XIV sedmica nastave

- predavanja i primjeri -

10. Elementarna teorija udara

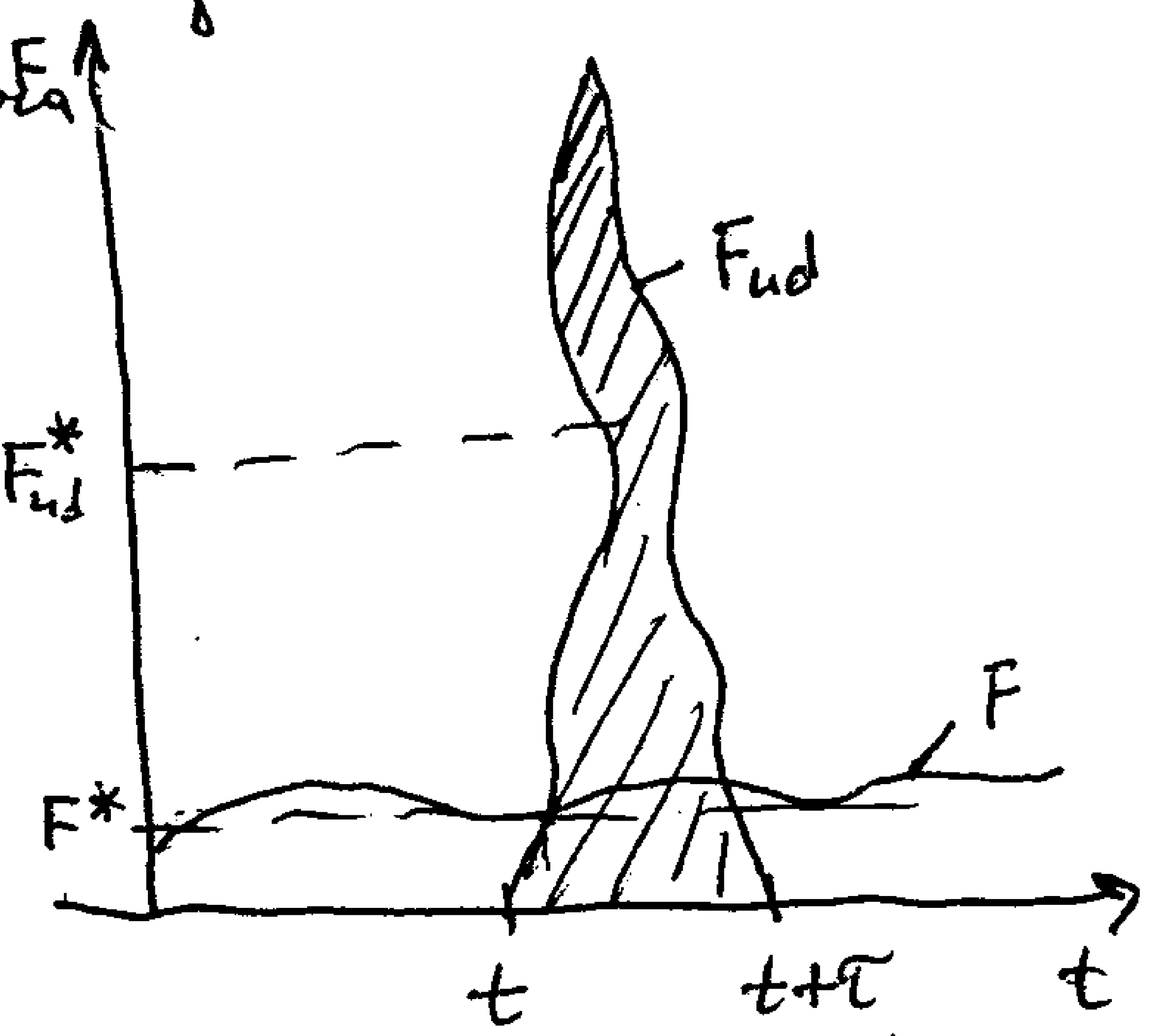
10.1 Pretpostavke i osnovna jednačina udara

Pojava pri kojoj se brzina materijalne tačke, ili pojedinih tačaka sistema, u toku vrlo malog intervala vremena τ promijeni za konačnu veličinu naziva se udar. Specifičnost ove pojave leži u činjenici da se za vrijeme udara, koje je veoma kratko i kreće se oko desetohiljaditog dijela sekunde, javljaju sile čiji intezitet dostiže veoma velike vrijednosti, a koje se zovu udarne (impulsne ili trenutne) sile. Takve sile, a samim tim i pojava udara, nastaju, na primjer, kada materijalno tijelo naiđe na neku prepreku (drugo tijelo), a takođe, sile istog tipa javljaju se i pri eksplozijama.

Teorija udara je zasnovana na sljedećim pretpostavkama:

1) Vrijeme udara τ je vrlo mala (beskonačno mala) veličina;

2) Udarne sile se za vrijeme udara mijenjaju u širokim granicama i dostižu veoma velike vrijednosti reda $1/\tau$. Kao mjera uzajamnog dejstva između tijela ne uzimaju se same udarne sile, već njihov impuls



$$\vec{I}_{ud} = \int_t^{t+\tau} \vec{F}_{ud}\, dt = \vec{F}^*_{ud}\, \tau$$

koji je, budući da je srednja vrijednost udarne sile F^*_{ud} za vrijeme udara reda $1/\tau$, konačna veličina.

Impuls neudarne sile $\vec{F}$ za vrijeme udara je $\int_t^{t+\tau} \vec{F}\, dt = \vec{F}^* \tau$ i predstavlja vrlo malu veličinu reda τ, koja se kao takva može zanemariti. U daljim razmatranjima impuls udarnih sila (udarni impuls) označavaćemo samo simbolom $\vec{I}$, jer se impulsi neudarnih sila za vrijeme udara zanemaruju.

Posmatrajmo tačku mase m koja se kreće pod dejstvom neudarne (obične) sile $\vec{F}$ i u nekom trenutku t na tačku počinje da djeluje udarna sila $\vec{F}_{ud}$, koja prestaje da djeluje u trenutku $t+\tau$. Neka je $\vec{v}(t) = \vec{V}$ i $\vec{v}(t+\tau) = \vec{U}$ - brzine tačke na početku i na kraju udara. Ako na kretanje tačke za vrijeme udara primijenimo integralni oblik zakona o promjeni količine kretanja, imajući u vidu da se impuls neudarne sile zanemaruje, dobijemo

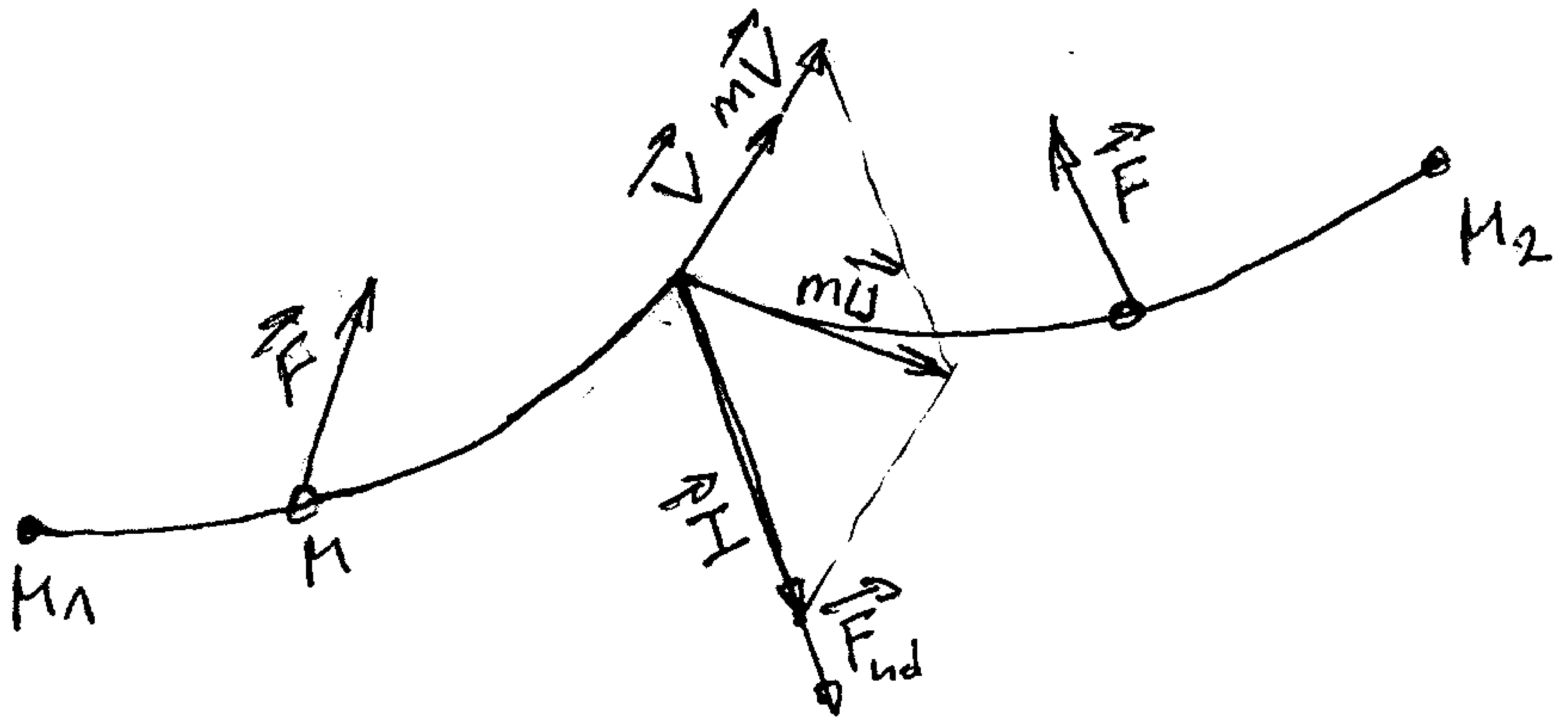
$$m\vec{U} - m\vec{V} = \vec{I}, \quad \vec{I} = \int_t^{t+\tau} \vec{F}_{ud}\, dt \qquad (1)$$

Prema tome, promjena količine kretanja materijalne tačke za vrijeme udara jednaka je udarnom impulsu.

Jednačina (1) predstavlja <u>osnovnu jednačinu</u> u teoriji udara

3) Pošto je brzina tačke za vrijeme udara konačna veličina, to će pomjeranje tačke za vrijeme udara biti $\Delta \vec{r} = \vec{v}_{sr}\, \tau \approx 0$, tj. za vrijeme udara tačka ne mijenja svoj položaj.

