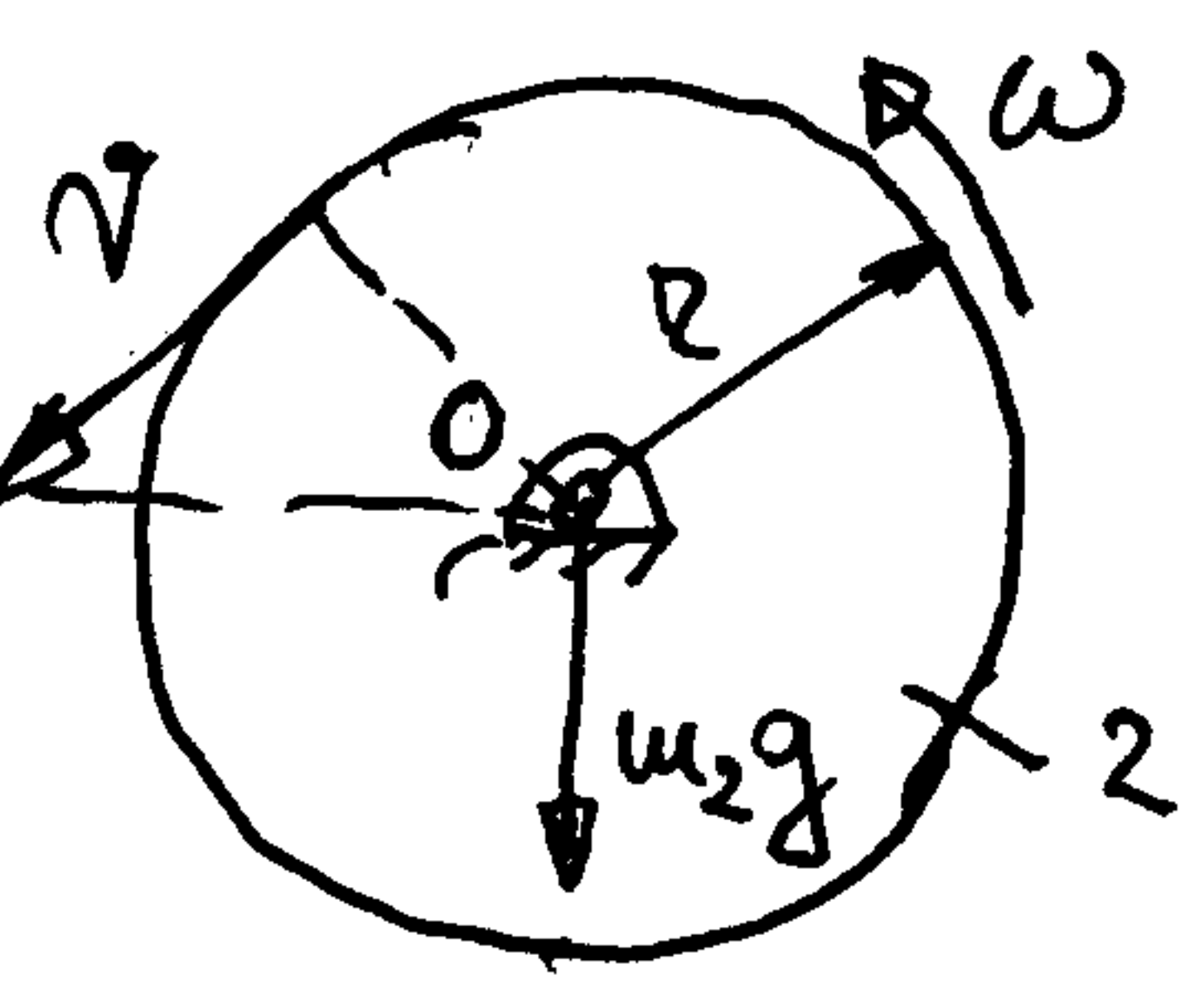
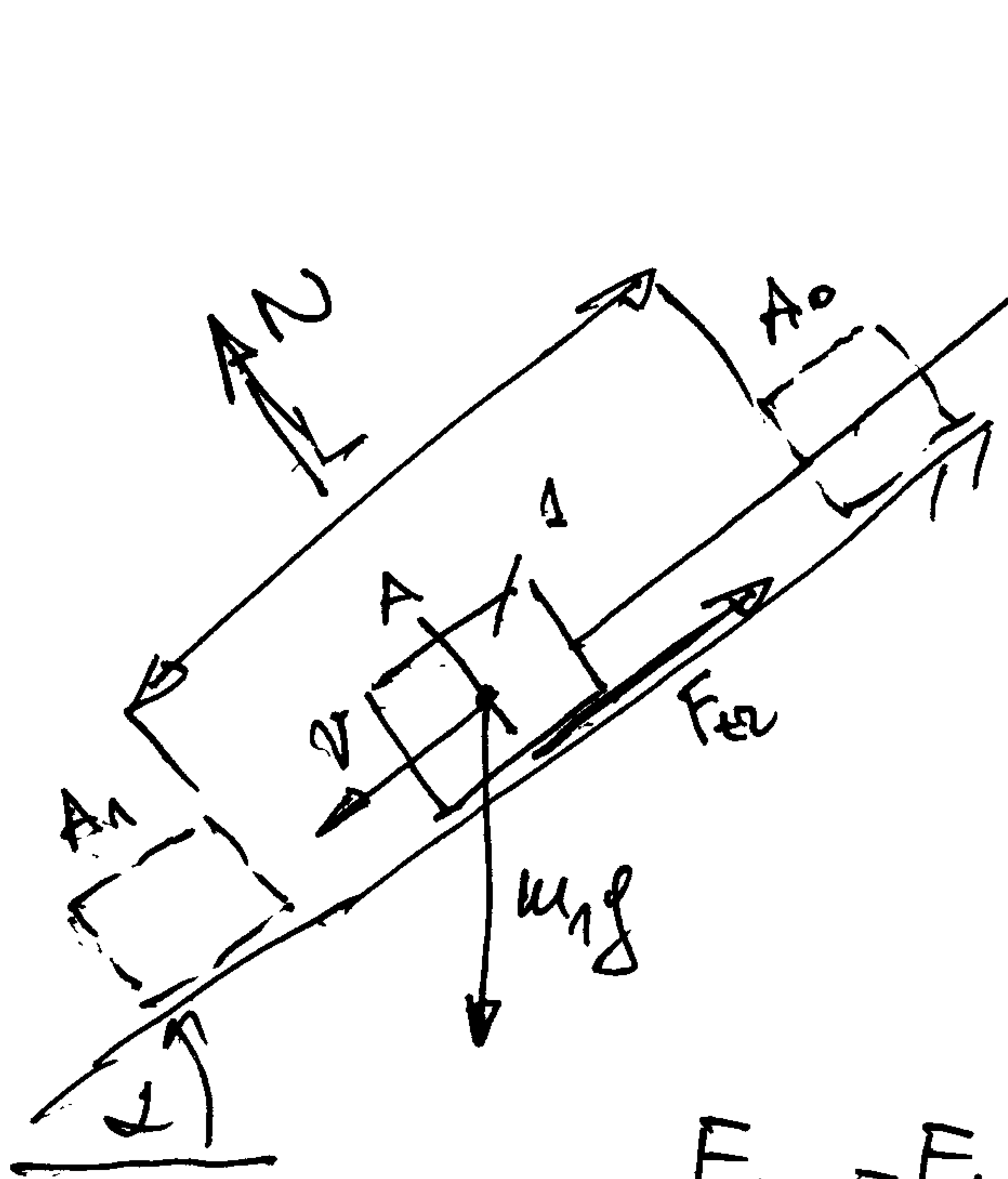
$\frac{m_1 + m_2}{2} v_{1,1}^2$ $m_1 g h$ $- m_2 g h$

$$v_{1,1} = \sqrt{\frac{2(m_1 - m_2)gh}{m_1 + m_2}} = 4,43 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

5. Uzeti prethodni zadatak smatrajući da je kotur homog- ni cilindar debljine $m_3 = 1 \text{ kg}$ i poluprečnika $r = 10 \text{ cm}$.

2. $v_{1,1} = 4,1 \text{ m/s}$

6. Sanduk mase m_1 koji može da se kreće po strmoj ravni nagiba α , vezan je za neistegljivo užde čiji je drugi kraj namotan na kotur (homogeni kružni disk mase m_2 i poluprečnika r) koji se može obrtati oko nepokretne horizontalne ose O . a) Napišite kinetičku energiju sistema kao funkciju brzine v sanduka. b) Ako je koeficijent trenja između sanduka i strme ravni μ , odrediti brzinu sanduka nakon što on počevši kretanje iz mirovanja pređe nit strmu ravnu put dužine L . Dato je $m_1 = 50 \text{ kg}$, $m_2 = 20 \text{ kg}$, $\alpha = 30^\circ$, $\mu = 0,2$, $L = 2 \text{ m}$



$$v = r\omega$$

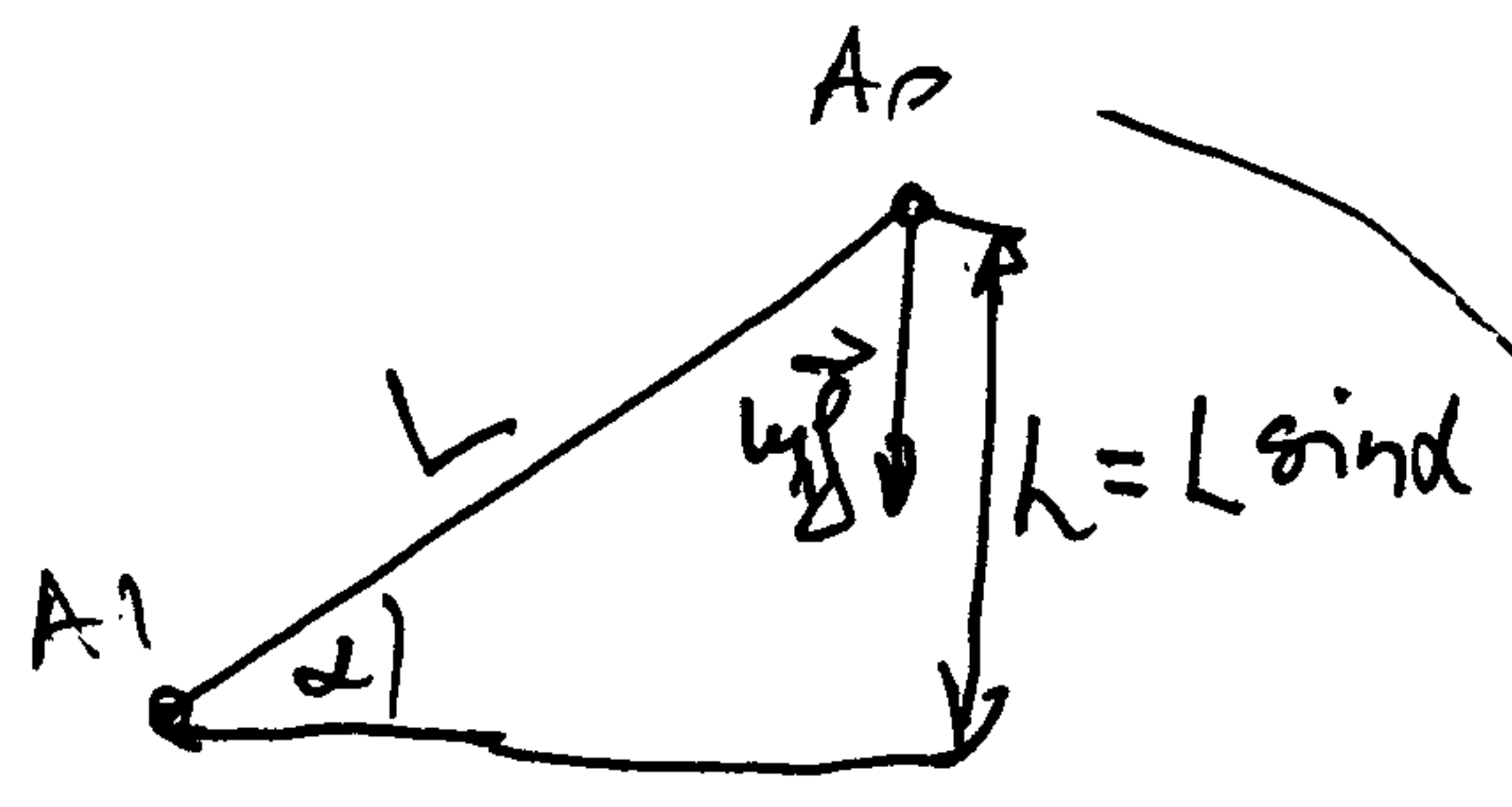
$$\omega = \frac{v}{r} (*)$$

$$E_k = E_k^{(1)} + E_k^{(2)}$$

$$E_k^{(1)} = \frac{1}{2} m_1 v^2; E_k^{(2)} = \frac{1}{2} J_0 \omega^2; J_0 = \frac{m_2 r^2}{2}$$

