2. Dinamika neslobodne (vezane) tačke

2.1. Veze. Osnovna jednačina dinamike neslobodne tačke.

Ograničenje slobode kretanja tačke naziva se veza a takvo kretanje neslobodno ili vezano kretanje. Ograničenja kretanja ostvaruju se posredstvom materijalnih tijela – mehanizama veza.

Geometrijski posmatrano, tačka može biti prinuđena da se kreće po površi, liniji ili u dijelu prostora.

Ako je tačka prinuđena da se kreće po nepokretnoj površi, to se jednačina ove površi

$$f(x, y, z) = 0 \qquad (1)$$

naziva jednačina veze. Veza ovog oblika naziva se holonomna (konačna) stacionarna (nepokretna) veza. Ako vrijeme eksplicitno ulazi u jednačinu veze, tj. ako ona ima oblik $f(x, y, z, t) = 0$, veza se naziva nestacionarnom.

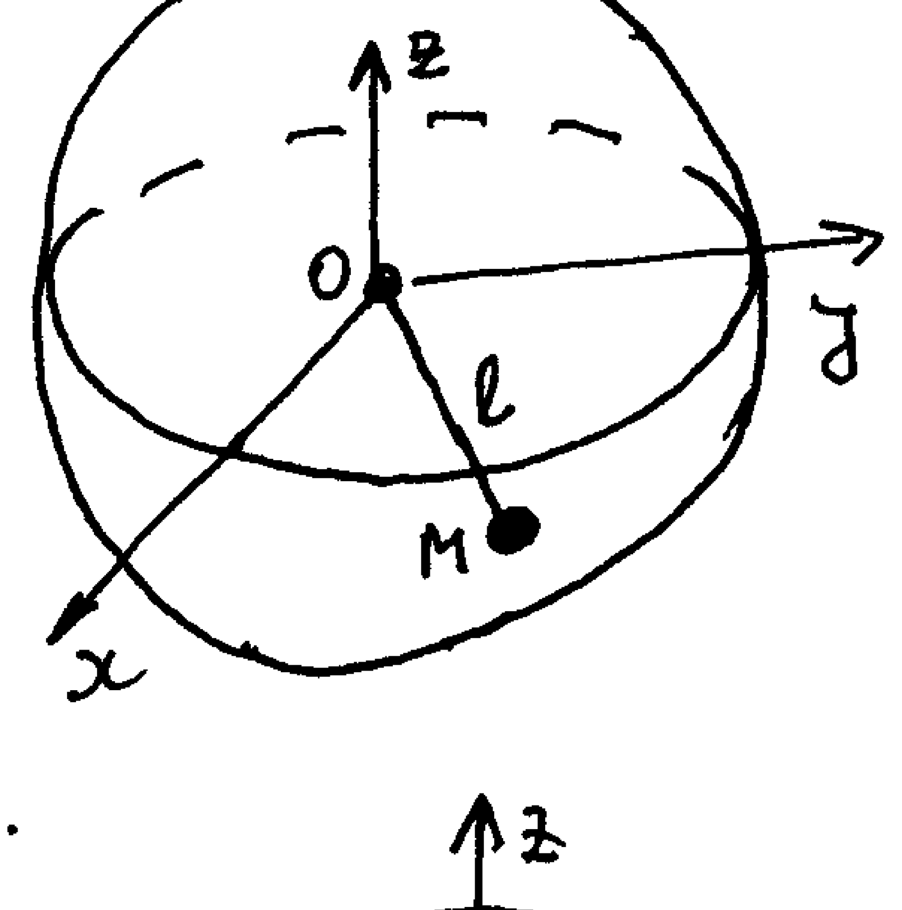
Ako je tačka prinuđena da se kreće po nepokretnoj liniji koja je definisana kao presjek dvije površi čije su jednačine

$$f_1(x, y, z) = 0$$
$$f_2(x, y, z) = 0$$

onda kažemo da kretanje tačke ograničavaju dvije veze.