Poslije trenutka $t+\tau$ prestaje dejstvo udarne sile i tačka nastavlja da se kreće pod dejstvom neudarne sile. Pošto se, u opštem slučaju, brzina $\vec{U}$ razlikuje od brzine $\vec{V}$ i po veličini i po pravcu, to se putanja tačke na mjestu udara lomi



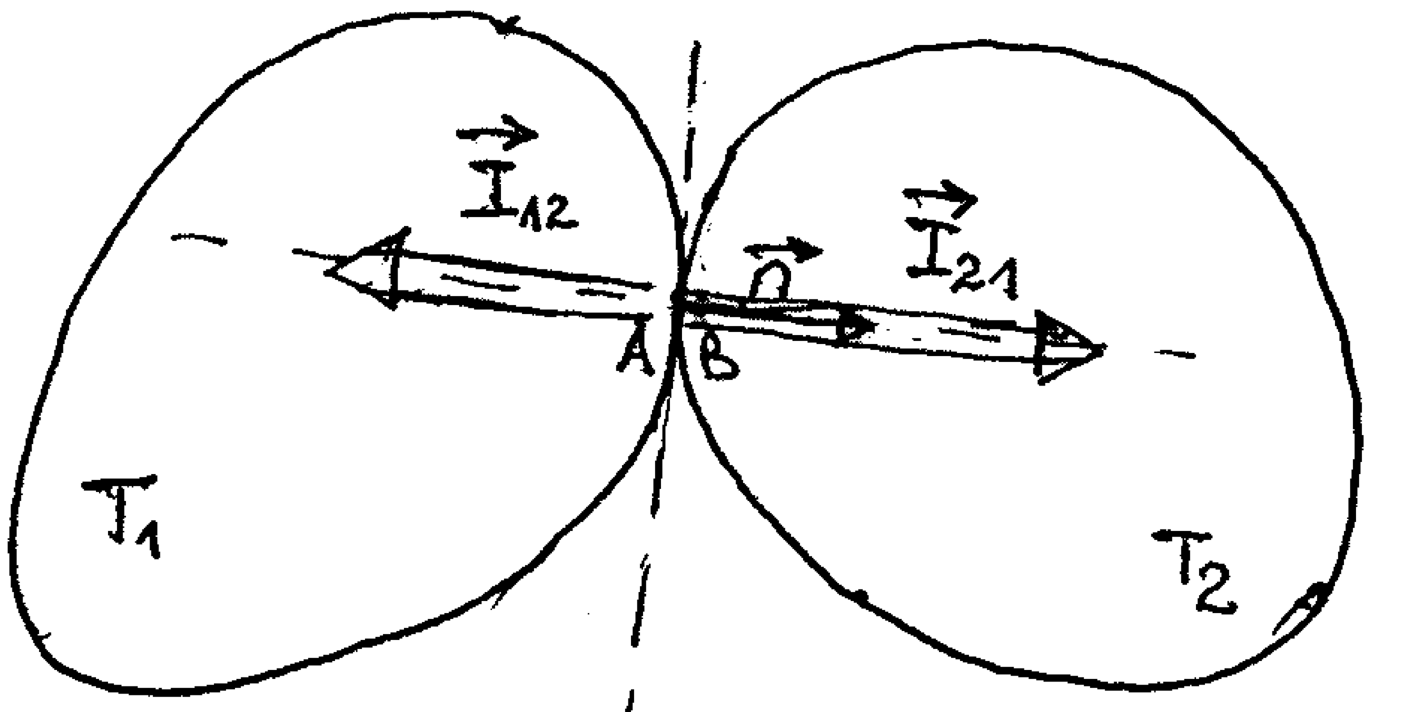
Na kraju rezimirajmo dobijene rezultate:

a) Dejstvo neudarnih sila (takva je npr. sila teže, elastična sila itd) za vrijeme udara se zanemaruje.

b) Za vrijeme udara pomjeranja tačaka sistema su jednaka nuli, tj. sistem se može smatrati nepokretnim.

c) Promjena brzine materijalne tačke za vrijeme udara određuje se na osnovu osnovne jednačine teorije udara (1).

10.2 Koeficijent uspostavljanja



$A \in T_1,\ B \in T_2,\ |\vec{n}| = 1,\ \vec{I}_{12} = -\vec{I}_{21}$

Pri sudaru dvaju tijela sa idealno glatkim površinama javljaju se, saglasno zakonu akcije i reakcije, udarni impulsi $\vec{I}_{12}$ i $\vec{I}_{21}$ jednakih intenziteta, pravaca zajedničke normale u dodirnim tačkama A i B, ali suprotnih smjerova. Na osnovu pretpostavke o apsolutnoj krutosti tijela ne može se upotpunosti objasniti proces udara pa se moraju uzeti u razmatranje fizička (prvenstveno elastična) svojstva tijela.

Sam proces udara razdvaja se na dvije faze. U toku prve faze (kompresije), usled lokalne deformacije, dolazi do zbližavanja tijela po pravcu zajedničke normale, što rezultira smanjivanjem normalne komponente relativne brzine dodirujućih tačaka A i B. Ova se komponenta smanjuje do nule, tada su tijela maksimalno deformisana, i tada se završava prva faza. Zatim počinje druga faza (restitucije) udara u toku koje unutrašnje elastične sile tijela teže da ih vrate u prvobitni oblik. Pri tome normalna komponenta relativne brzine dodirujućih tačaka, promijenivši smjer, raste ali njena maksimalna vrijednost, što odgovara završetku ove faze, po pravilu, ne dostiže vrijednost na početku udara.

Njutn je formulisao sljedeću hipotezu: Odnos intenziteta normalnih komponenata relativnih brzina dodirujućih tačaka tijela na kraju i početku udara je fizička konstanta.

Ova fizička konstanta zove se koeficijent uspostavljanja ili udara. Ona izražava fizička svojstva sudarajućih tijela, ali ne zavisi od masa tijela i relativnih brzina

Neka su $\vec{U}_A$ i $\vec{U}_B$ brzine tačaka A i B na kraju udara, a $\vec{V}_A$ i $\vec{V}_B$ – na početku udara.

$$U_{rn} = (\vec{U}_A - \vec{U}_B)\cdot\vec{n} = U_{An} - U_{Bn} -$$

$$V_{rn} = (\vec{V}_A - \vec{V}_B)\cdot\vec{n} = V_{An} - V_{Bn}$$

Prema Njutnovoj hipotezi je

$$k = \frac{|U_{rn}|}{|V_{rn}|} = \frac{|U_{An}-U_{Bn}|}{|V_{An}-V_{Bn}|}, \quad \text{ili} \quad k = \frac{U_{An}-U_{Bn}}{-(V_{An}-V_{Bn})},$$

[redacted] pošto normalna komponenta relativne brzine mijenja smjer za vrijeme udara.

Ako je drugo tijelo u ulozi nepokretne prepreke ($U_B = V_B = 0$), biće

$$k = \frac{|U_{An}|}{|V_{An}|}$$

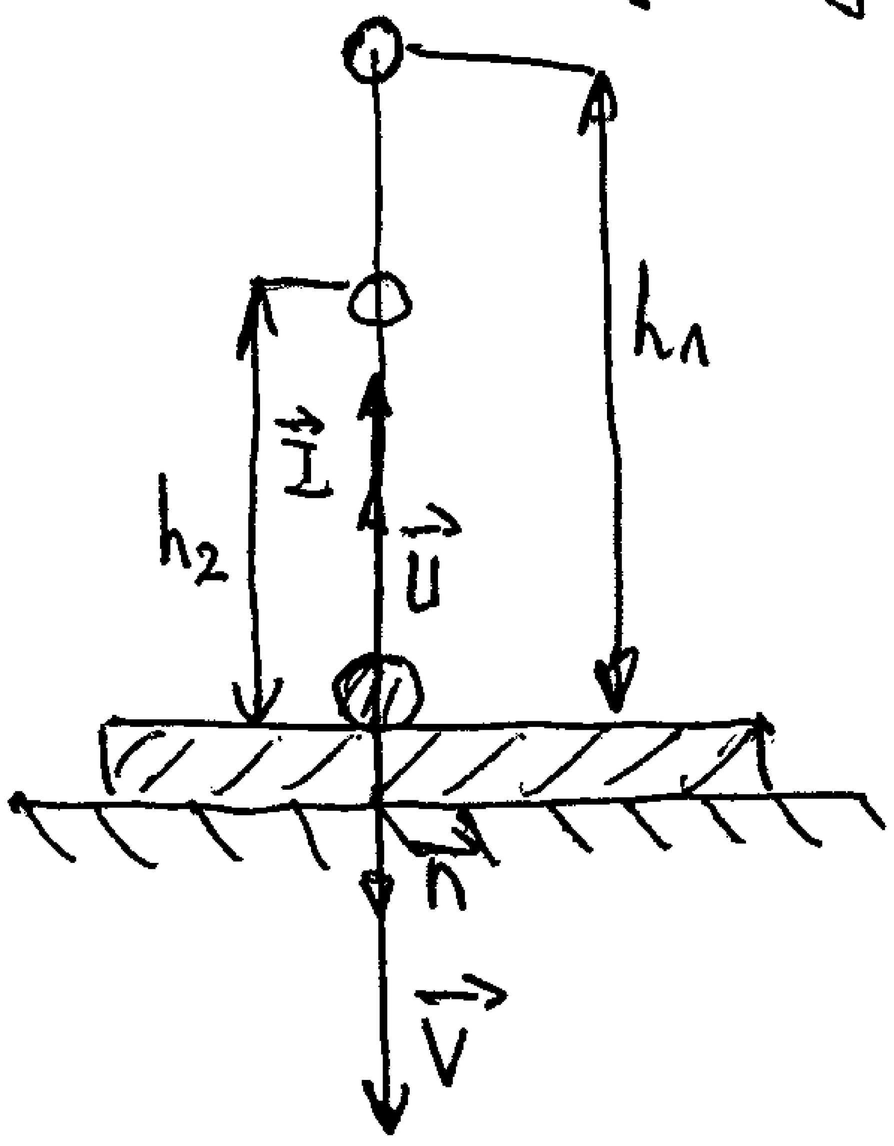
Veličina koeficijenta udara može biti u granicama između nule i jedan:

$$0 \le k \le 1$$

$k=0$ – idealno plastičan udar

$k=1$ – idealno elastičan udar

Za razne materijale koeficijent k se određuje eksperimentalno puštanjem kuglice sa neke visine i mjerenjem odskočne visine.



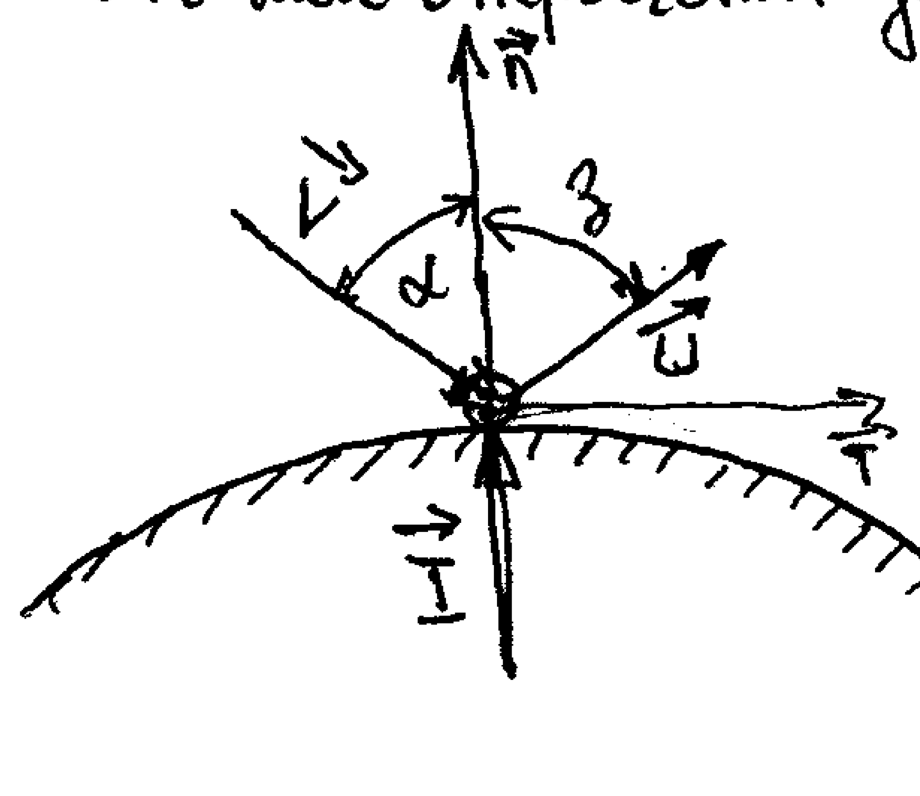
$$V = \sqrt{2gh_1}$$

$$U = \sqrt{2gh_2}$$

$$k = \frac{U}{V} = \sqrt{\frac{h_2}{h_1}}$$

U zaključku napomenimo da se Njutnova hipoteza primjenjuje samo kao prvo približenje realnog procesa udara. Ona daje dovoljno dobre rezultate ako se zapaža samo lokalna deformacija tijela u blizini dodirnih tačaka. Ukoliko pri udaru dolazi do deformacija čitavog tijela, ova hipoteza daje nezadovoljavajuće rezultate.