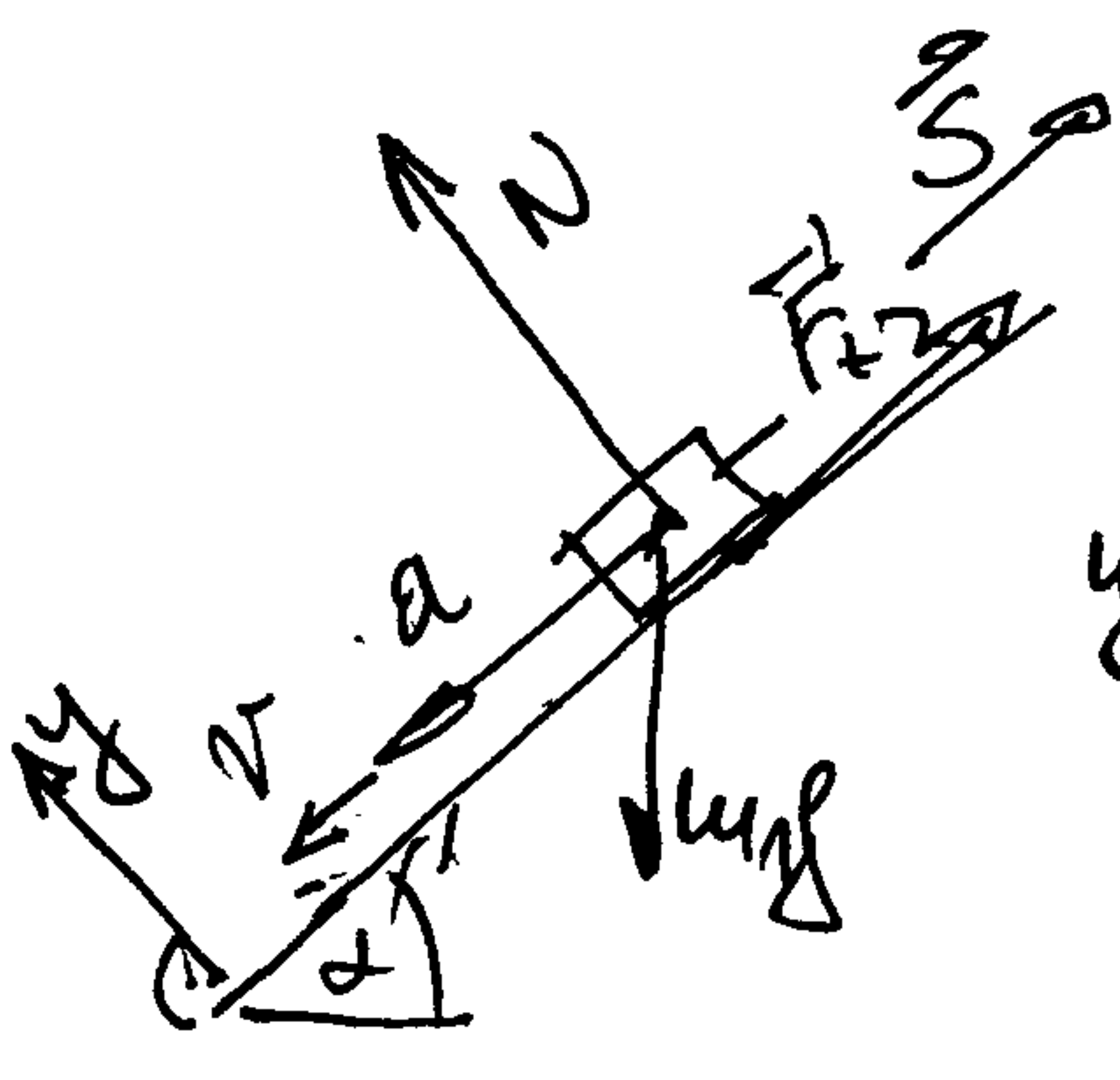
$$E_k = \frac{1}{2} (m_1 + \frac{m_2}{2}) v^2$$

$$E_{k1} - E_{k0} = A_{(0,1)}(m_1 \vec{g}) + A_{(0,1)}(\vec{F}_{tr}) \quad \left. \begin{array}{l} A_{(0,1)}(m_1 \vec{g}) = m_1 g h \\ = m_1 g L \sin \alpha \end{array} \right\}$$



$$\frac{1}{2} (m_1 + \frac{m_2}{2}) v_1^2 - \frac{1}{2} (m_1 + \frac{m_2}{2}) v_0^2 = m_1 g L \sin \alpha - \mu m_1 g L \cos \alpha$$

$$v_1 = \sqrt{\frac{2 m_1 g L (\sin \alpha - \mu \cos \alpha)}{m_1 + m_2/2}} = 3,27 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

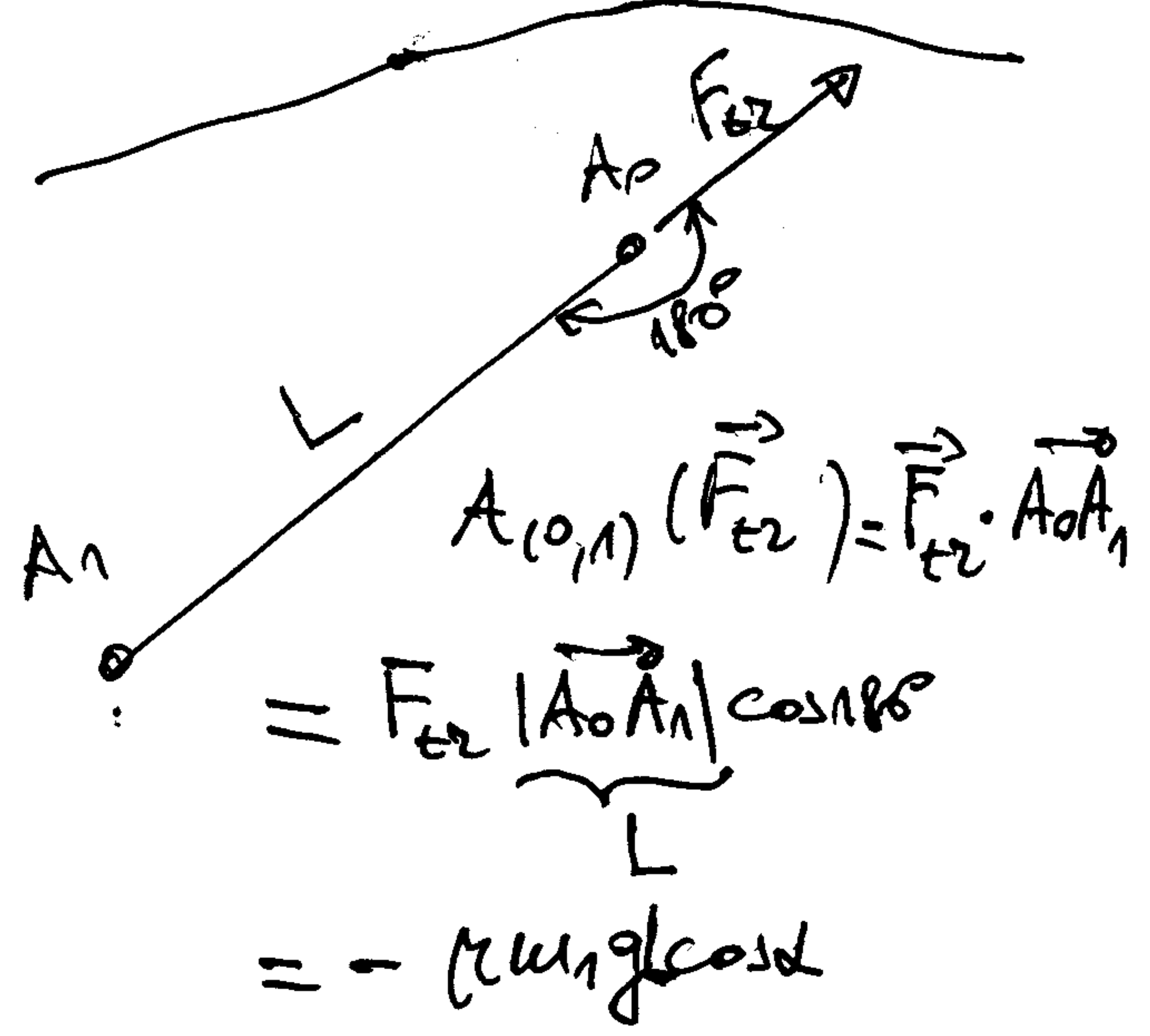


$$m_1 \vec{a} = m_1 \vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{tr} + \vec{S}$$

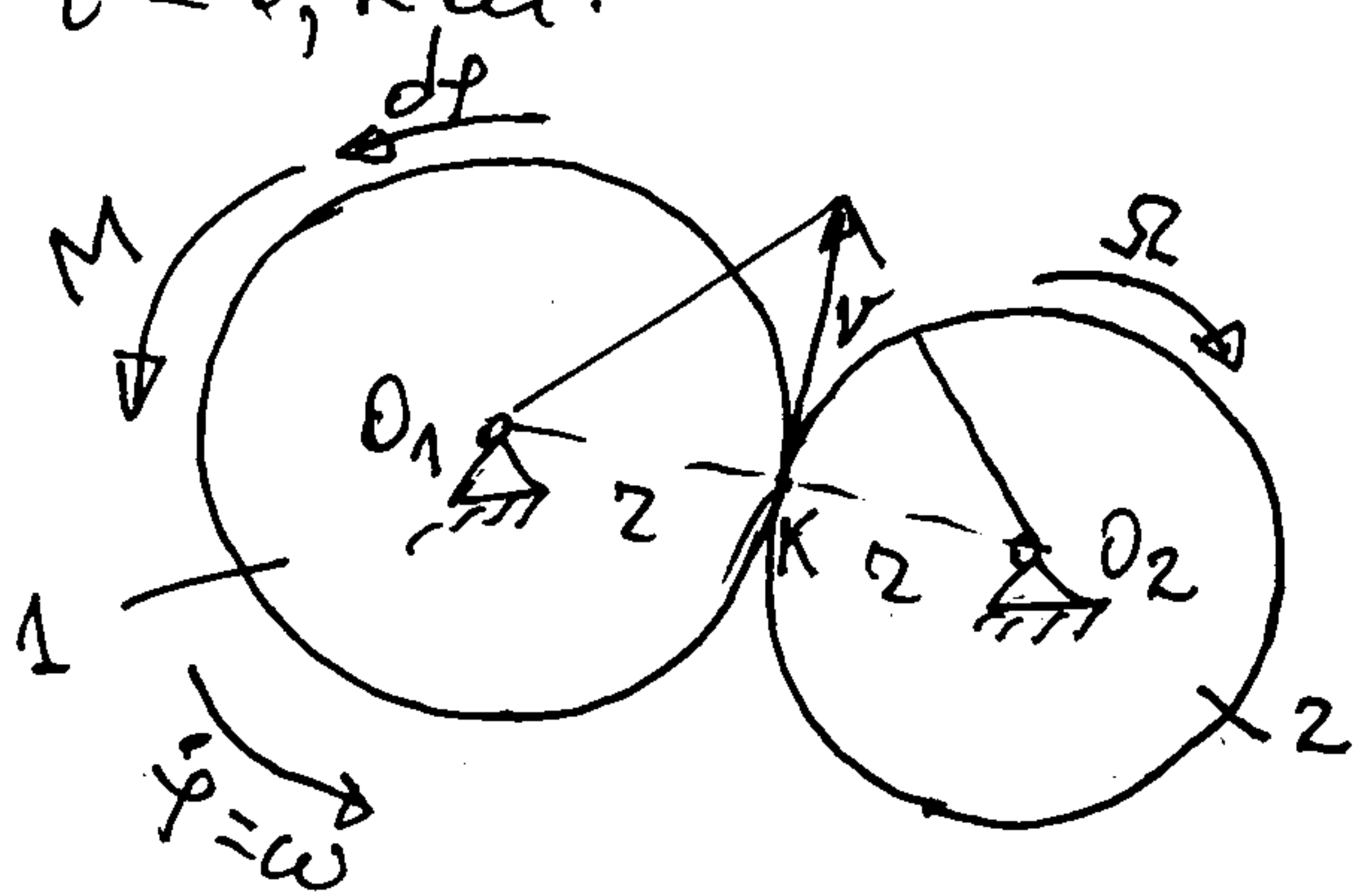
$$y: 0 = -m_1 g \cos \alpha + N$$

$$N = m_1 g \cos \alpha$$

$$F_{tr} = \mu N = \mu m_1 g \cos \alpha = \cos \alpha \mu m_1 g$$



7. Dva identična, međusobno sprejuna, zupčanika, svaki mase $m = 2 \text{ kg}$, dovode se u kretanje iz mirovanja dejstvom konstantnog obrotog momenta $M = 1 \text{ Nm}$. Odrediti ugaoni brzini zupčanika nakon dva obrta, ako je poluprečnik inercije svakog od njih za obrotne ose $i = 0,2 \text{ m}$.



$$\begin{aligned} v &= r_2 \omega \\ v &= r_2 \Omega \end{aligned} \Rightarrow \Omega = \omega$$

$$E_k = \frac{1}{2} J_{O_1} \omega^2 + \frac{1}{2} J_{O_2} \Omega^2$$

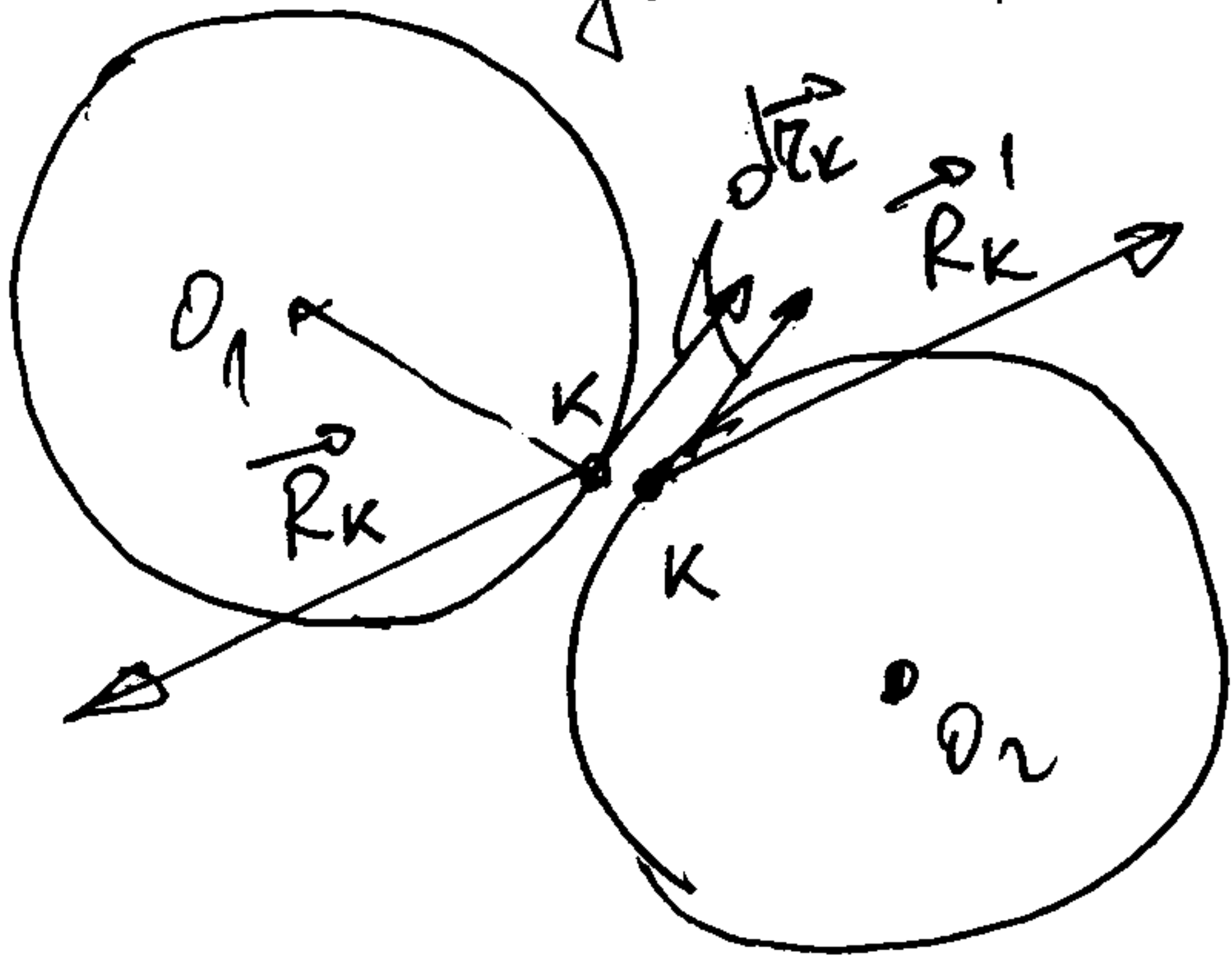
$$J_{O_1} = J_{O_2} = m i^2$$

$$E_k = m i^2 \omega^2$$

$$E_{k1} - E_{k0} = A_{(O_1)}(M); \quad \Delta A(M) = M \Delta \varphi; \quad A_{(O_1)}(M) = \int_0^{4\pi} M d\varphi = 4M\pi$$

$$m i^2 \omega_1^2 - m i^2 \omega_0^2 = 4M\pi \Rightarrow \omega_1 = \sqrt{\frac{4M\pi}{m i^2}} = 12,53 \text{ s}^{-1}$$