Za razliku od slobodne tačke, tri koordinate x, y, z kod neslobodne tačke nijesu nezavisne, već moraju zadovoljavati jednačine veza. Razlika broja koordinata tačke i broja veza zove se stepen slobode. Za kretanje po površi stepen slobode je $s = 2$ $(3-1)$, a za kretanje po liniji je $s = 1$ $(3-2)$.

Pr. 1.

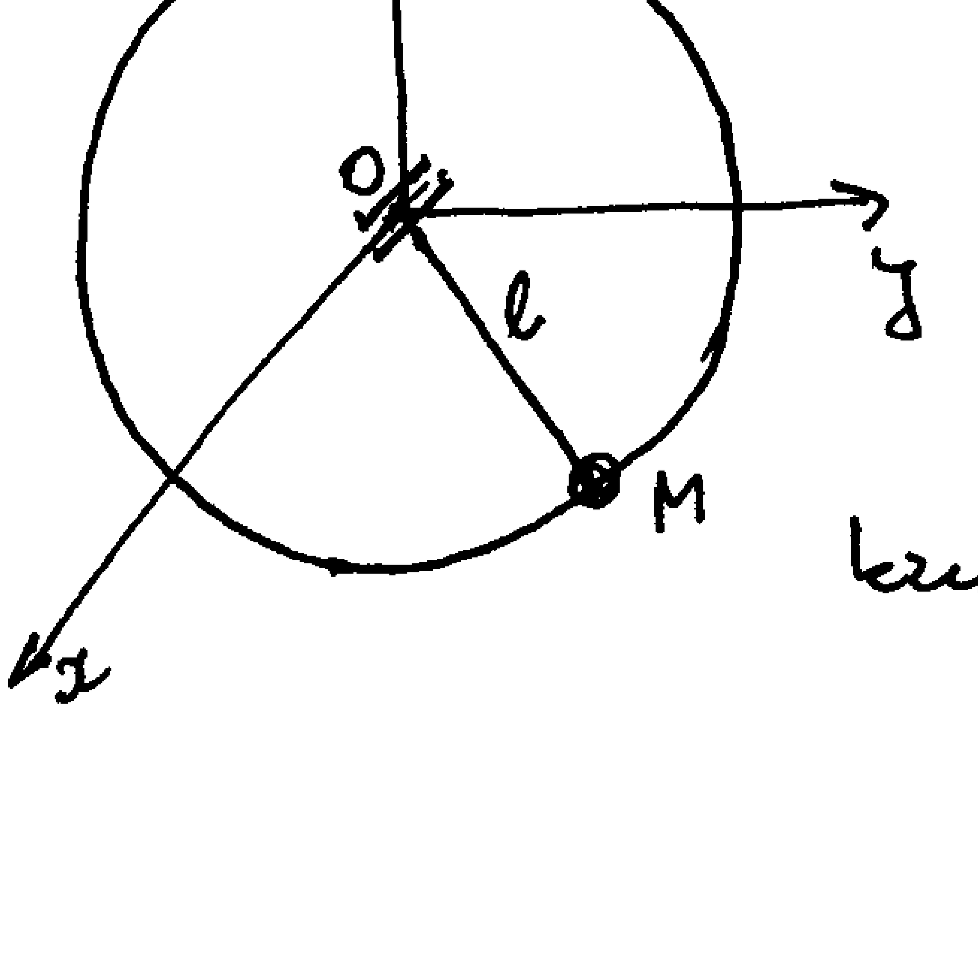


O – nepokretan sferni zglob

OM – kruti štap na čijem kraju M se nalazi mat. tačka

$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - l^2 = 0$ – jed. sfere

Pr. 2.