10.3 Udar tačke o nepokretnu glatku površ



Materijalna tačka mase m, krećući se brzinom V udara o nepokretnu površ pod uglom α u odnosu na normalu $\vec{n}$. Ako je poznat koeficijent udara k, treba odrediti brzinu na kraju udara U, ugao β koji ona zaklapa sa normalom i udarni impuls I.

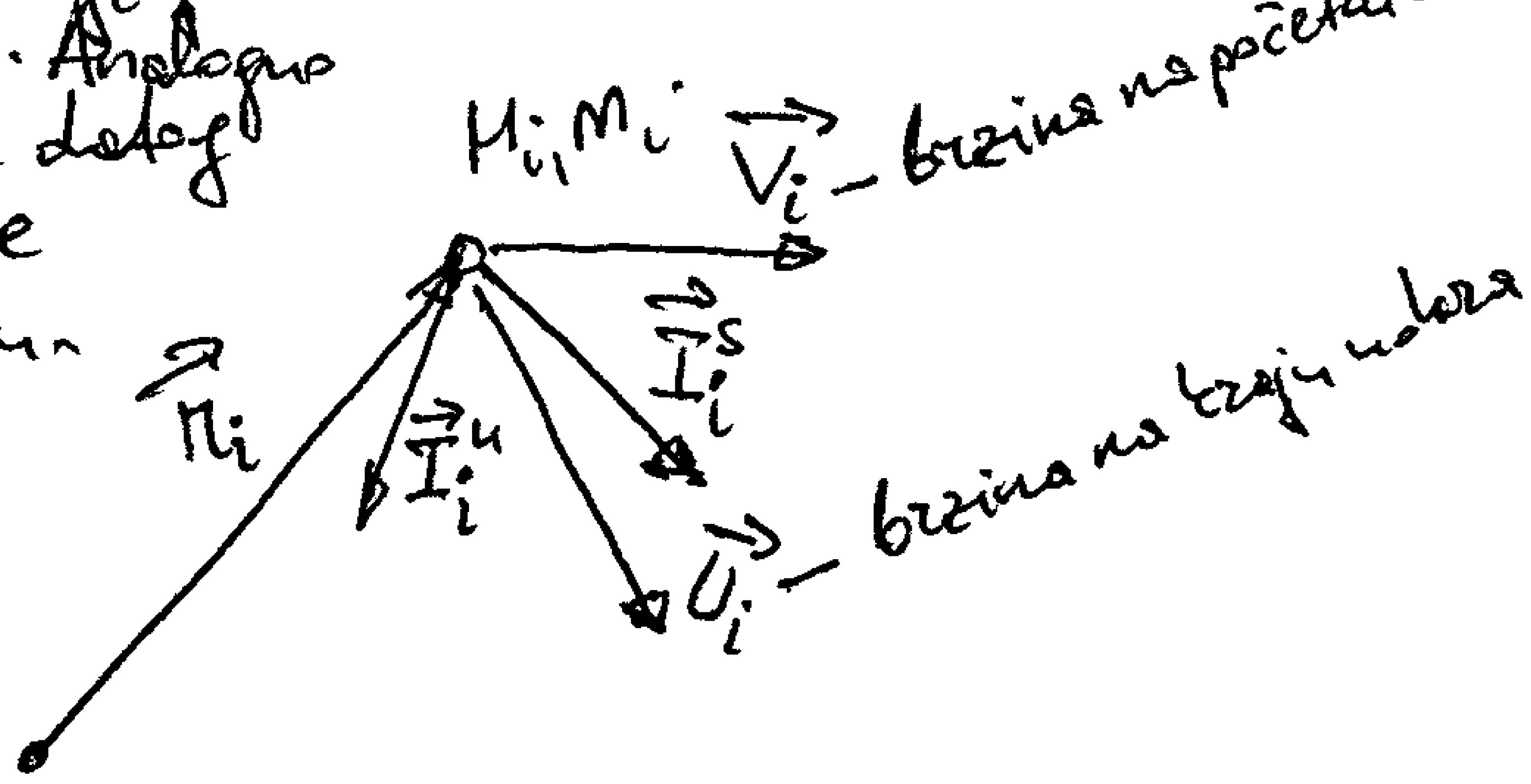
$$m\vec{U} - m\vec{V} = \vec{I} \longrightarrow \begin{cases} mU\cos\beta - m(-V\cos\alpha) = I \\ mU\sin\beta - mV\sin\alpha = 0 \end{cases}$$

$$k = \frac{U\cos\beta}{V\cos\alpha}$$

$$\Rightarrow tg\beta = \frac{1}{k}tg\alpha, \quad U = V\sqrt{\sin^2\alpha + k^2\cos^2\alpha}, \quad I = mV(1+k)\cos\alpha$$

10.4 Udar sistema materijalnih tačaka. Opšti zakoni udara

Posmatrajmo sistem od n materijalnih tačaka koji je u nekom određenom trenutku izložen udaru. Analogno podjeli sila, sve udarne impulse koji djeluju na tačke datog sistema možemo podijeliti na spoljašnje udarne impulse $\vec{I}_i^s$ i unutrašnje udarne impulse $\vec{I}_i^u$. Unutrašnji impulsi imaju osobinu da im je glavni vektor i glavni moment za bilo koju tačku, jednaki nuli.



Na osnovu osnovne jednačine kretanja je

$$m_i\vec{U}_i - m_i\vec{V}_i = \vec{I}_i^s + \vec{I}_i^u \quad , \; i = 1,\dots,n \quad (1)$$

Sabiranjem ovih jednačina, vodeći računa da je glavni vektor unutrašnjih udarnih impulsa jednak nuli ($\sum \vec{I}_i^u = 0$), dobijamo

$$\underbrace{\sum m_i\vec{U}_i}_{=\vec{K}_2} - \underbrace{\sum m_i\vec{V}_i}_{=\vec{K}_1} = \underbrace{\sum \vec{I}_i^s}_{=\vec{I}_R^s},$$

odnosno

$$\vec{K}_2 - \vec{K}_1 = \vec{I}_R^s \qquad (2)$$

Relacija (2) izražava zakon o promjeni količine kretanja sistema pri udaru: Promjena količine kretanja sistema pri udaru jednaka je glavnom vektoru spoljašnjih udarnih impulsa.

Pošto je $\vec{K}_2 = m\vec{U}_C$ i $\vec{K}_1 = m\vec{V}_C$ ($m = \sum m_i$, $\vec{U}_C$ i $\vec{V}_C$ - brzine centra inercije sistema na kraju i početku udara), zakon (2) se može zapisati u sljedećem obliku

$$m(\vec{U}_C - \vec{V}_C) = \vec{I}_R^s \qquad (3)$$

čija je primjena pogodna pri razmatranju sudara krutih tijela.

Nađimo sada zakon o promjeni momenta količine kretanja pri udaru. Ako svaku jednačinu (1) pomnožimo vektorski sa lijeve strane odgovarajućim vektorom položaja i tako dobijene jednačine saberemo, dobićemo

$$\underbrace{\sum \vec{r}_i \times m_i \vec{u}_i}_{=\vec{L}_{O2}} - \underbrace{\sum \vec{r}_i \times m_i \vec{V}_i}_{=\vec{L}_{O1}} = \underbrace{\sum \vec{r}_i \times \vec{I}_i^{s}}_{=\sum \vec{M}_O^{\vec{I}_i^s}} + \cancel{\sum \vec{r}_i \times \vec{I}_i^{u}}_{0}$$

0 ← glavni moment unutrašnjih udarnih impulsa je jednak nuli

odnosno

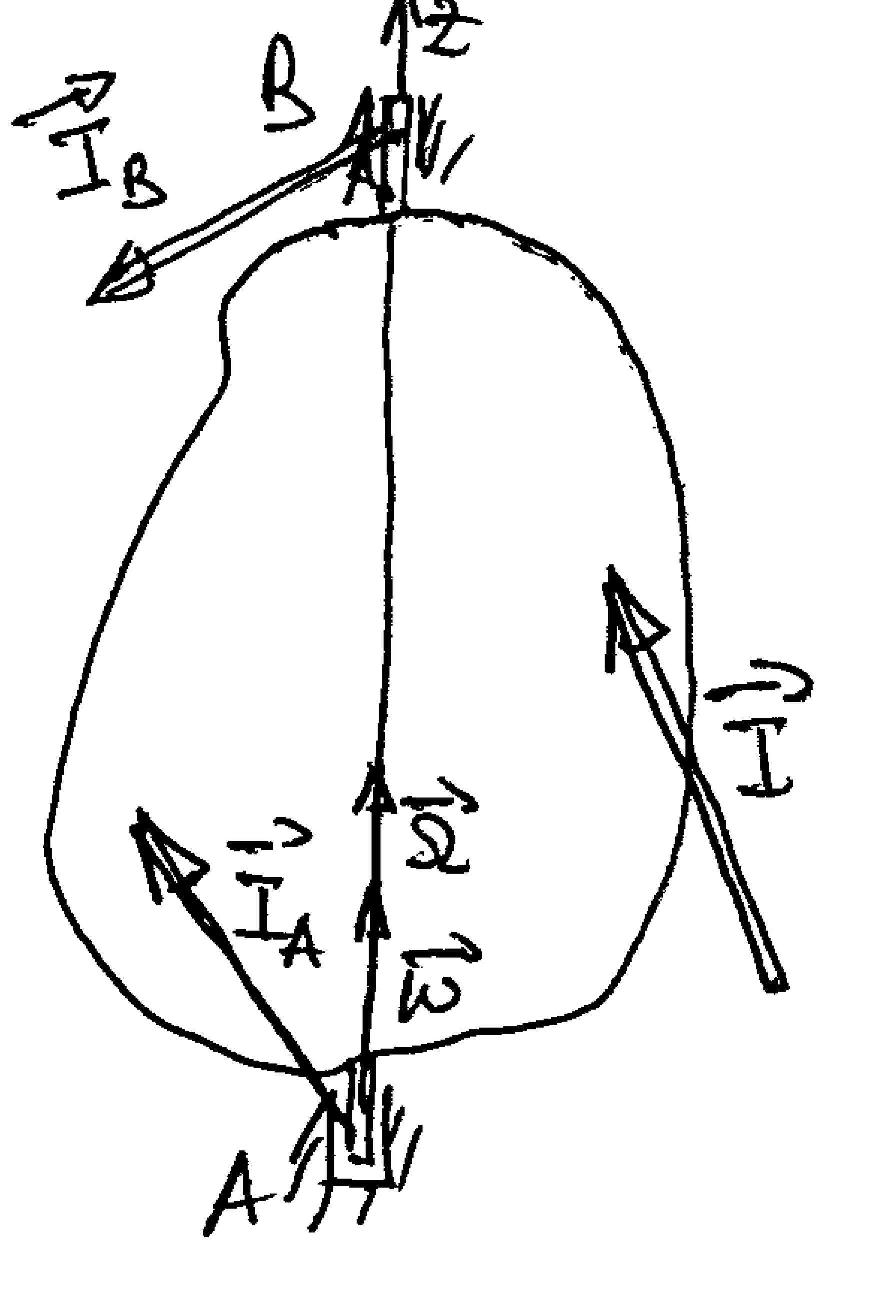
$$\vec{L}_{O2} - \vec{L}_{O1} = \sum \vec{M}_O^{\vec{I}_i^s} \qquad (4)$$

Priraštaj momenta količine kretanja sistema za tačku O, za vrijeme udara, jednak je zbiru momenata svih spoljašnjih udarnih impulsa za tu istu tačku.