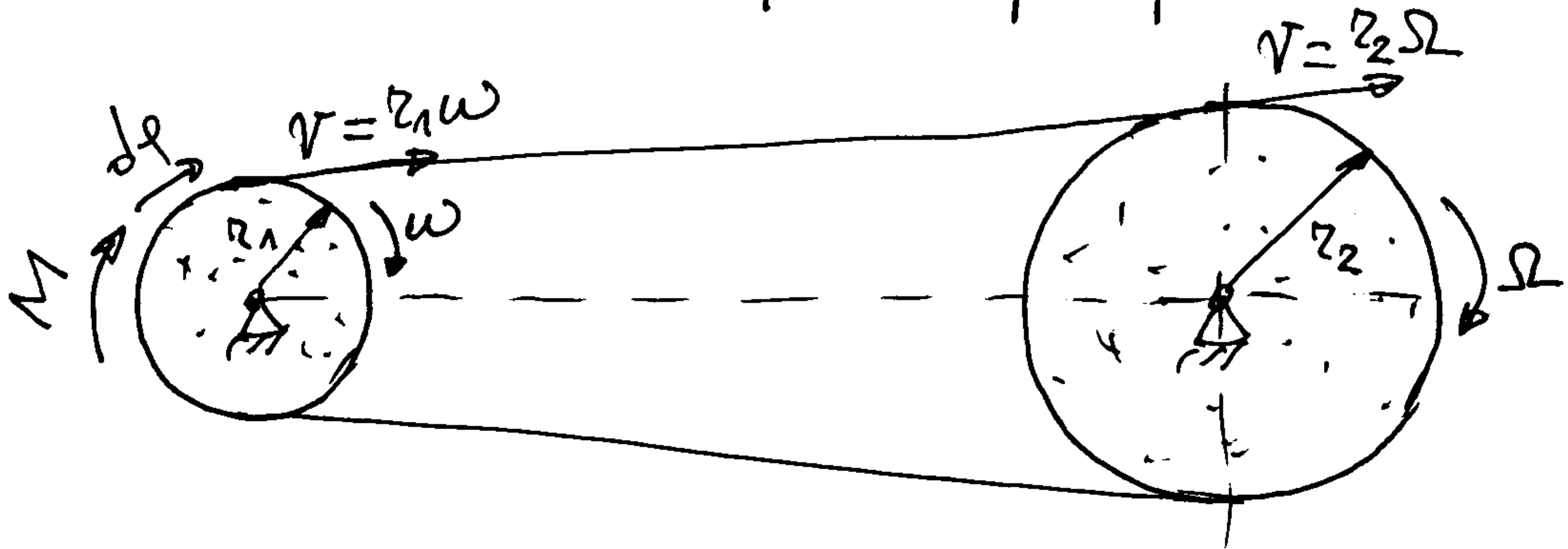
N: Pod unutrašnjih sila u tački dodira \vec{R}_K i \vec{R}'_K je jednako nuli jer nema približavanja između tačaka. Iz toga:



$$\vec{R}'_K = -\vec{R}_K$$

$$\begin{aligned} \Delta A(\vec{R}_K) + \Delta A(\vec{R}'_K) &= \vec{R}_K \cdot d\vec{r}_K + \vec{R}'_K \cdot d\vec{r}_K \\ &= \vec{R}_K \cdot d\vec{r}_K - \vec{R}_K \cdot d\vec{r}_K \equiv 0 \end{aligned}$$

8. Kvašni prenosnik počinje kretanje iz mira pod dejstvom konstantnog spreza sile momenta $M = 2,5 \text{ Nm}$. Momenti inercije kvašniča u odnosu na njihove ose obrtanja su $J_2 = 2J_1 = 1 \text{ kgm}^2$. Odrediti ugaoni brzini kvašniča nakon tri obrta, ako su poluprečnici kvašniča $r_2 = 2r_1$.



$$r_1 \omega = r_2 \Omega \Rightarrow \Omega = \frac{r_1}{r_2} \omega = \frac{r_1}{2r_1} \omega = \frac{1}{2} \omega$$

$$E_k = \frac{1}{2} J_1 \omega^2 + \frac{1}{2} J_2 \Omega^2 = \frac{3}{4} J_1 \omega^2$$

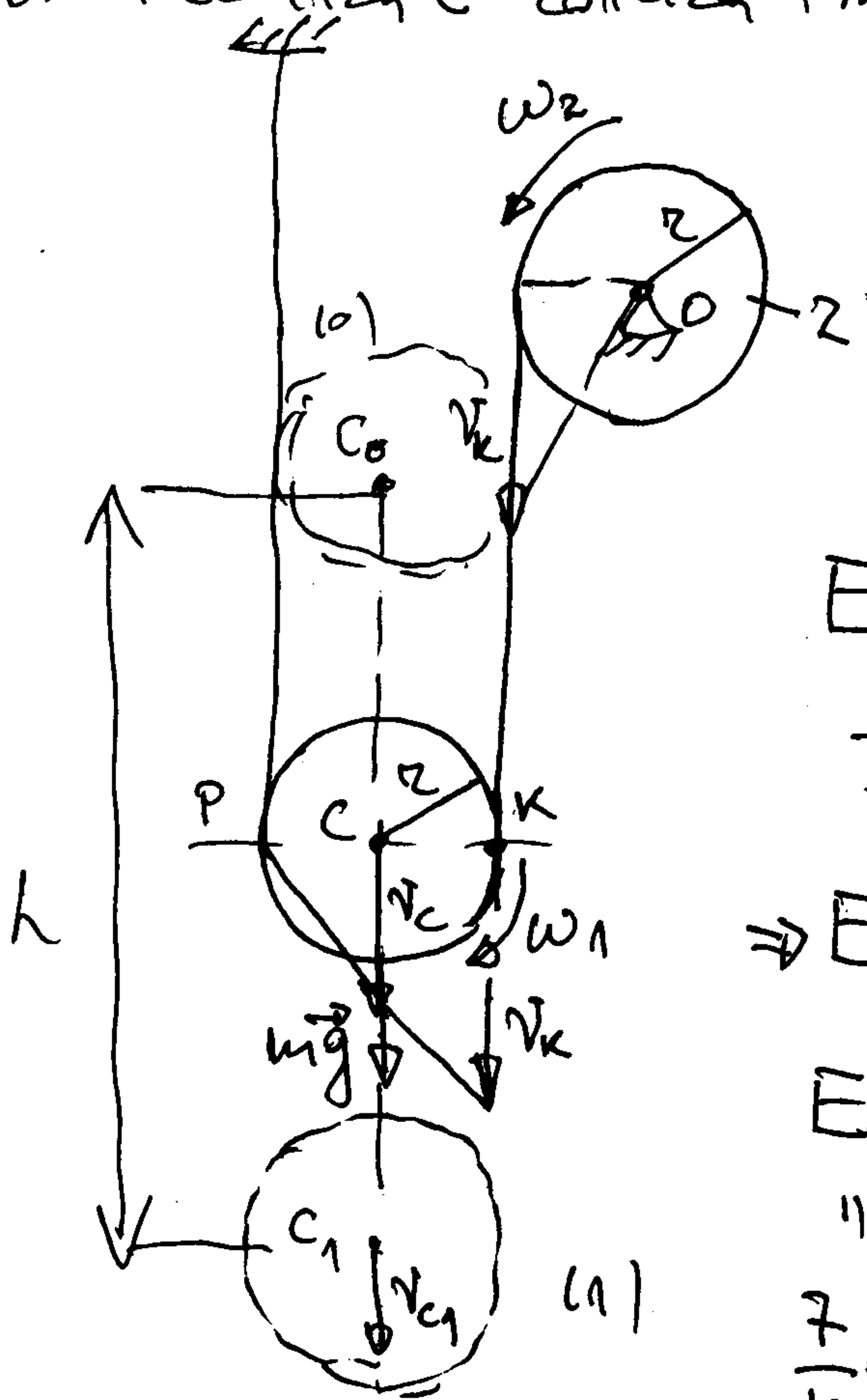
$$\Delta A = M \int_0^{6\pi} r \, d\varphi = 6\pi M r$$

$$E_{k1} - E_{k0} = A_{(0,1)}(M)$$

$$\frac{3}{4} J_1 \omega_1^2 = 6\pi M r \Rightarrow \omega_1 = \sqrt{\frac{8\pi M r}{J_1}} = 11,2 \text{ s}^{-1}$$

N. Koš se smatra neefektivnim, pa je zadat na u Koš-u jednako nuli.

9. Identični koturovi 1 i 2, masa m i poluprečnik r , koji se mogu smatrati homogenim kružnim diskovima, počinju kretanje iz mira u vertikalnoj ravni pod dejstvom sile teže. Uže koje je namotano na kotur 2 i prebačeno preko kotura 1 je neefektivno (v. klizi). Odrediti brzinu centra C kotura 1 nakon što se on spusti za $h = 1 \text{ m}$.



- Kotur 1 uvodi zavno kretanje, a 2 dostiže do nepokretne osi.

$$v_k = 2v_c, \quad v_c = r\omega_1 \rightarrow \omega_1 = \frac{v_c}{r}$$

$$v_n = 2\omega_2 \Rightarrow \omega_2 = \frac{2v_c}{r}$$

$$E_k = \frac{1}{2} m v_c^2 + \frac{1}{2} J_c \omega_1^2 + \frac{1}{2} J_o \omega_2^2$$

$$J_c = J_o = \frac{m r^2}{2}$$

$$\Rightarrow E_k = \frac{7}{4} m v_c^2$$

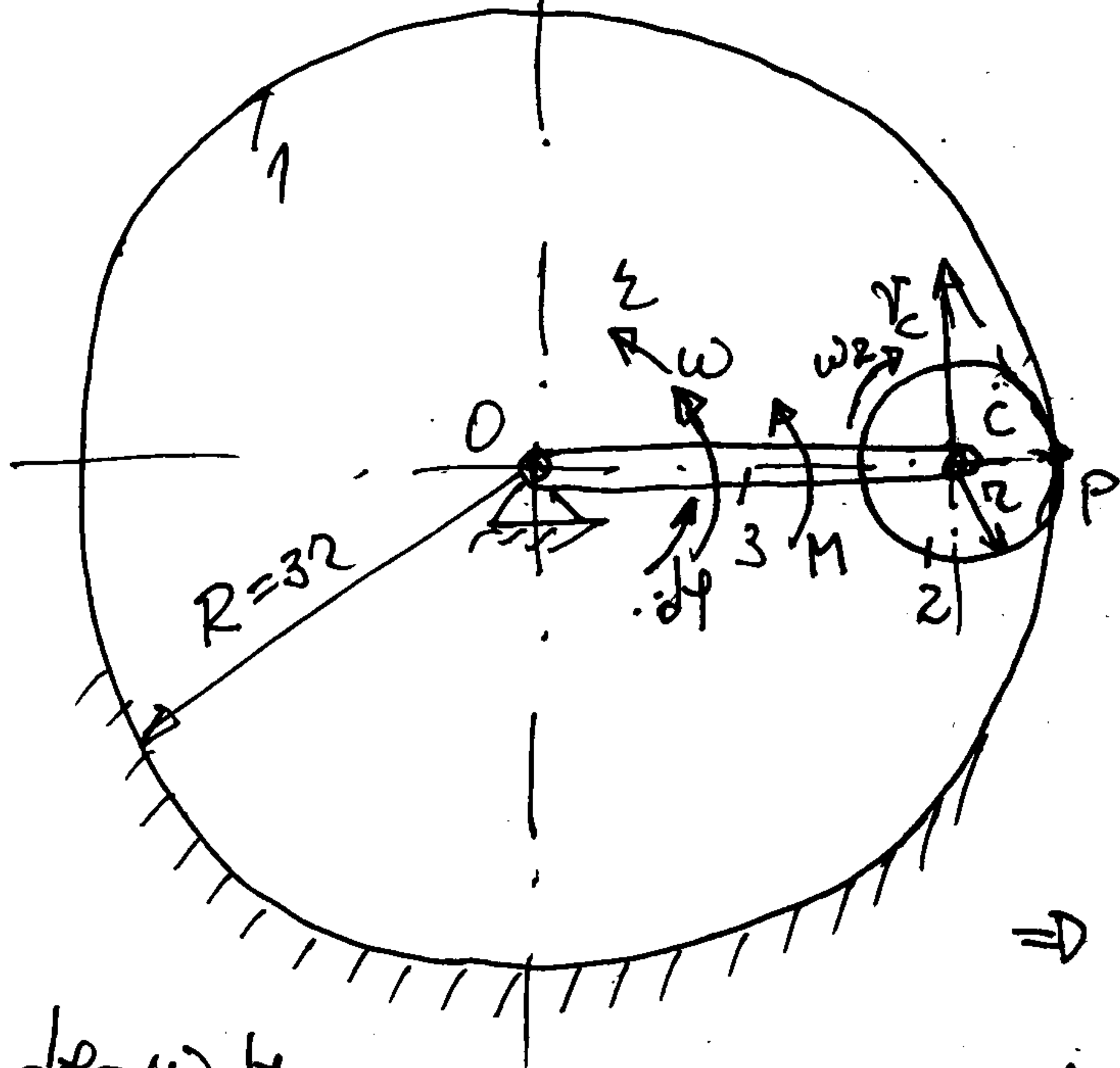
$$E_{k1} - E_{k0} = A_{(0,1)}(m \vec{g})$$