O – cilindrični nepokretni zglob čija je osa usmjerena duž ose x

jednačine veza:

$$f_1(x, y, z) = x = 0$$

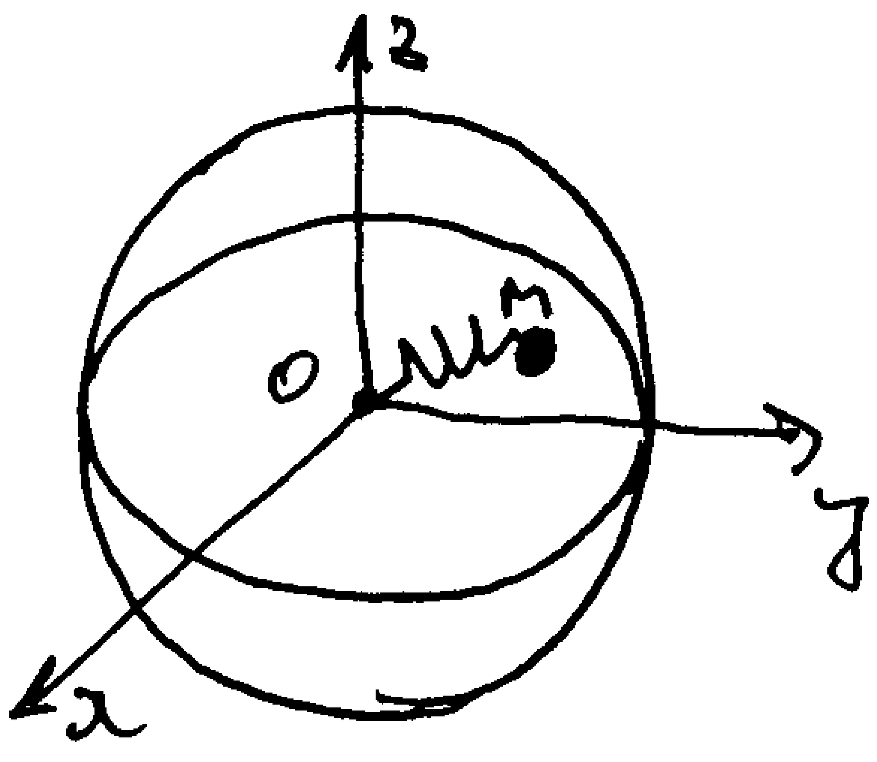
$$f_2(x, y, z) = y^2 + z^2 - l^2 = 0$$

Ovakve veze primoravaju tačku da se kreće po kružnici u ravni Oyz.

Pr.3. Neka se u primjeru 1, zglob O pomjera duž ose y po datom zakonu $\varphi(t)$. Tada je veza nestacionarna, a njena jednačina

$$f(x,y,z,t) = x^2 + (y-\varphi(t))^2 + z^2 - l^2 = 0$$

Pr.4. Ako je u primjeru 1, veza ostvarena pomoću nerastegljivog konca čija je dužina, kada je on zategnut, l, onda se materijalna tačka može nalaziti ili na sferi poluprečnika l ili unutar nje. Analitički, ovakva veza se zapisuje u obliku nejednačine



$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - l^2 \leq 0$$

Veze ovog oblika zovu se jednostrane (nezadržavajuće) veze i one ograničavaju dio prostora u kojem je prinuđena da se kreće tačka. Za razliku od njih, veza oblika (1) zove se dvostrana (zadržavajuća) veza.

Pri neslobodnom kretanju materijalne tačke usled mehaničkog kontakta tačke i veze javlja se sila uzajamnog dejstva između njih. Sila kojom veza djeluje na materijalnu tačku zove se reakcija veze, a sila kojom tačka djeluje na vezu zove se sila pritiska na vezu. One su, saglasno sa trećim Njutnovim zakonom, istih intenziteta i pravaca a suprotnih smjerova.

Reakciju veze označavaćemo sa $\vec{R}$.