U obliku projekcije na bilo koju osu, recimo x, jednačina (4) daje zakon o promjeni kinetičkog momenta za osu, za vrijeme udara:

$$L_{2x} - L_{1x} = \sum M_x^{I_i^s}$$

Primjenom ovog rezultata možemo odrediti promjenu ugaone brzine tijela pri udaru. Neka u nekom trenutku tijelu koje se okreće oko nepokretne ose ugaonom brzinom ω bude saopšten udarni impuls $\vec{I}$. On će prouzrokovati pojavu reaktivnih udarnih impulsa $\vec{I}_A$ i $\vec{I}_B$ u ležištima A i B.



Neka je Ω ugaona brzina na kraju udara.

Zakon o promjeni kinetičkog momenta za osu z, za vrijeme udara, daje

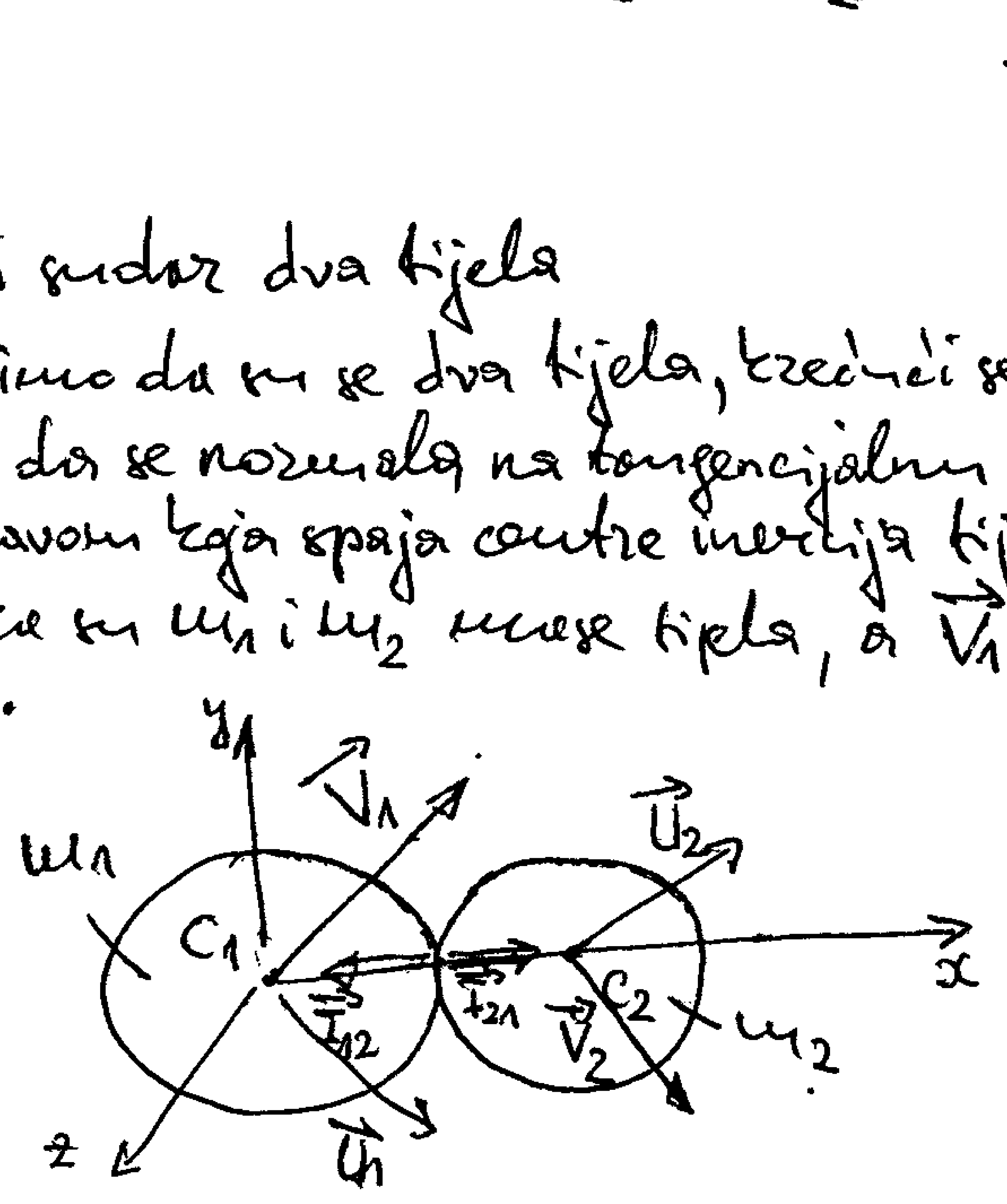
$$L_{2z} - L_{1z} = M_z^{\vec{I}} + \cancel{M_z^{\vec{I}_A}}_{0} + \cancel{M_z^{\vec{I}_B}}_{0}$$

$$J_z \Omega_z - J_z \omega_z$$

$$\rightarrow \quad \Omega_z = \omega_z + \frac{M_z^{\vec{I}}}{J_z}$$

10.5 Centralni sudar dva tijela

Pretpostavimo da su se dva tijela, krećući se translatorno, u nekom trenutku sudarila i da se normala na tangencijalnu ravan u zajedničkoj tački dodira poklapa sa pravom koja spaja centre inercija tijela. Ovakav sudar zove se centralni sudar. Neka su m_1 i m_2 mase tijela, a $\vec{V}_1$ i $\vec{V}_2$ njihove brzine neposredno prije sudara.



$\vec{u}_1, \vec{u}_2$ – brzine na kraju udara

$I_{12} = I_{21} = I$

$$m_1(\vec{U}_1-\vec{V}_1)=\vec{I}_{12} \longrightarrow \begin{cases} m_1(U_{1x}-V_{1x})=-I \\ m_1(U_{1y}-V_{1y})=0 \\ m_1(U_{1z}-V_{1z})=0 \end{cases}$$

$$m_2(\vec{U}_2-\vec{V}_2)=\vec{I}_{21} \longrightarrow \begin{cases} m_2(U_{2x}-V_{2x})=I \\ m_2(U_{2y}-V_{2y})=0 \\ m_2(U_{2z}-V_{2z})=0 \end{cases}$$

$$k=\frac{U_{1x}-U_{2x}}{-(V_{1x}-V_{2x})}$$

$\Rightarrow$ $U_{1y}=V_{1y}$, $U_{1z}=V_{1z}$, $U_{2y}=V_{2y}$, $U_{2z}=V_{2z}$

$$U_{1x}=V_{1x}-\frac{m_2}{m_1+m_2}(1+k)(V_{1x}-V_{2x})$$

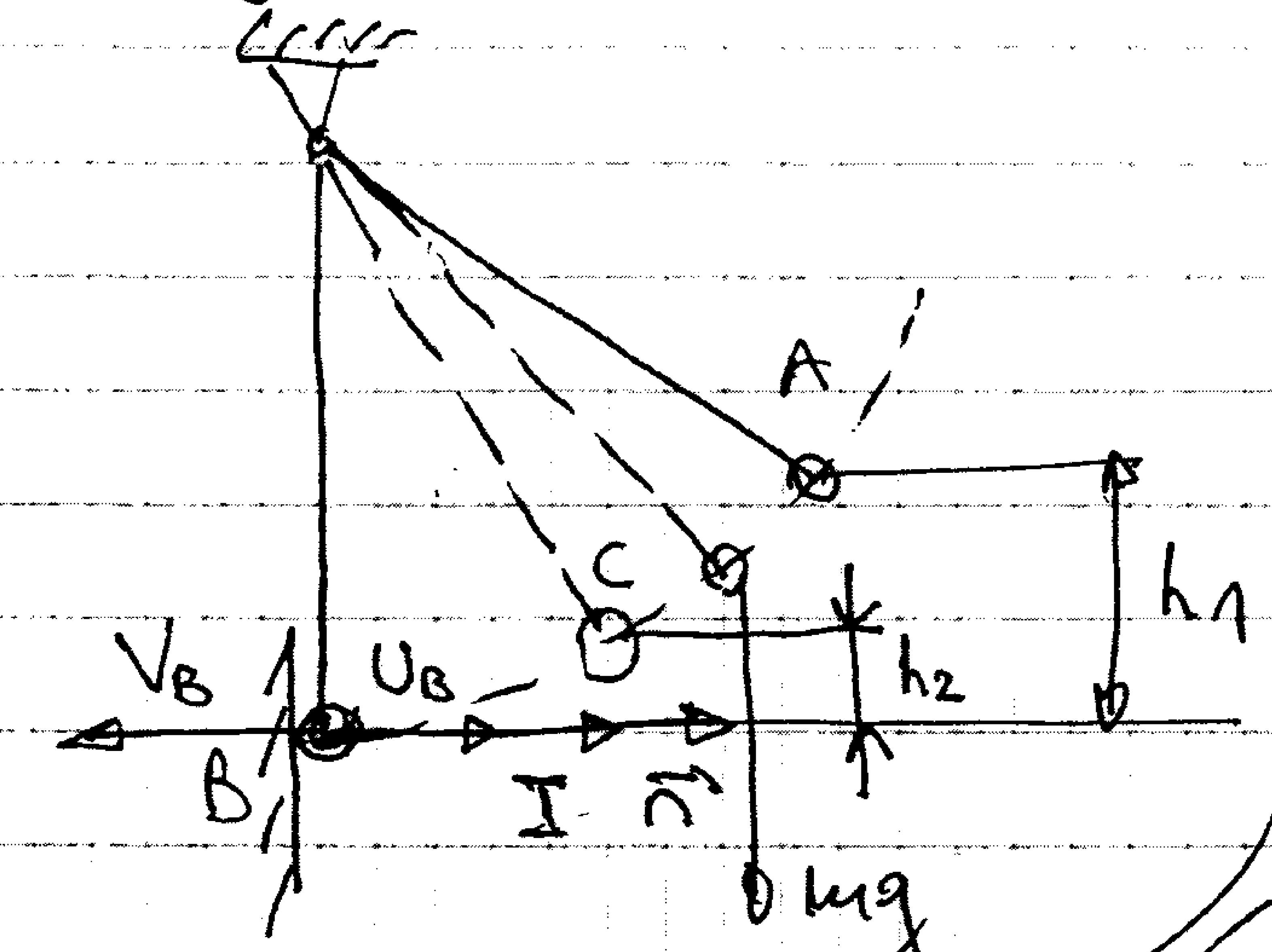
$$U_{2x}=V_{2x}+\frac{m_1}{m_1+m_2}(1+k)(V_{1x}-V_{2x})$$

$$I=\frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}(1+k)(V_{1x}-V_{2x})$$

N: Ako je $V_{1y}=V_{2y}=V_{1z}=V_{2z}=0$ sudar se zove prav centralni sudar

Zadaci - UDAR -

1. Kuglica vezana za kraj neistegljivog konca pušta se bez početne brzine sa visine $h_1 = 0,6\,m$ (v. sliku). Kada se konac ~~nađe u~~ zauzme vertikalni položaj kuglica udara u zid, pri čemu je koeficijent udara $k = 0,55$. Odrediti visinu h_2 do koje će se popeti kuglica poslije udara.