" " " "

$$\frac{7}{4} m v_{c1}^2 - 0 = mgh$$

$$v_{c1} = \sqrt{\frac{4gh}{7}} = 2,37 \text{ m/s}$$

10. Zupčanik 2, mase m_2 i poluprečnika r ozubljen je sa nepomičnijim zupčanikom 1 poluprečnika $R=3r$. Zupčanik 2 se dovodi u kretanje pomoću krivaj 3, mase m_3 , koja se okreće pod dejstvom sprega sile konstantnog momenta M . Zupčanik 2 smatramo homogenim kružnim diskom a krivaju 3 homogenim tankim štapom. a) Odrediti kinetičku energiju sistema u funkciji ugaone brzine krivaj. b) Odrediti ugaono ubrzanje krivaj. Mehanizam leži u horizontalnoj ravni.



$$v_C = \overline{OC} \omega = 2r\omega$$

$$v_C = \overline{CP} \omega_2 = r\omega_2$$

$$\Rightarrow \omega_2 = 2\omega$$

$$E_k = \frac{1}{2} J_0^{(3)} \omega^2 + \frac{1}{2} m_2 v_C^2 + \frac{1}{2} J_C^{(2)} \omega_2^2$$

$$J_0^{(3)} = \frac{m_3 (2r)^2}{3} \quad J_C^{(2)} = \frac{m_2 r^2}{2}$$

$$\Rightarrow E_k = \frac{9m_2 + 2m_3}{3} r^2 \omega^2$$

$$d\varphi = \omega dt$$

$$\delta A = M d\varphi$$

$$\frac{dE_k}{dt} = \frac{\delta A}{dt} \quad \text{-- diferenc. oblik zakona o promjeni kin. en.}$$

||

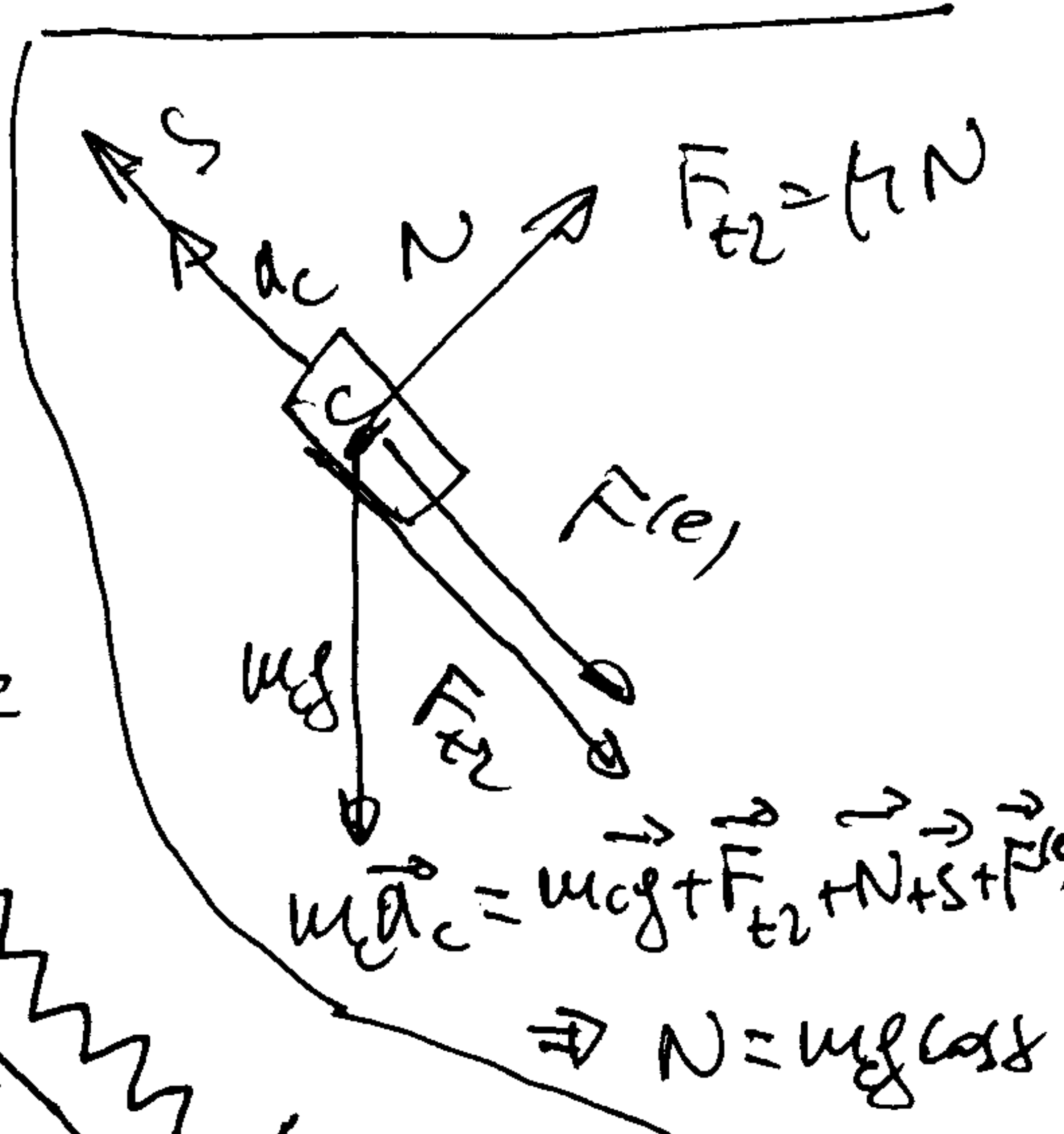
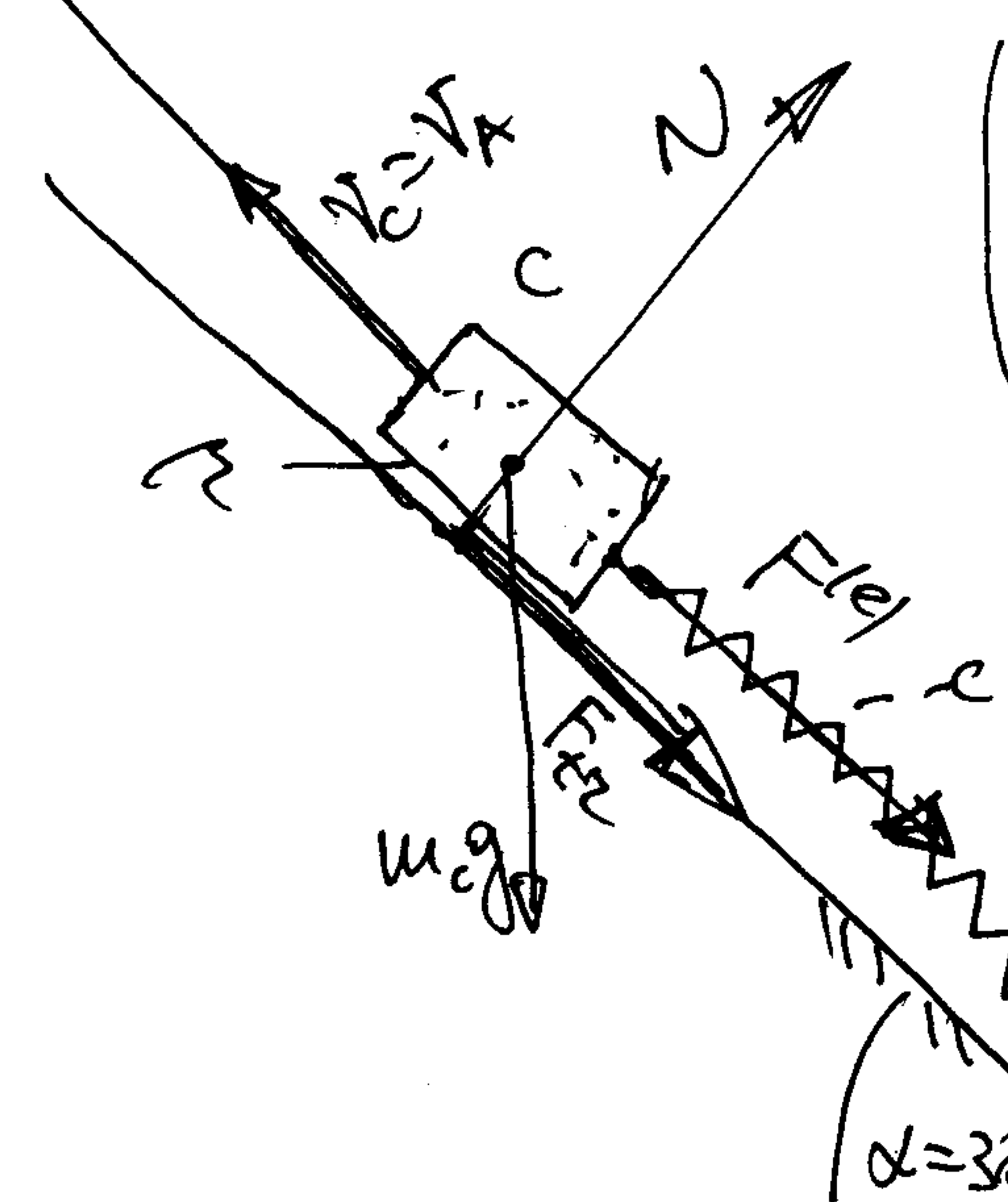
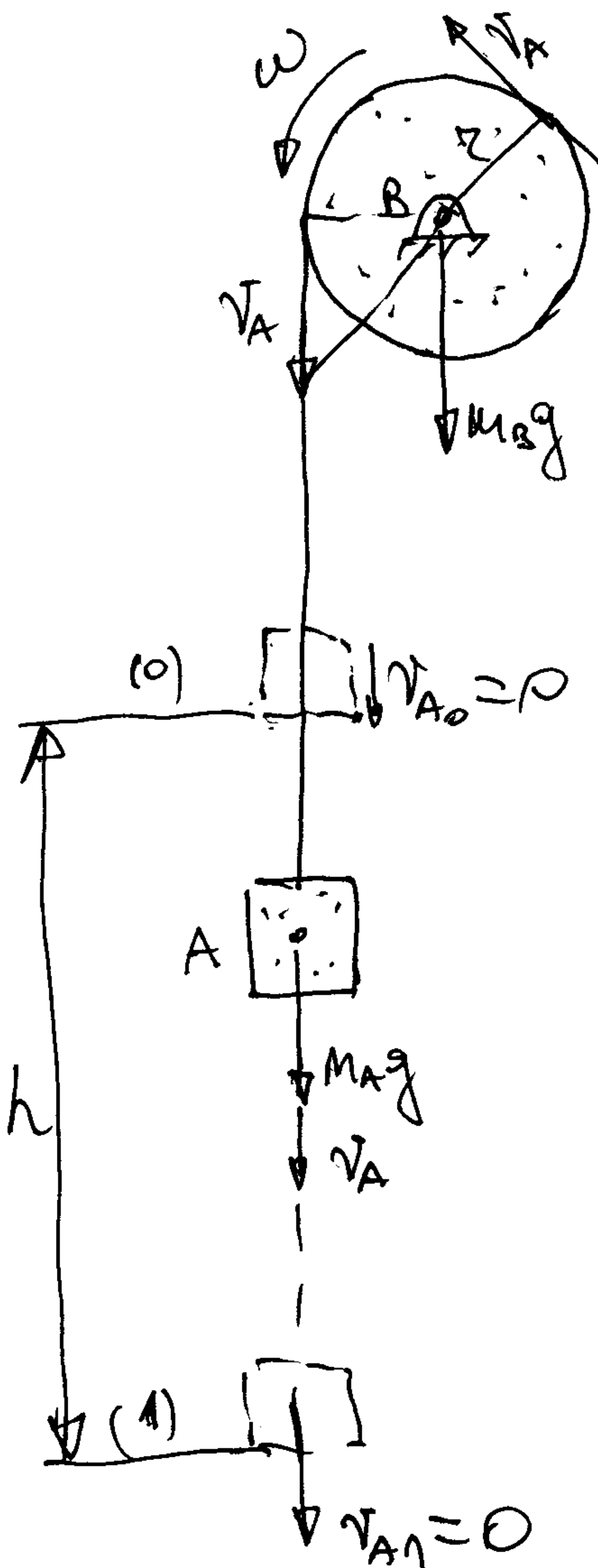
$$\frac{9m_2 + 2m_3}{3} r^2 \cdot 2\omega \frac{d\omega}{dt} = M \frac{d\varphi}{dt}$$

$$\varepsilon = \ddot{\varphi} = \frac{3M}{2(9m_2 + 2m_3) r^2}$$

11. Tež A, mase $m_A = 10 \text{ kg}$, počevši vrtenje iz mira, posredstvom ne-istegljivog konopca i kotura B (homogeni kružni disk mase $m_B = 30 \text{ kg}$ poluprečnika $r = 30 \text{ cm}$), dovodi u kretanje sandučić C mase $m_C = 5 \text{ kg}$ uz strmu ravan nagiba $\alpha = 30^\circ$. Sandučić je vezan za oprugu čvrstosti $c = 2 \text{ N/cm}$, koja je u početnom položaju sandučića neupregnuta. Dinamički koeficijent trenja između sandučića i strme ravni je $\mu = 0,1$. Odrediti: a) kinetičku energiju sistema u funkciji brzine tege; b) maksimalno zastejanje za koje će se spustiti tež.