$$k = \frac{U_B}{V_B} \to U_B = k V_B \quad (*)$$

$$E_{kB} - E_{kA} = A_{(A,B)}(m\vec{g})$$

$$\frac{1}{2} m V_B^2 - 0 = m g h_1 \Rightarrow V_B = \sqrt{2 g h_1}$$

$$(*) \Rightarrow U_B = k\sqrt{2 g h_1}$$

$$E_{kC} - E_{kB} = A_{(B,C)}(m\vec{g})$$

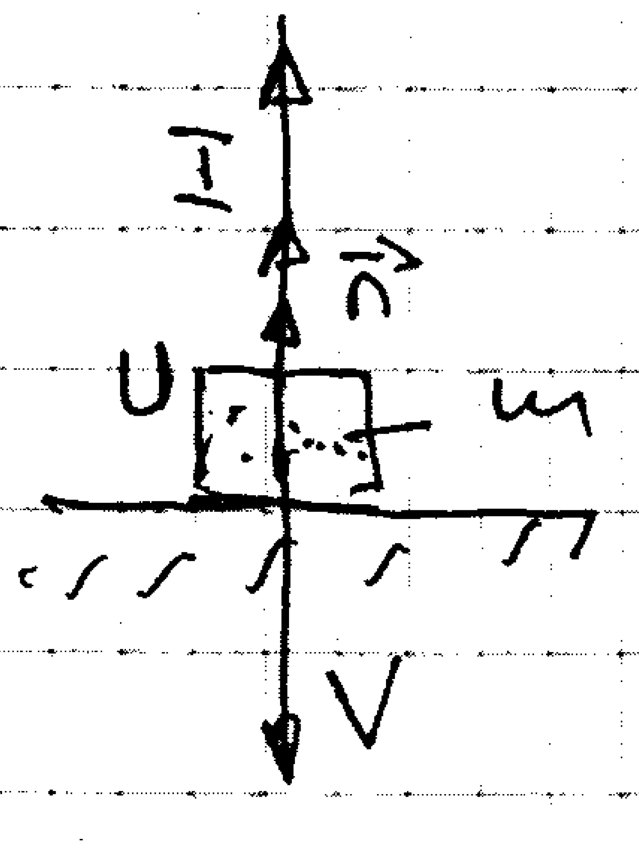
$$\frac{1}{2} m \cancel{V_C}^2 - \frac{1}{2} m U_B^2 = - m g h_2$$

dondarno kretanje I

poslije udarno kretanje C

$$\Rightarrow h_2 = \frac{U_B^2}{2g} = k^2 h_1 = 0,55^2 \cdot 0,6 = 0,182\,m$$

2. Odrediti srednju udarnu silu čekića mase $m = 0,5\,kg$ pri apsolutno plastičnom udaru po nakovanju, ako je brzina čekića na početku udara $V = 10\,m/s$, a trajanje udara $\tau = 0,0002\,s$.



$$m\vec{U} - m\vec{V} = \vec{I}$$

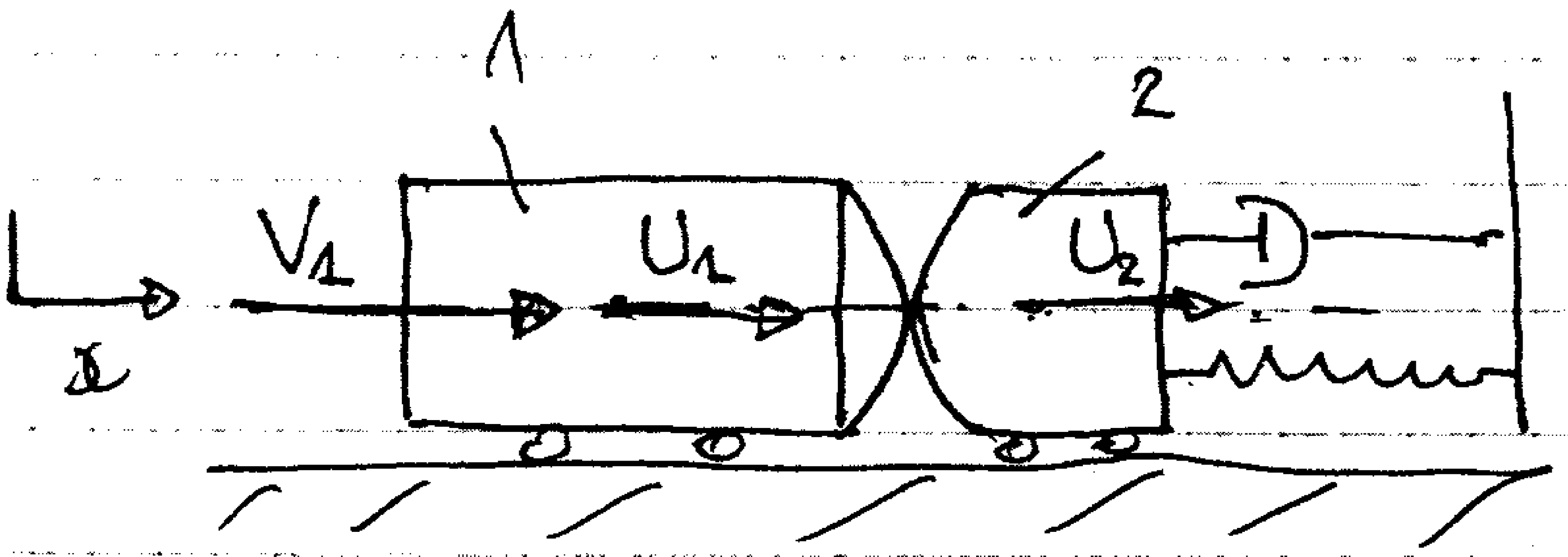
$$\left.\begin{array}{l} \vec{n}:\; mU - m(-V) = I \\ k = \dfrac{U}{V} = 0 \Rightarrow U = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow I = mV$$

$$I = \int_0^{\tau} F^{ud}\,dt = F^{ud}_{sr}\,\tau$$

$$\Rightarrow F^{ud}_{sr} = \frac{mV}{\tau} = 25000\,N = \boxed{25\,kN}$$

- UDAR -

3. Tijelo 1, mase $m_1 = 5\,kg$, udara u nepokretni amortizer mase m_2. Koeficijent udara je $k = 0,7$. Kolika treba da bude masa m_2 pa da brzina tijela 1 poslije udara bude jednaka nuli.



Imamo pravi centralni udar dva tijela (v. predavanja)

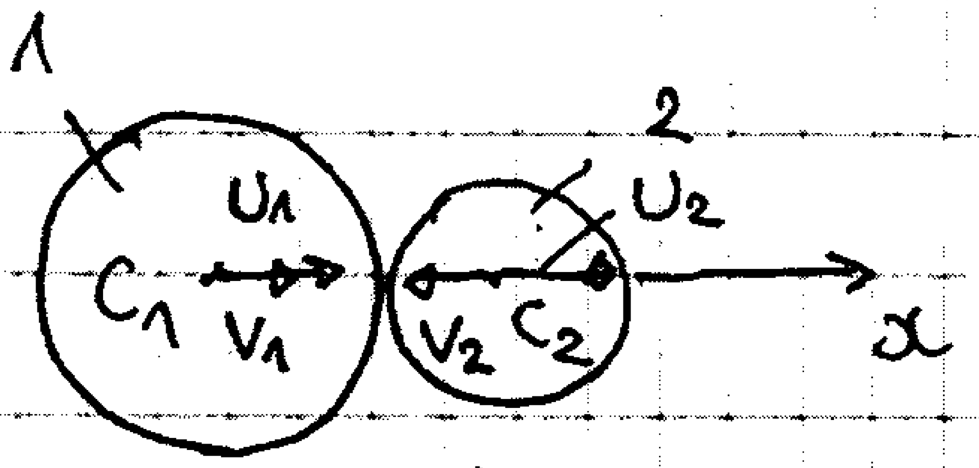
$U_{1x} = U_1, \quad V_{1x} = V_1, \quad V_{2x} = 0, \quad U_{2x} = U_2$

$$U_{1x} = V_{1x} - \frac{m_2}{m_1+m_2}(1+k)(V_{1x} - \cancel{V_{2x}}^{\,0})$$

uslov zadatka $U_{1x} = 0 \Rightarrow 0 = V_1 - \frac{m_2}{m_1+m_2}(1+k)V_1$

$$\Rightarrow 0 = 1 - \frac{m_2}{m_1+m_2}(1+k) \Rightarrow \boxed{m_2 = m_1/k = 7,14\,kg}$$

4. Kugle masa $m_1 = 2\,kg$ i $m_2 = 1\,kg$ sudaraju se suprotno usmjerenim brzinama jednakih intenziteta $V_1 = V_2 = 6\,m/s$. Koeficijent udara je $k = 0,5$. Kolike su brzine kugle ~~k~~ poslije sudara?



$$U_{1x} = V_{1x} - \frac{m_2}{m_1+m_2}(1+k)(V_{1x} - V_{2x})$$

$$U_{2x} = V_{2x} + \frac{m_1}{m_1+m_2}(1+k)(V_{1x} - V_{2x})$$

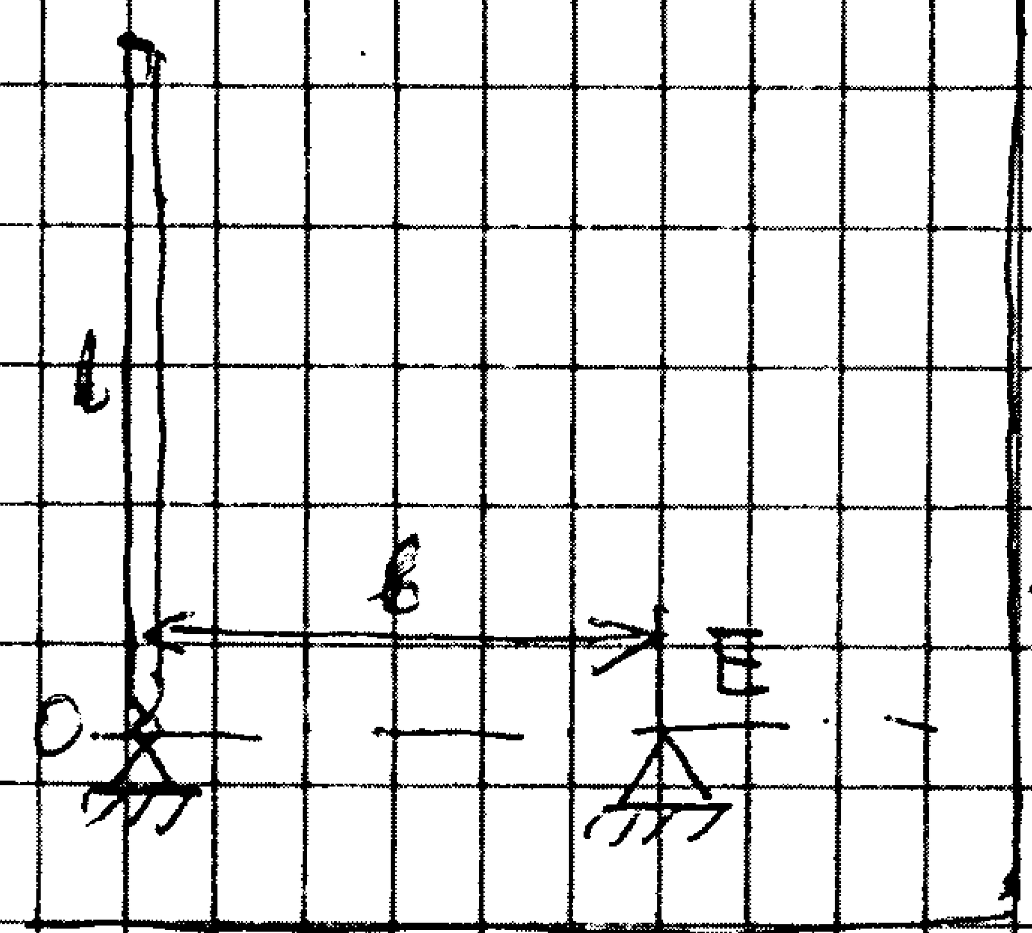
$V_1 = V_2 = V = 6\,\frac{m}{s}, \quad V_{1x} = V, \quad V_{2x} = -V$

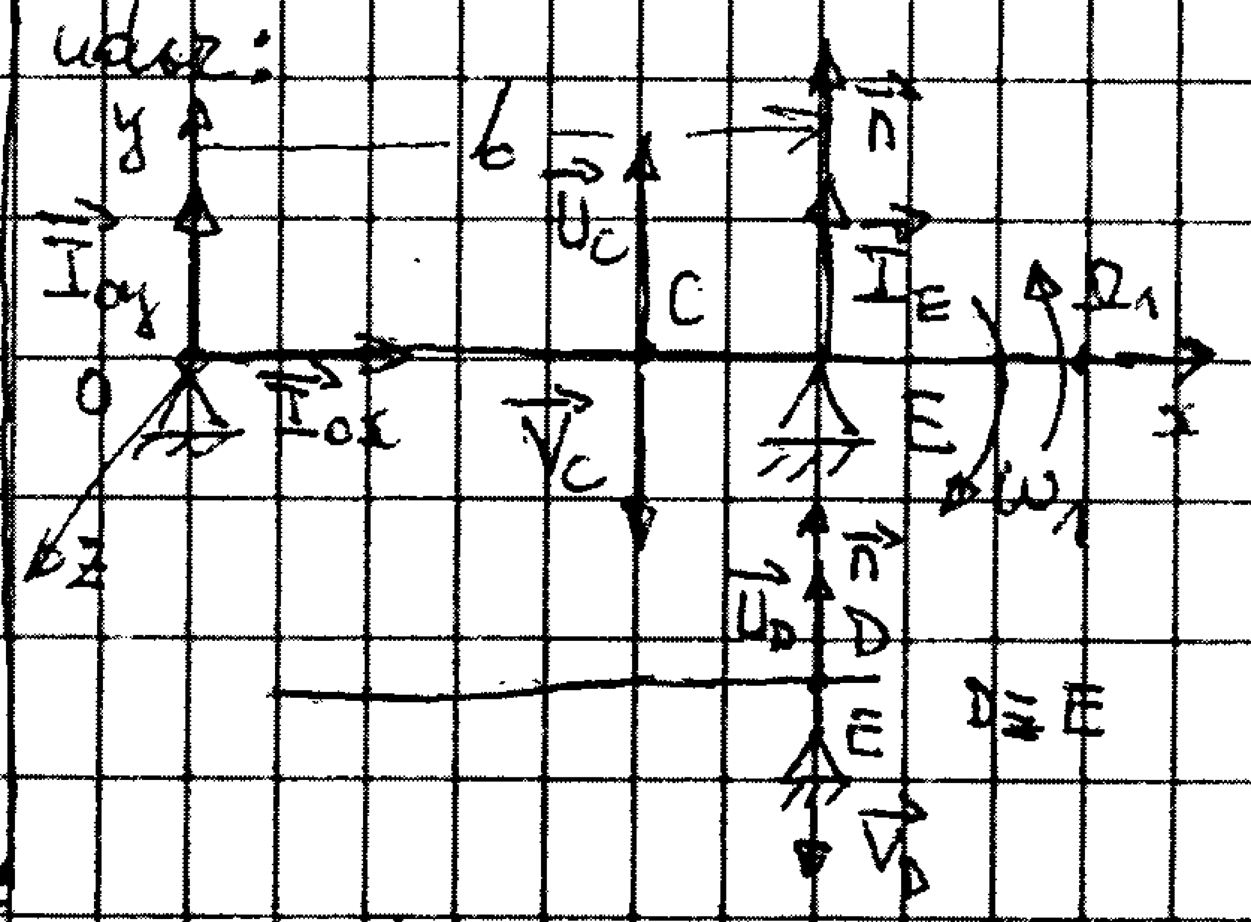
$$U_{1x} = V - 2\frac{m_2(1+k)}{m_1+m_2}V = \frac{m_1 - 2m_2}{m_1+m_2}V = \boxed{0}$$

$$U_{2x} = -V + \frac{2m_1(1+k)}{m_1+m_2}V = \frac{2m_1 - m_2}{m_1+m_2}V = \boxed{6\,\frac{m}{s}}$$

– UDAR –

Homogeni štap, mase m i dužine l, koji se može obrtati u vertikalnoj ravni oko nepokretne horizontalne ose O pušti se iz vertikalnog položaja bez početne brzine. U trenutku kad dođe u horizontalni položaj štap udara u oslonac E. Ako je koeficijent udara k, odrediti: a) ugao β za koji se štap otkloni od horizontalnog položaja posle udara, b) položaj oslonca E ($b=?$) tako da udarni impuls u osloncu O bude jednak nuli.





ω_1 – ugaona brzina na početku udara

Ω_1 – ‖ – kraju ‖ –

$$k = \frac{|u_{Dn} - \cancel{u_{En}}^{\,0}|}{|v_{Dn} - \cancel{v_{En}}^{\,0}|} = \frac{u_D}{v_D}$$

$$u_D = b\Omega_1, \quad v_D = b\omega_1$$

$$k = \frac{\Omega_1}{\omega_1} \quad (1)$$

zakoni udara: $m(\vec{u}_C - \vec{v}_C) = \vec{I}_O + \vec{I}_E \rightarrow m(\cancel{u_{Cx}}^{\,0} - \cancel{v_{Cx}}^{\,0}) = I_{Ox} \rightarrow I_{Ox} = 0$

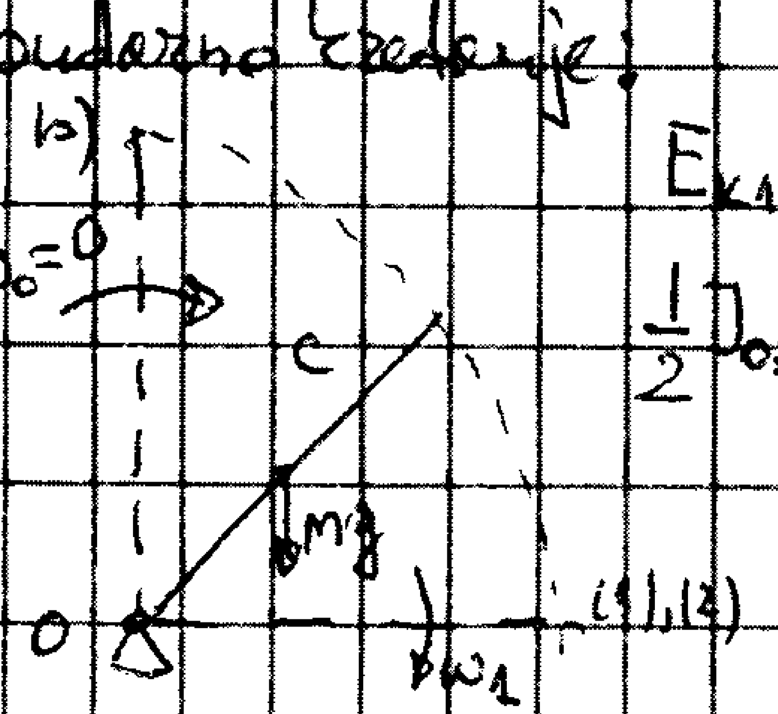
$$m(u_{Cy} - v_{Cy}) = I_{Oy} + I_E, \quad u_{Cy} = \frac{l}{2}\Omega_1, \quad v_{Cy} = -\frac{l}{2}\omega_1$$

$$\rightarrow \quad m\frac{l}{2}(\Omega_1 + \omega_1) = I_{Oy} + I_E \quad (2)$$

$$(L_{Oz})_2 - (L_{Oz})_1 = M_{Oz}^{\vec{I}_E} \rightarrow J_{Oz}\Omega_1 - (-J_{Oz}\omega_1) = I_E \cdot b, \quad J_{Oz} = \frac{ml^2}{3} \quad (3)$$

$(1) \Rightarrow \Omega_1 = k\omega_1, \quad \omega_1 = ?$

doudarno kretanje:

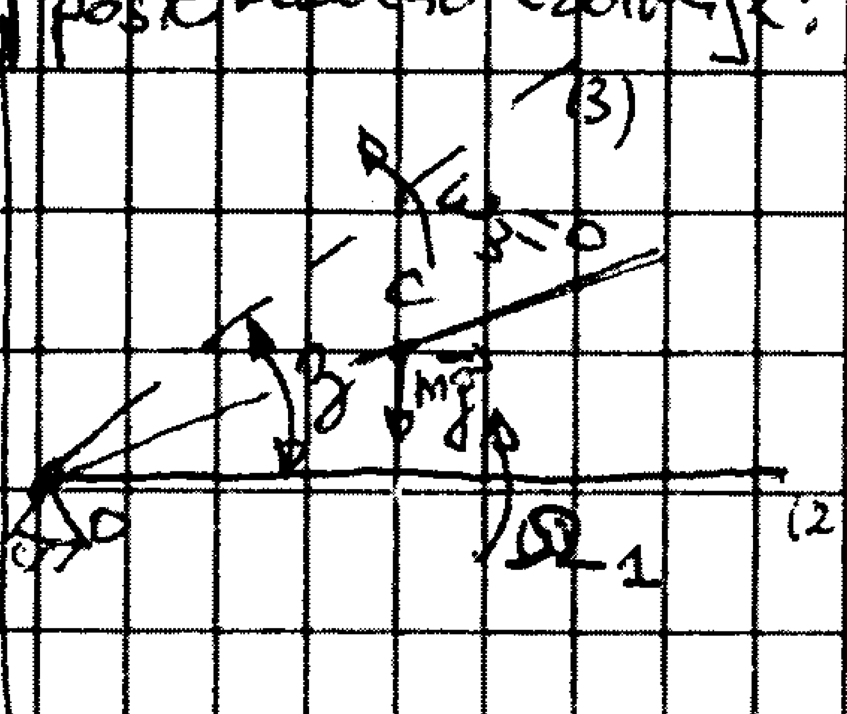


$$\cancel{E_{k1}} - \cancel{E_{k0}}^{\,0} = A_{(0,1)}(m\vec{g})$$

$$\frac{1}{2}J_{Oz}\omega_1^2 = mg\frac{l}{2}$$

$$\omega_1 = \sqrt{3g/l}$$

posleudarno kretanje: $\cancel{E_{k3}}^{\,0} - E_{k2} = A_{(2,3)}(m\vec{g})$



$$-\frac{1}{2}J_{Oz}\Omega_1^2 = -mg\frac{l}{2}\sin\beta$$

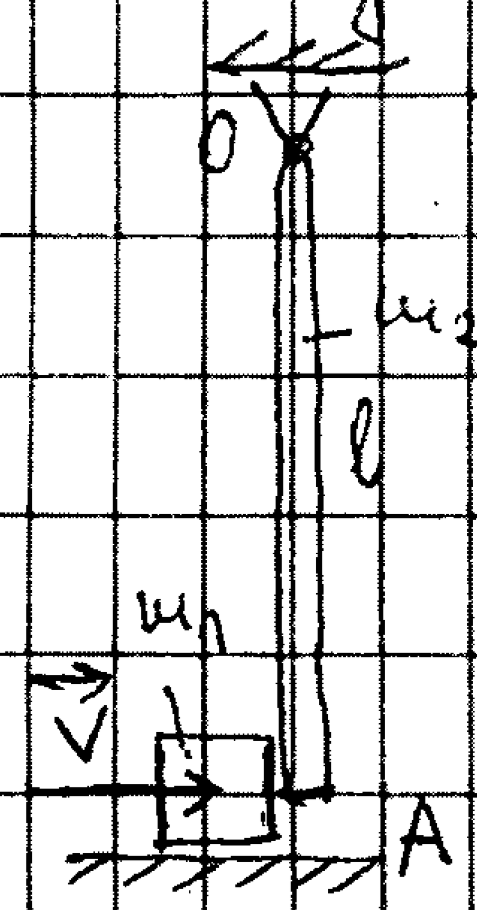
$$\Omega_1 = k\omega_1 = k\sqrt{3g/l}$$

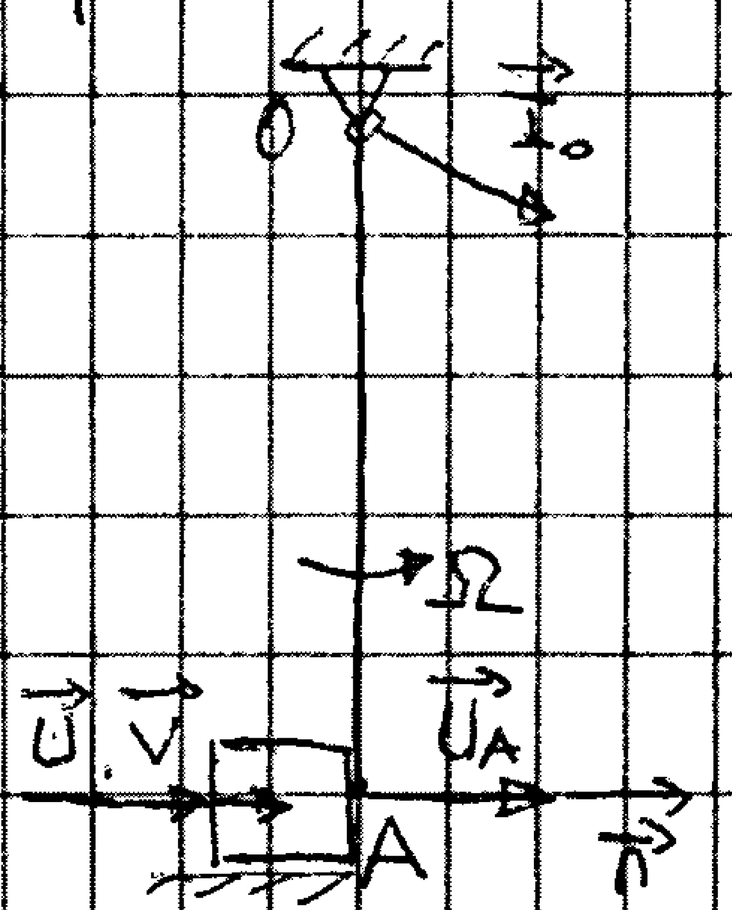
$$\Rightarrow \sin\beta = k^2$$

$$\boxed{\beta = \arcsin(k^2)}$$

b) $I_{Oy} = 0$ u (2); (2), (3) $\xrightarrow{(1)}$ $b = \frac{2}{3}l$

Teret, zanemarljivih dimenzija, težine G_1, koji se kreće po horizontalnoj ravni u trenutku sudara sa vertikalno obješenim homogenim štapom OA, težine G_2 i dužine l, ima brzinu $\vec{V}$. Udar je apsolutno plastičan $(k=0)$. Odrediti brzinu tereta i ugaonu brzinu štapa na kraju udara, udarni impuls između tereta i štapa, kao i ugao α za koji se štap otkloni od vertikale poslije udara.





$\vec{V}$ – brzina kreta (tačke) na početku udara

$\vec{U}$ – " – kraju udara

U_A – brzina tačke A štapa na kraju udara

Ω – ugaona brzina " – "

$\vec{V}_A (=0)$ – brzina tačke A štapa na početku udara

$$k = \frac{|U_{An} - U_n|}{|V_{An} - V_n|} = \frac{U_A - U}{-(-V)} = 0 \rightarrow U_A = U \quad (1)$$

$$U_A = l\Omega \quad (2)$$

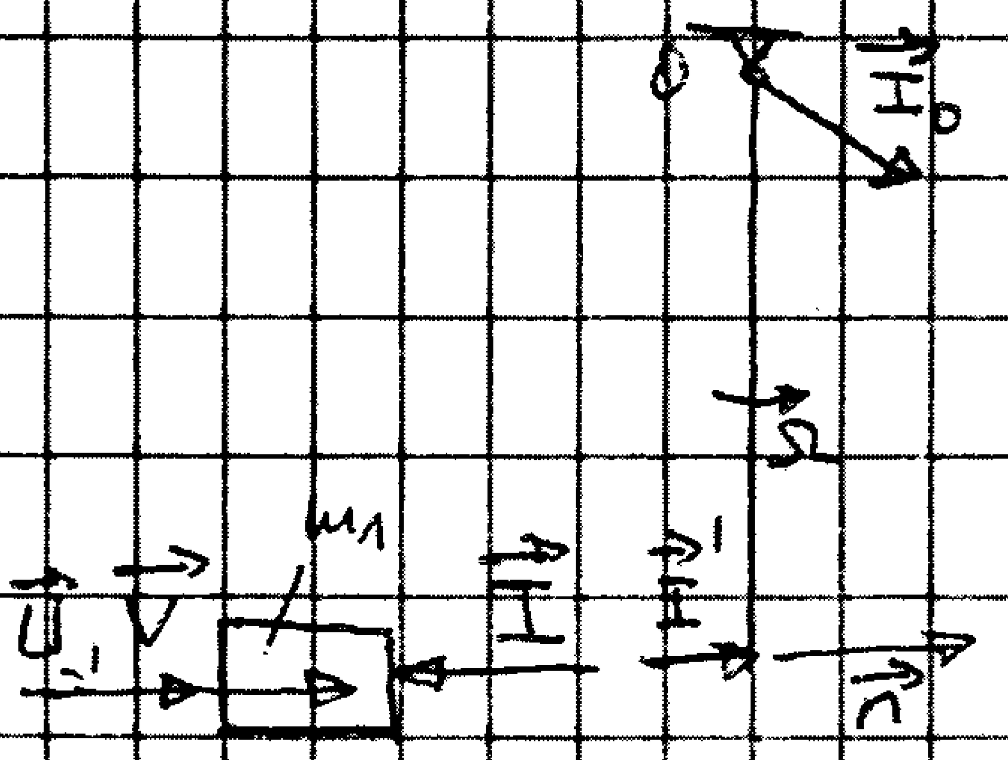
sistem (teret + štap): $L_{O2} - L_{O1} = M_O^{\vec{I}^s}$, $M_O^{\vec{I}^s} = M_O^{\vec{I}_o} = 0$

$$L_{O1} = M_O^{m_1\vec{V}} = m_1 V l, \quad L_{O2} = M_O^{m_1\vec{U}} + J_O^{st}\Omega = m_1 U l + \frac{m_2 l^2}{3}\Omega; \quad m_1 = \frac{G_1}{g}, \; m_2 = \frac{G_2}{g}$$

$$\rightarrow \quad m_1 l U + m_2\frac{l^2}{3}\Omega - m_1 l V = 0 \quad (3)$$

$$(1),(2) \rightarrow \quad U = l\cdot\Omega \quad (4)$$

$$\rightarrow \boxed{U = \frac{3m_1}{3m_1+m_2}V, \quad \Omega = \frac{3m_1}{(3m_1+m_2)l}V} \quad (5)$$



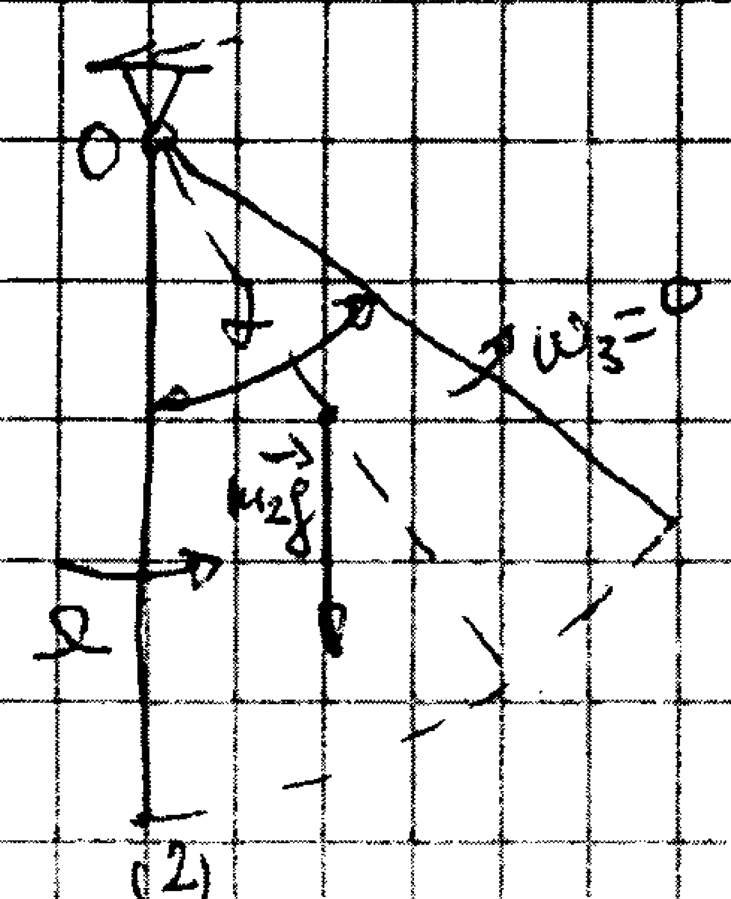
$$\vec{I}' = -\vec{I} \rightarrow I' = I$$

teret: $m_1\vec{U} - m_1\vec{V} = \vec{I}$

$$\vec{n}: \; m_1 U - m_1 V = -I \xrightarrow{(5)} \boxed{I = \frac{m_1 m_2}{3m_1+m_2}V}$$