$$v_A = 2\omega \Rightarrow \omega = \frac{v_A}{2}$$

$$v_C = v_A$$



$$E_k = \frac{1}{2} m_A v_A^2 + \frac{1}{2} J_B \omega^2 + \frac{1}{2} m_C v_C^2 \quad J_B = \frac{m_B r^2}{2}$$

$$E_k = \frac{1}{4} (2m_A + m_B + 2m_C) v_A^2$$

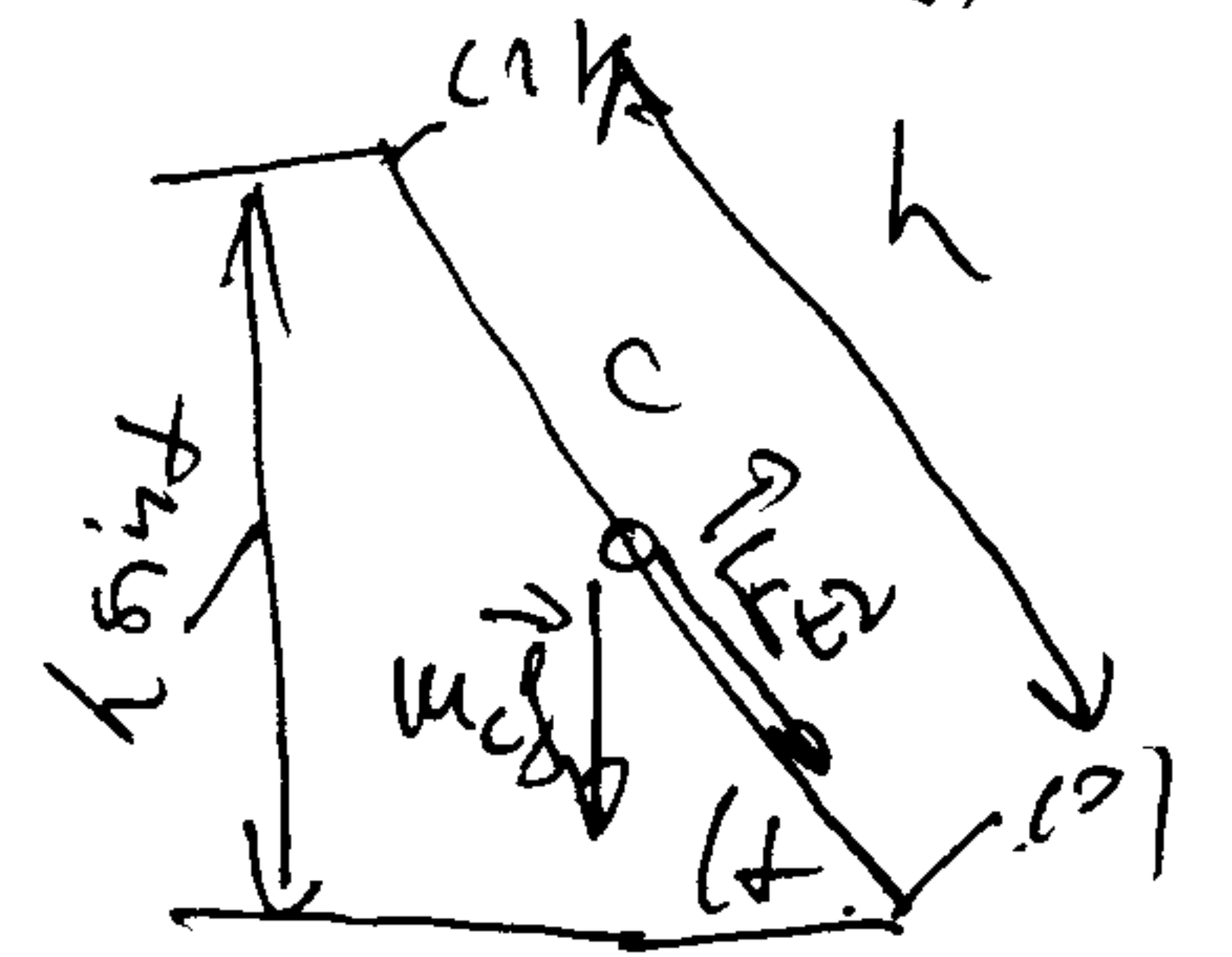
$$E_{k1} - E_{k0} = A_{(0,1)}(m_A \vec{g}) + A_{(0,1)}(m_C \vec{g}) + A_{(0,1)}(\vec{F}_{tr}) + A_{(0,1)}(\vec{F}_{el})$$

$$A_{(0,1)}(m_A \vec{g}) = m_A g h; \quad A_{(0,1)}(m_C \vec{g}) = -m_C g h \sin \alpha; \quad A_{(0,1)}(\vec{F}_{tr}) = -F_{tr} h = -\mu m_C g h \cos \alpha$$

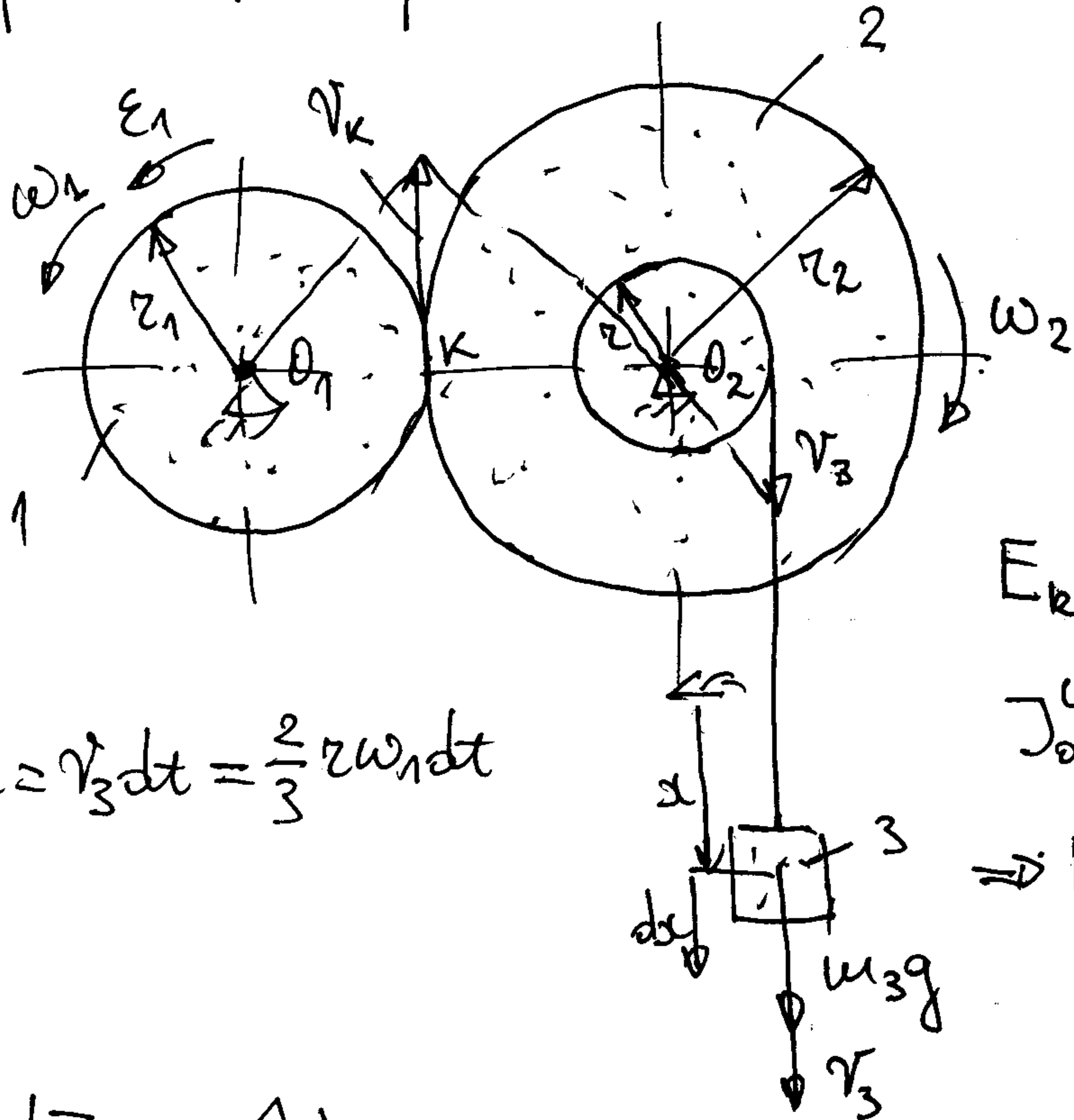
$$A_{(0,1)}(\vec{F}_{el}) = \frac{1}{2} c (\Delta_0^2 - \Delta_1^2), \quad \Delta_0 = 0, \quad \Delta_1 = h$$

$$\Rightarrow m_A g h - m_C g h \sin \alpha - \mu m_C g h \cos \alpha - \frac{1}{2} c h^2 = 0$$

$$h = 2 [m_A - m_C (\sin \alpha + \mu \cos \alpha)] g / c = 0,69 \text{ m}$$



12. Zupčanici 1 i 2 (poluprečnika $r_1 = 2r$ i $r_2 = 3r$, masa $m_1 = 5 \text{ kg}$ i $m_2 = 10 \text{ kg}$) sa spojašnjim ozubljjenjem se mogu obrtati oko odgovarajućih nepokretnih horizontalnih osa O_1 i O_2 . Za zupčanik 2 je koaksijalno zavaren laci (zanemarljive mase) dočak poluprečnika $r = 10 \text{ cm}$ i na njega je namotano lako neistegljivo uže za čiji je slobodni kraj obješen teg 3 mase $m_3 = 2 \text{ kg}$. Odrediti: a) kinetičku energiju sistema u funkciji ugaone brzine zupčanika 1 b) ugaono ubrzanje zupčanika 1; c) tangencijalnu komponentu sile u tački sprezanja zupčanika. Zupčanike smatriti homogenim kružnim diskovima.



$$v_k = r_1 \omega_1 \quad \Rightarrow \quad \omega_2 = \frac{r_1}{r_2} \omega_1$$

$$v_k = r_2 \omega_2$$

$$v_3 = r \omega_2 \Rightarrow v_3 = r \frac{r_1}{r_2} \omega_1$$

$$\Rightarrow \omega_2 = \frac{2}{3} \omega_1, \quad v_3 = \frac{2}{3} r \omega_1$$

$$E_k = \frac{1}{2} J_{O_1}^{(1)} \omega_1^2 + \frac{1}{2} J_{O_2}^{(2)} \omega_2^2 + \frac{1}{2} m_3 v_3^2$$

$$J_{O_1}^{(1)} = \frac{m_1 r_1^2}{2} = 2 m_1 r^2, \quad J_{O_2}^{(2)} = \frac{m_2 r_2^2}{2} = \frac{9 m_2 r^2}{2}$$

$$\Rightarrow E_k = \left(m_1 + m_2 + \frac{2}{9} m_3 \right) r^2 \omega_1^2$$

$$\delta A = m_3 g dx, \quad = \frac{2}{3} m_3 g r \omega_1 dt$$

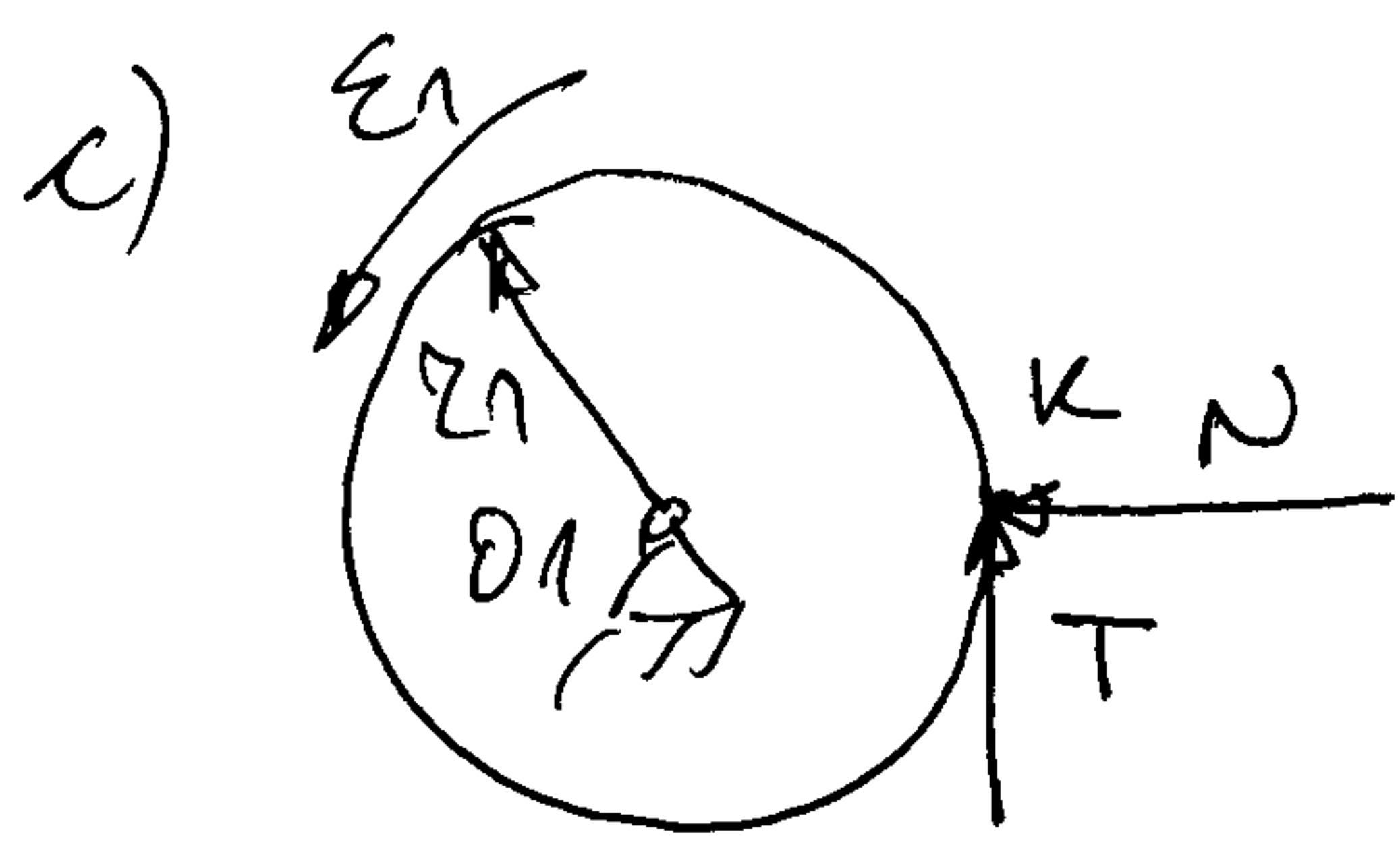
$$b) \frac{dE_k}{dt} = \frac{\delta A}{dt}$$

$$\frac{d}{dt} \left[\left(m_1 + m_2 + \frac{2}{9} m_3 \right) r^2 \omega_1 \right] \frac{d\omega_1}{dt} = \frac{2}{3} m_3 g r \omega_1$$