ili: štap: $L_{O2}^{st} - L_{O1}^{st} = M_O^{\vec{I}'}$

$$\frac{m_2 l^2}{3}\Omega - 0 = I\cdot l \xrightarrow{(5)} I = \dots$$

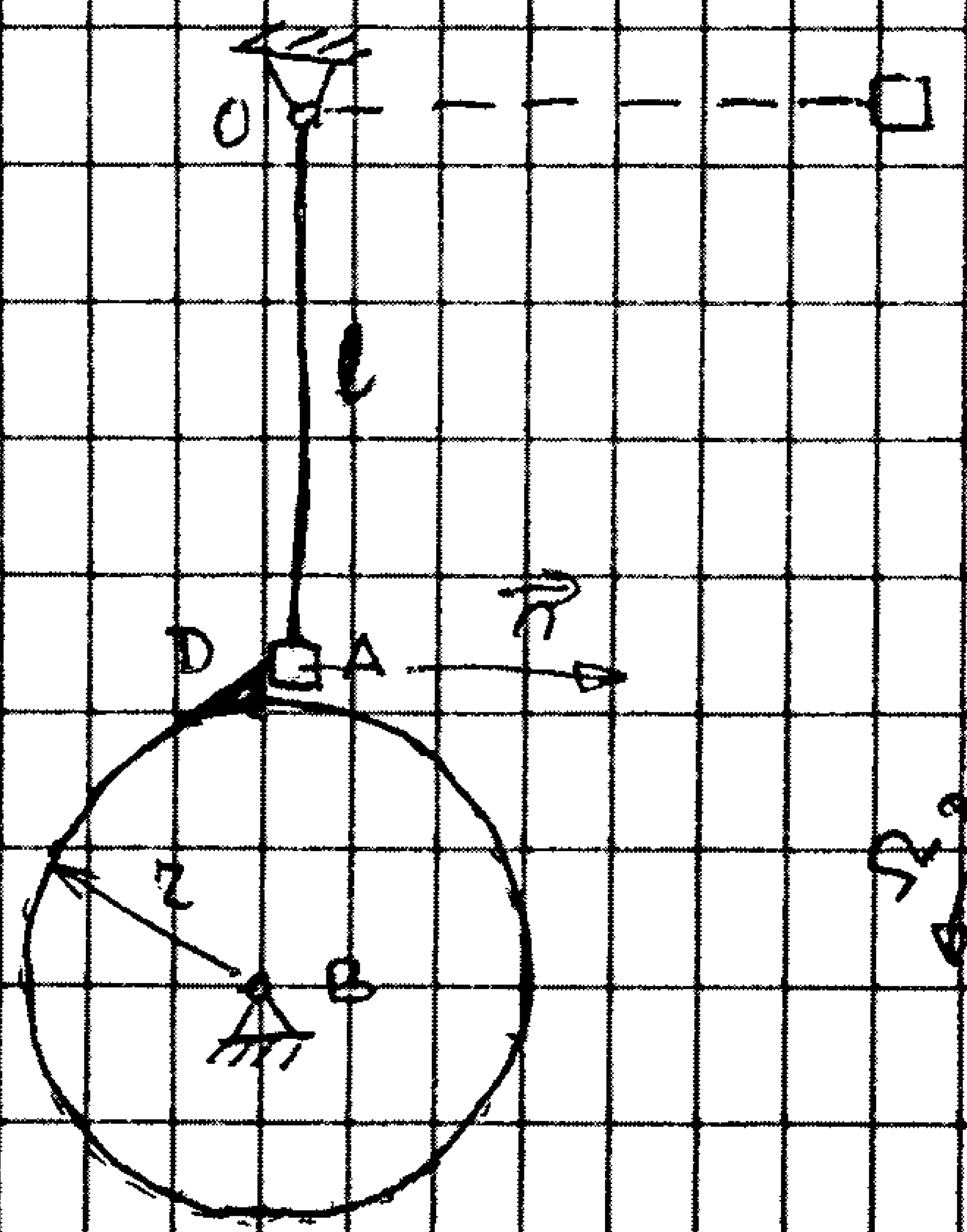


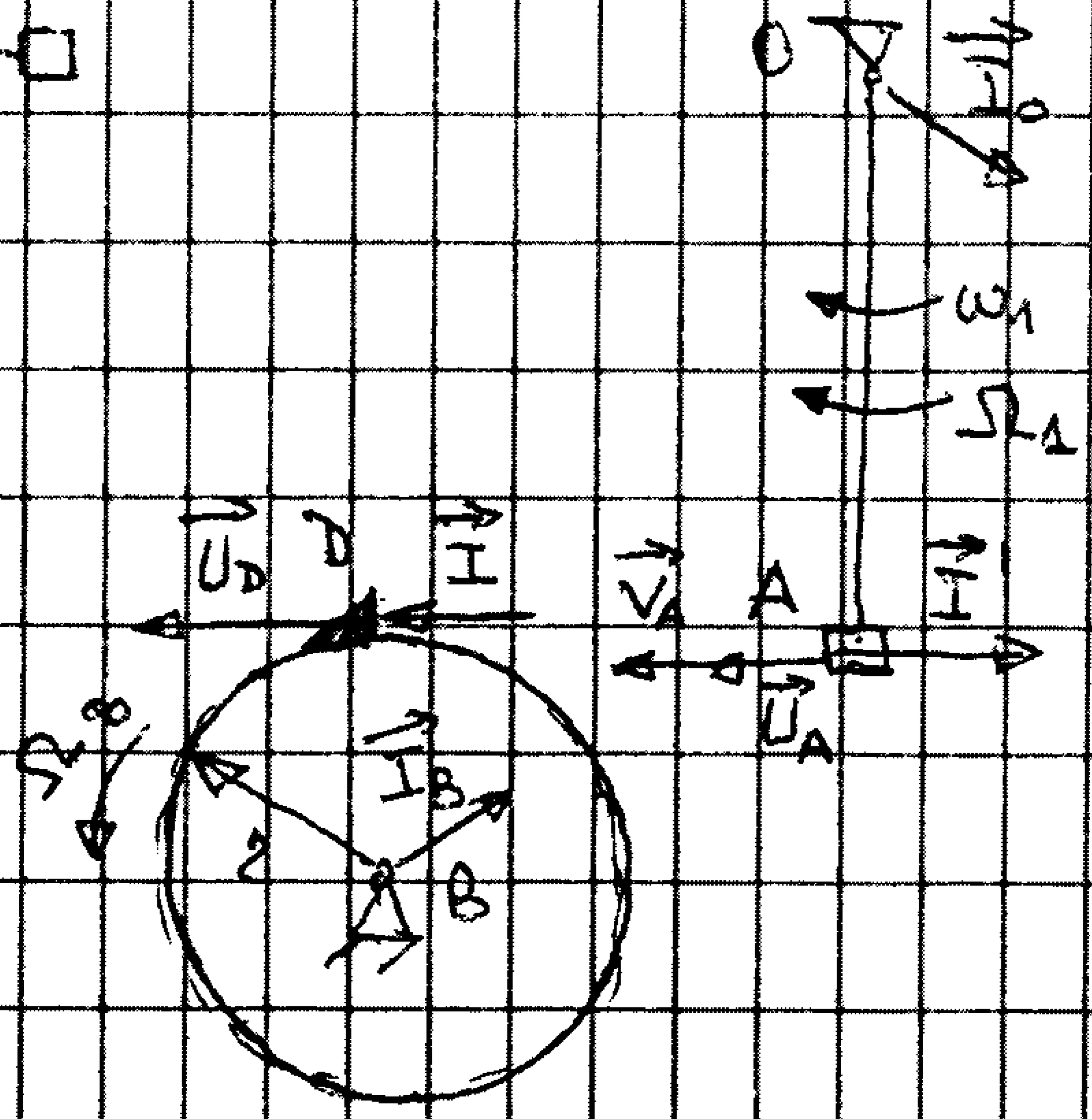
$$E_{k3} - E_{k2} = A_{(2,3)}(m_2\vec{g})$$

$$\frac{1}{2}J_O^{st}\omega_3^2 - \frac{1}{2}J_O^{st}\Omega^2 = -m_2 g\frac{l}{2}(1-\cos\alpha)$$

$$\rightarrow \cos\alpha = 1 - \frac{3m_1^2V^2}{gl(3m_1+m_2)^2}$$

Štap OA, dužine l i zanemarljive mase, koji na svom kraju A nosi koncentrisanu masu m_1, može da se obrće oko horizontalne ose O. Štap počinje da pada iz horizontalnog položaja bez početne brzine i u vertikalnom položaju udara u zubac D točka B. Moment inercije točka za obrtnu osu je $J_B = m_2 r^2$. Odrediti ugaonu brzinu točka na kraju udara, ako je udar apsolutno plastičan ($k=0$).





$V_A, \omega_1, V_D=0, \omega_B=0$ – na početku udara

$U_A, \Omega_1, U_D, \Omega_B$ – na kraju udara

$$k = \frac{|U_{Dn}-U_{An}|}{|V_{Dn}-V_{An}|} = \frac{-U_D-(-U_A)}{-(0+V_{An})}$$

$k=0 \rightarrow U_D = U_A$ (1)

$U_D = r\Omega_B$, $U_A = l\Omega_1$, $V_A = l\omega_1$

$I' = I$

štap: $L_{O2} - L_{O1} = +Il$

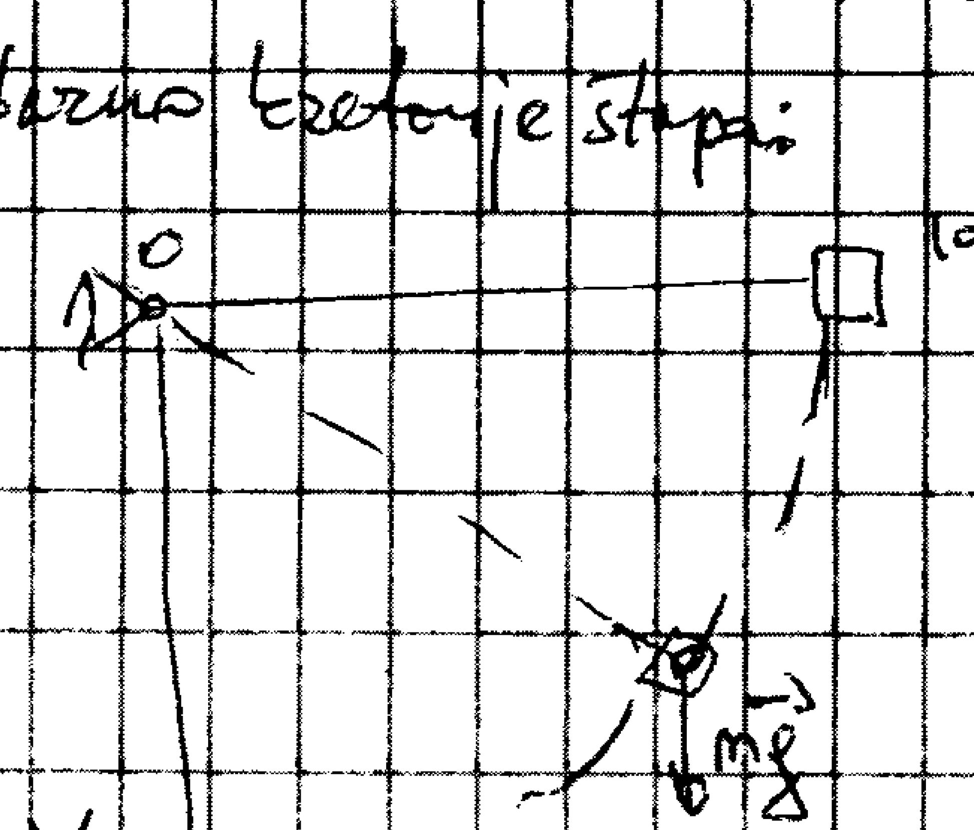
$$-m_1 U_A l - (-m_1 V_A l) = Il \rightarrow \underbrace{m_1 V_A - m_1 U_A = I}_{U_A = U_D = r\Omega_B} \quad (3)$$

točak: $L_{O2} - L_{O1} = +Ir$

$m_2 r^2 \Omega_B - 0 = I \cdot r$ (4), $\quad m_1 V_A - m_1 r \Omega_B = I$ (3')

(4), (3') $\rightarrow \Omega_B = \frac{m_1}{(m_1+m_2)r} V_A$ (5), $\quad V_A = ?$

doudarno kretanje štapa:



$E_{k1} - E_{k2} = A_{(0,1)}(m_1\vec{g})$

$$\frac{1}{2} m_1 V_A^2 - 0 = m_1 g l \rightarrow V_A = \sqrt{2gl}$$

$$(5) \Rightarrow \boxed{\Omega_B = \frac{m_1}{(m_1+m_2)r}\sqrt{2gl}}$$