ϵ_1

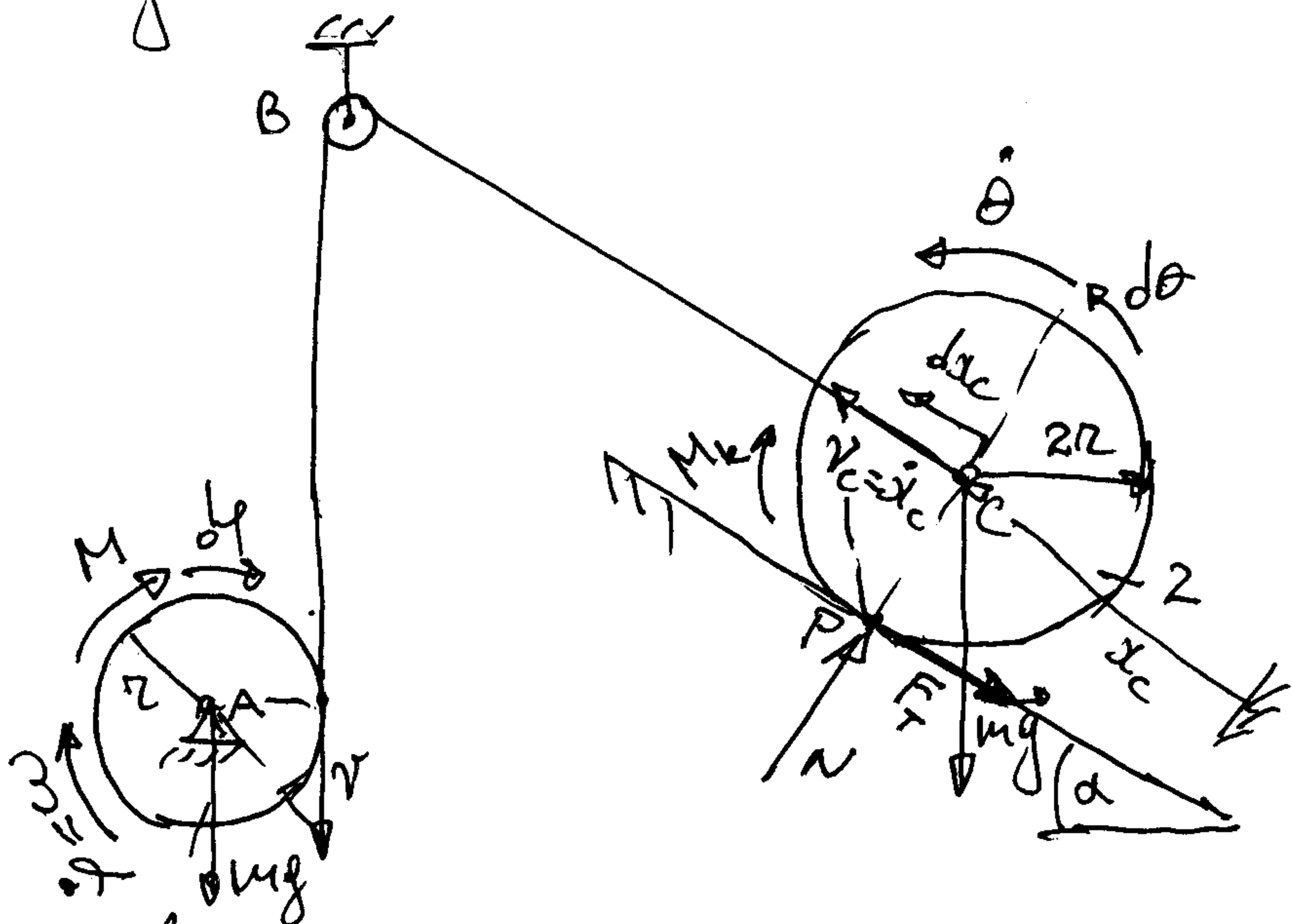
$$\Rightarrow \epsilon_1 = \frac{m_3 g r}{3 \left(m_1 + m_2 + \frac{2}{9} m_3 \right) r^2}$$

$$\epsilon_1 = 4,23 \text{ s}^{-2}$$



$$J_{O_1}^{(1)} \epsilon_1 = T \cdot r_1 \Rightarrow T = m_1 r_1 \cdot \epsilon_1 = 2,11 \text{ N}$$

13. Na točku A (homogeni kružni disk mase m i poluprečnika r) koji se može slobodno okretati oko nepokretne horizontalne ose A dejstvuje spreg sile konstantnog momenta M . Pomocu neistegljivog užeta i točka B, zamenskih maza, dovodi se u kretanje kalem \mathcal{K} (poluprečnika $2r$, mase $m_2 = 4m$ i poluprečnika inercije I_C centralni om uzavani su zavod kretanja $i_C = r$). Kalem se kotrlja bez klizanja na drugu ravnu žicu je nagib α . Kroz točku kotrljanja je k . a) Odrediti kinetičku energiju sistema kao funkciju brzine centra C kalem. b) Odrediti ubrzanje centra C kalem.



$$\left. \begin{aligned} v &= 2\omega \\ v_C &= v \end{aligned} \right\} \Rightarrow \omega = \frac{v_C}{2}$$

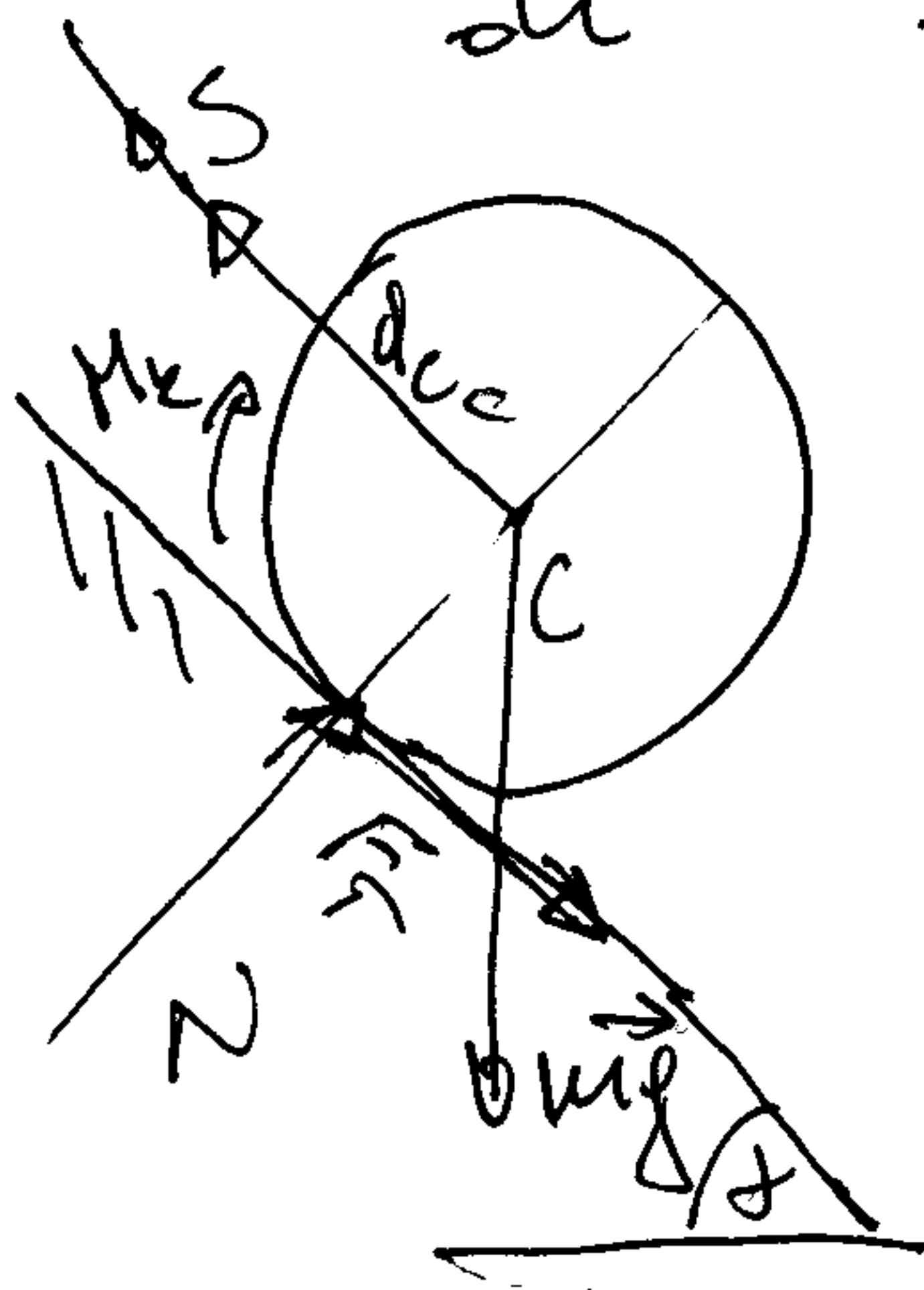
$$v_C = 2r\dot{\theta} \Rightarrow \dot{\theta} = \frac{v_C}{2r}$$

$$E_k = \underbrace{\frac{1}{2} J_A \omega^2}_{E_k^{(1)}} + \underbrace{\frac{1}{2} m v_C^2 + \frac{1}{2} J_C \dot{\theta}^2}_{E_k^{(2)}}$$

$$J_A = m r^2 / 2, \quad J_C = m_2 i_C^2 = 4m r^2$$

$$\Rightarrow E_k = \frac{7}{8} m v_C^2$$

$$\frac{dE_k}{dt} = \frac{\delta A}{dt}, \quad \delta A = \delta A(M) + \delta A(m_2 \vec{g}) + \delta A(M_k), \quad M_k = kN$$



$$m \vec{a}_C = m \vec{g} + \vec{N} + \vec{F} + \vec{S} \Rightarrow \text{along } \alpha: 0 = -mg \cos \alpha + N \Rightarrow N = mg \cos \alpha$$

$$\delta A(M_k) = -M_k d\theta = -k mg \cos \alpha \dot{\theta} dt = -k mg \cos \alpha \frac{v_C}{2r} dt$$

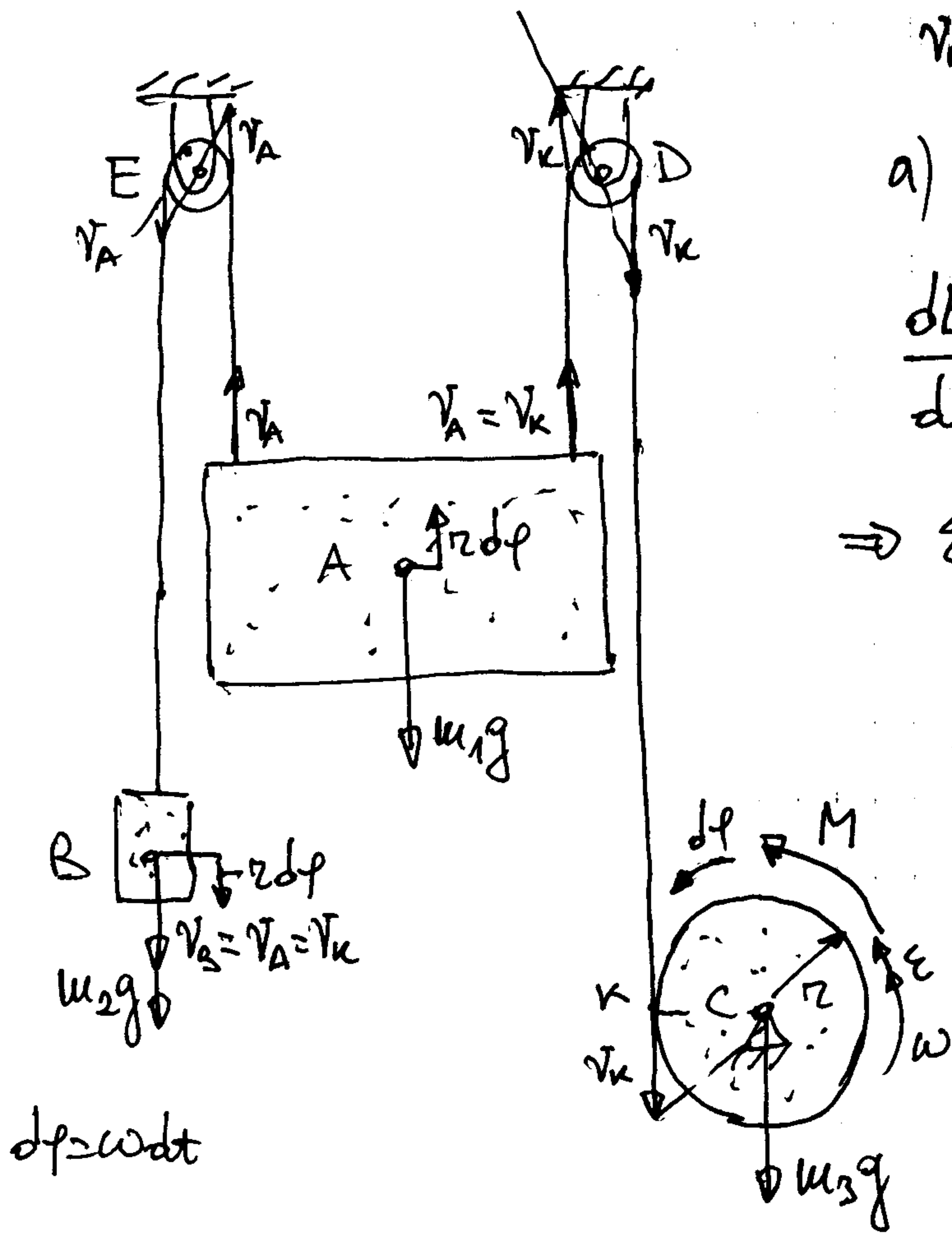
$$\delta A(M) = M df = M \dot{f} dt = M \frac{v_C}{r} dt$$

$$\delta A(m_2 \vec{g}) = -mg \sin \alpha d d_C = -mg \sin \alpha v_C dt$$

$$\frac{dE_k}{dt} = \frac{7}{4} m v_C \left(\frac{dv_C}{dt} \right) = d_C \cdot \frac{\delta A}{dt} = \left(\frac{M}{r} - mg \sin \alpha - \frac{k mg \cos \alpha}{2r} \right) v_C$$

$$\frac{dE_k}{dt} = \frac{\delta A}{dt} \Rightarrow a_C = \frac{4}{7m} \left[\frac{M}{r} - mg \left(\sin \alpha + \frac{k}{2r} \cos \alpha \right) \right]$$

14. Lift A ima masu $m_1 = 500 \text{ kg}$, a protivtež B masu $m_2 = 150 \text{ kg}$. Lift se podiže usled dejstva obrtnog momenta $M = 1200 \text{ Nm}$ na kotur C, poluprečnika $r = 0,3 \text{ m}$ i mase $m_3 = 40 \text{ kg}$ i poluprečnika inercije za obrtnu os $i = 0,25 \text{ m}$. Odrediti kinetičku energiju sistema u funkciji ugaone brzine kotura C, a zatim prikazati zakon o promjeni kinetičke energije radi ugaone ubrzanje kotura C. Koliko je ubrzanje lifta i koliko je sila u užetu za koje je obješen protivtež. Masu niti i koeficijenta D i E zanemariti.



$$v_B = v_A = v_C = r\omega$$

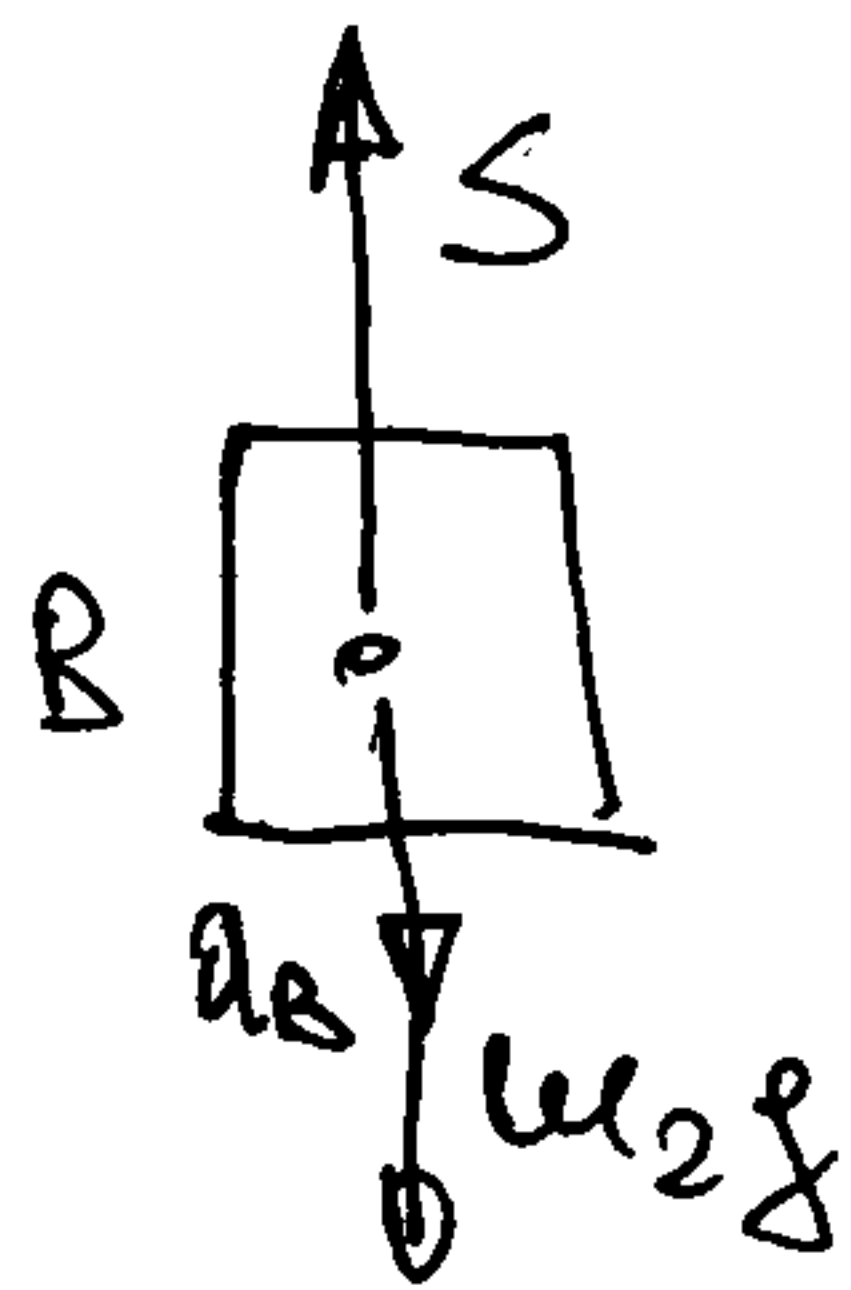
$$a) E_k = \frac{1}{2}(m_1 r^2 + m_2 r^2 + m_3 i^2)\omega^2$$

$$\frac{dE_k}{dt} = \frac{dA}{dt}, \quad dA = (M - m_1 g r + m_2 g r) d\phi$$

$$\Rightarrow \epsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{M - m_1 g r + m_2 g r}{m_1 r^2 + m_2 r^2 + m_3 i^2} = \dots$$

$$b) a_A = \frac{dv_A}{dt} = r\epsilon = \dots$$

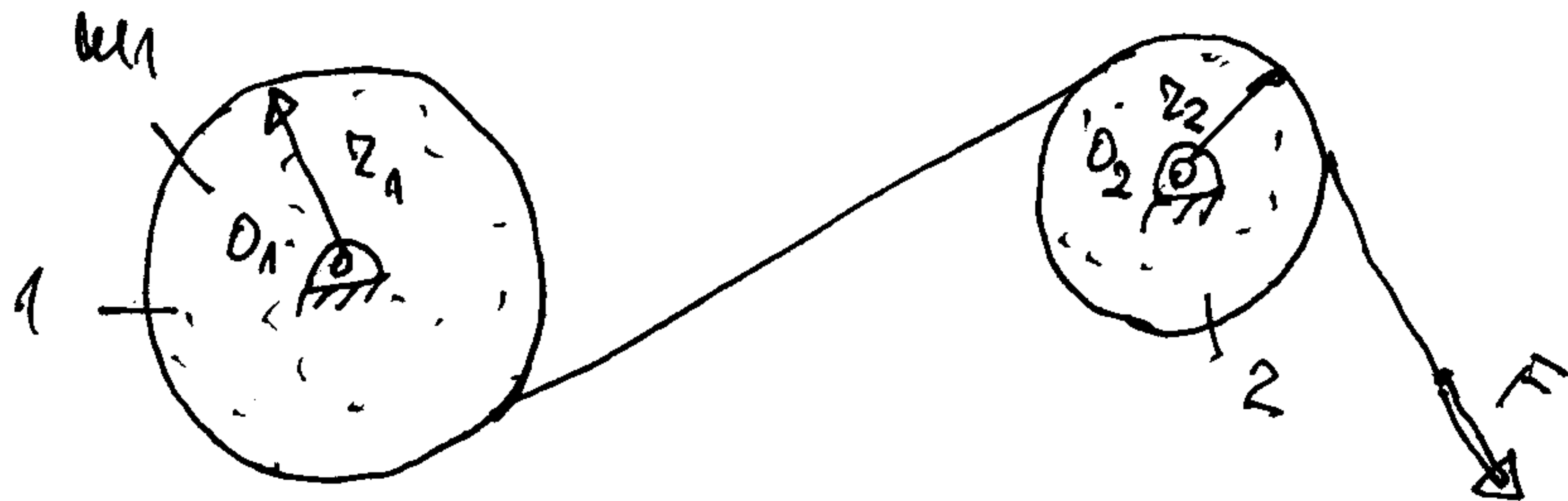
$$a_B = \frac{dv_B}{dt} = \frac{dv_A}{dt} = a_A$$



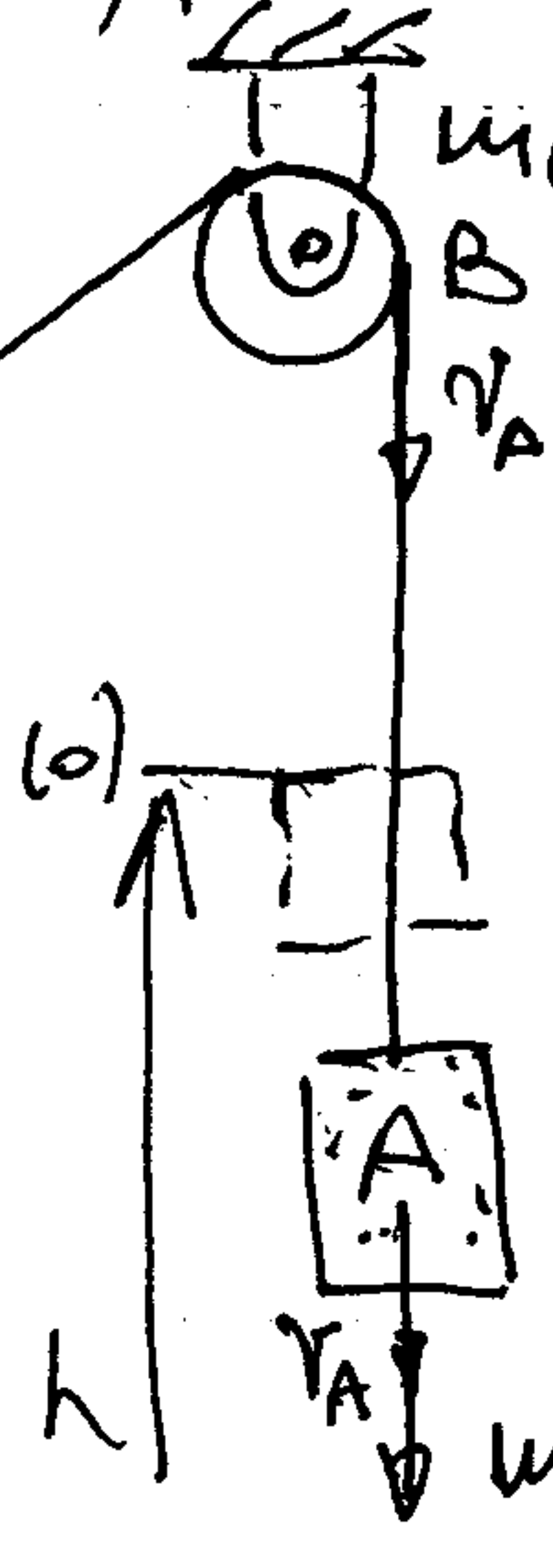
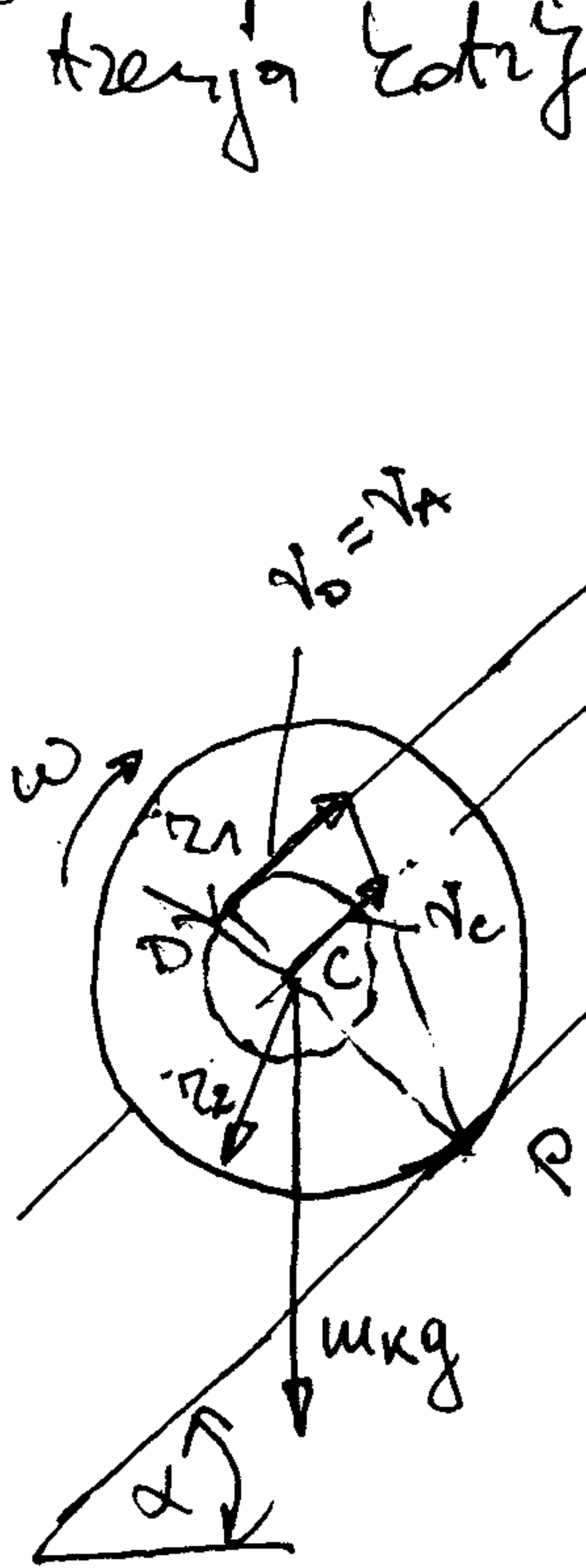
$$m_2 a_B = m_2 g - S \Rightarrow S = \dots$$

$$d\phi = \omega dt$$

15. Slobodan kraj neistegljivo uzeta namotanoj na kotur 1 (homogeni kružni disk mase $m_1 = 20 \text{ kg}$ i poluprečnika $r_1 = 20 \text{ cm}$) i prebacenog preko kotura 2 (homogeni kružni disk mase $m_2 = 10 \text{ kg}$ i poluprečnika $r_2 = 10 \text{ cm}$) vuče se silom $F = 30 \text{ N}$. a) Napisati kinetičnu energiju sistema u funkciji uprave brzine kotura 1. b) Odrediti ugaono ubrzanje kotura 1. c) Kolika je sila u užetu u dijelu između kotura.



16. Neistegljivo uže, na čijem kraju A visi teret mase $m_A = 25 \text{ kg}$, prebaceno je preko kotura zanemarljive mase i namotano na kalem K, mase $m_K = 10 \text{ kg}$ i poluprečnika inercije za centralnom osu upravan na ravan rotiranja $i_c = 7 \text{ cm}$. Odrediti: a) kinetičnu energiju sistema u funkciji brzine tereta smatrajući da se kalem kotura bez klizanja po dnu naj ravni nagiba $\alpha = 30^\circ$; b) brzinu tereta nakon što se on spusti sa visine $h = 2 \text{ m}$, počevši od stanja iz mirovanja; c) silu u užetu i silu trenja koturanja.



$r_1 = 5 \text{ cm}$
 $r_2 = 15 \text{ cm}$

$$v_D = v_A, v_C = r_2 \omega$$

$$v_D = (r_1 + r_2) \omega$$

$$\Rightarrow \omega = \frac{v_A}{r_1 + r_2}, v_C = \frac{r_2}{r_1 + r_2} v_A$$

$$a) E_k = \frac{1}{2} \left[m_A + m_K \left(\frac{r_2}{r_1 + r_2} \right)^2 + m_K \left(\frac{i_c}{r_1 + r_2} \right)^2 \right] v_A^2$$

$$b) E_{k1} - E_{k0} = A_{(0,1)}(m_A \vec{g}) + A_{(0,1)}(m_K \vec{g})$$

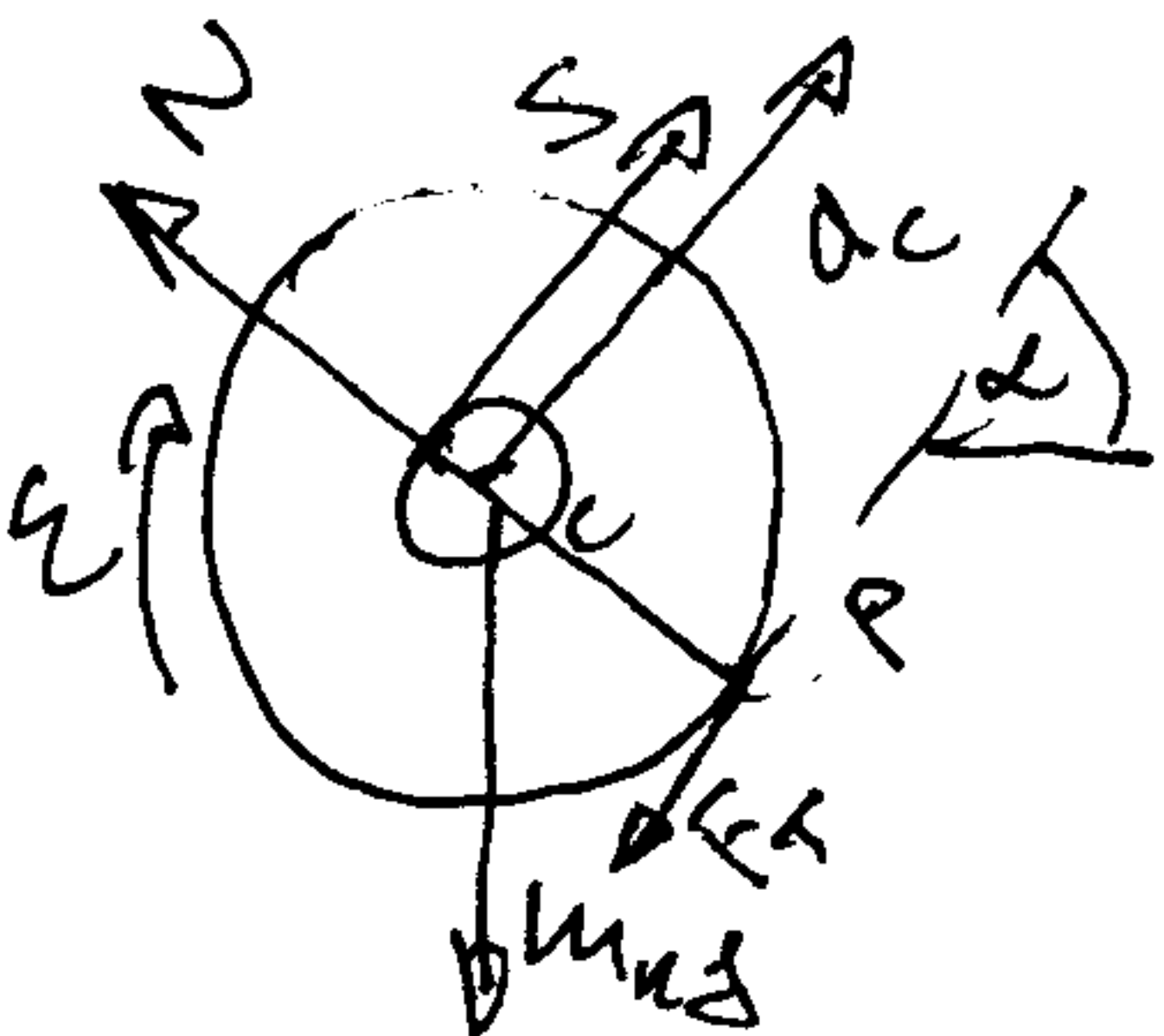
$$\parallel$$

$$m_A g h$$

$$A_{(0,1)}(m_K \vec{g}) = -m_K g \sin \alpha \cdot l_1$$

$$l_1 = \int_0^{t_1} v_C dt = \frac{r_2}{r_1 + r_2} \int_0^{t_1} v_A dt$$

$$\Rightarrow v_{A1} = \dots; c) \frac{dE_k}{dt} = \frac{dA}{dt}; \quad dA = m_A g v_A dt - m_K g \sin \alpha \frac{r_2}{r_1 + r_2} v_A dt$$

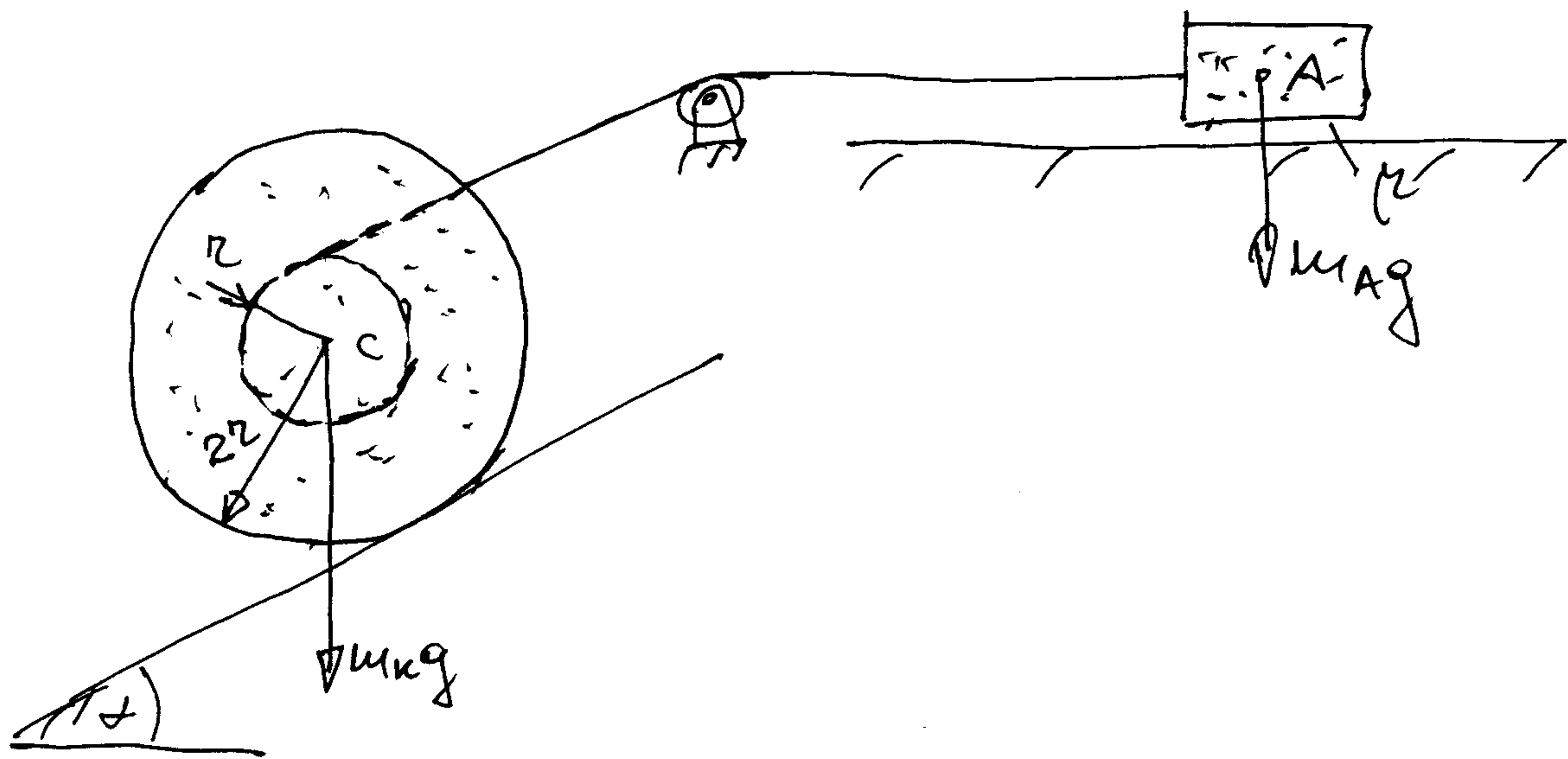


$$a_A = \dots; \quad a_C = \frac{r_2}{r_1 + r_2} a_A; \quad \varepsilon = \frac{a_A}{r_1 + r_2}$$

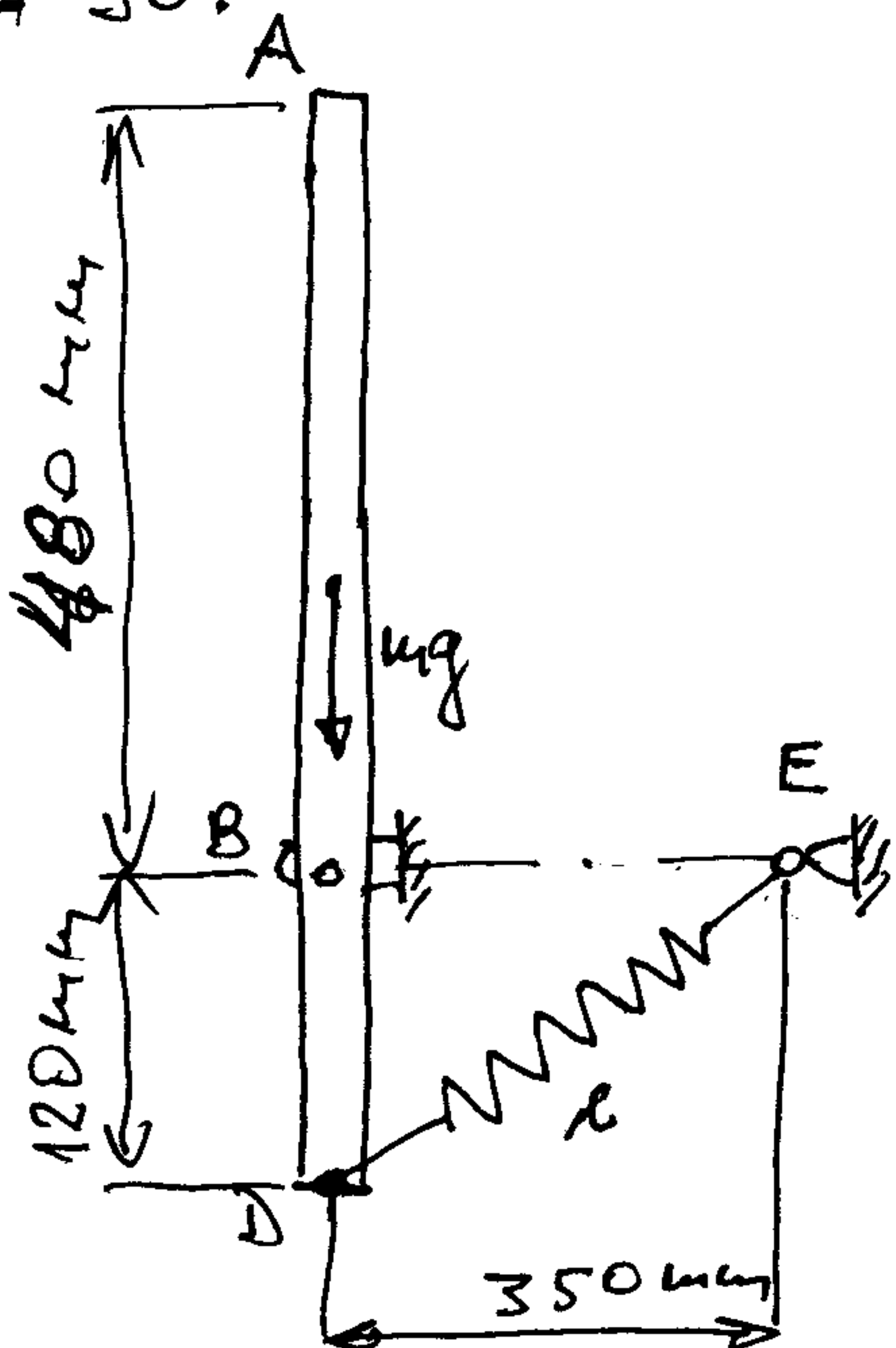
$$m_K a_C = -m_K g \sin \alpha - F_T + S$$

$$J_C \varepsilon = S r_1 - F_T r_2 \quad \Rightarrow S, F_T$$

17. Nerastopivo uže, zamenujive mase, za čiji kraj A je vezan sandučić mase $m_A = 2 \text{ kg}$ koji može da se kreće po horizontalnoj ravni sa koeficijentom trenja μ . Prebaceno je preko kotura zamenujive mase i namotano na kalem K, mase $m_K = 8 \text{ M}$ i poluprečnika inercije za centar mase I_C u ravni na zavoj kretanja $I_C = 3R^2/2$. Odrediti: a) kinetičku energiju sistema u funkciji brzine centra inercije C kalemna smatrajući da se on koturi bez klizanja po statičkoj ravni nagiba $\alpha = 30^\circ$; b) brzinu tačke C nakon što ona pređe zaostojanje l , počevši kretanje iz mira; c) sile u užetu. Dato je: $m = 3 \text{ kg}$, $R = 10 \text{ cm}$, $l = 2 \text{ m}$, $\mu = 0,2$.



18. Štap mase $m = 4 \text{ kg}$ može da se kreće u vertikalnoj ravni oko horizontalne ose B. Elastična opruga, krutosti $c = 400 \text{ N/m}$ i prirodne dužine $l_0 = 150 \text{ mm}$, je vezana za kraj D štapa. Znajući da je štap pristen iz mira iz vertikalnog položaja pričvršćenog na slici, odrediti njegovu ugaonu brzinu nakon što se obrne za ugao $\alpha = 90^\circ$.



$$P: \omega_1 = 11,13 \text{ s}^{-1}$$