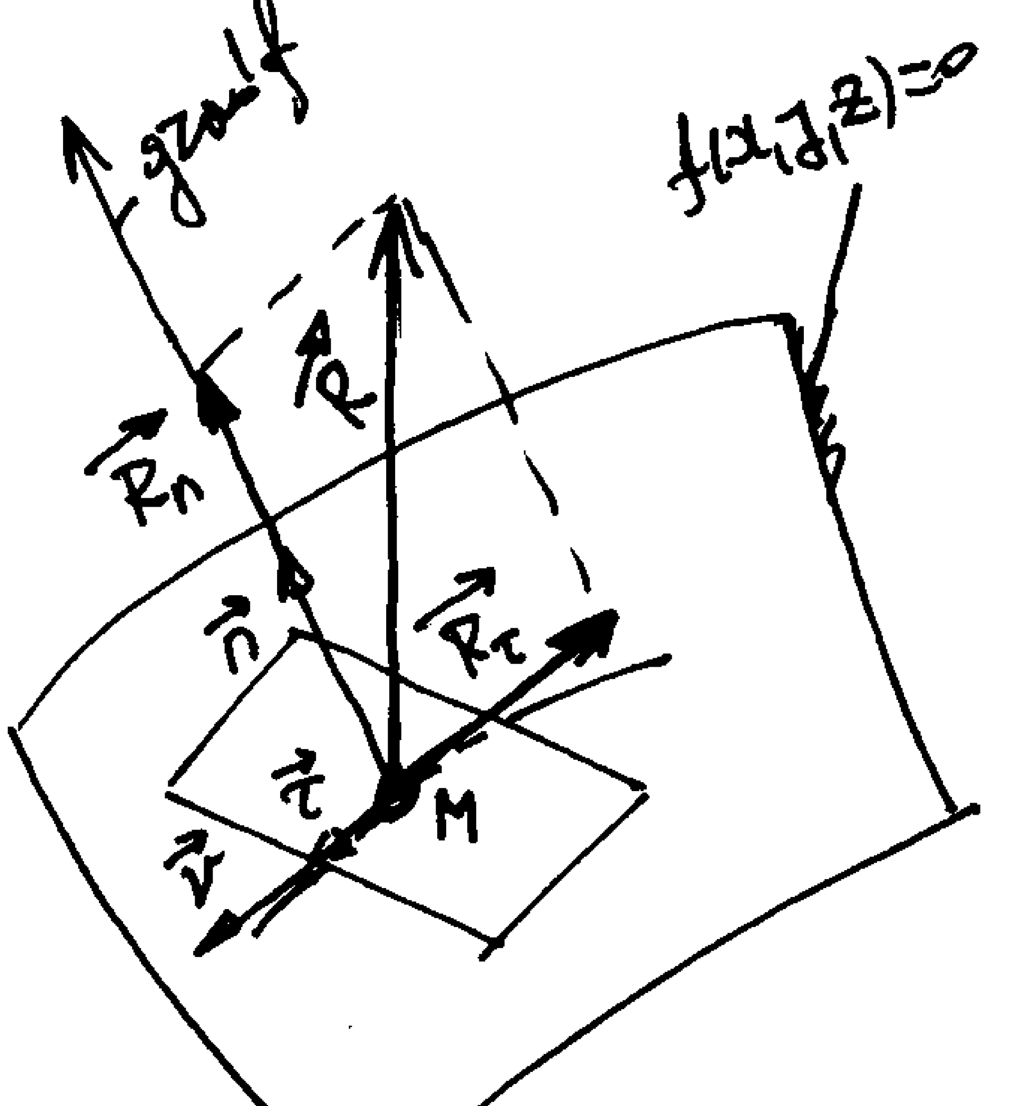
Pri proučavanju neslobodnog kretanja koristi se aksiom oslobađanja od veze: neslobodnu materijalnu tačku možemo posmatrati kao slobodnu, ako uklonimo vezu i njeno dejstvo na tačku zamijenimo reakcijom veze $\vec{R}$.

Prema tome, osnovna jednačina dinamike neslobodne tačke ima oblik

$$m\vec{a} = \vec{F}^a + \vec{R}, \qquad (2)$$

gdje je $\vec{F}^a$ rezultanta svih aktivnih sila koje djeluju na tačku.

Aktivne sile su one koje djeluju na materijalnu tačku bez obzira da li veza postoji ili ne. Reakcija veze je unaprijed nepoznata sila te se moraju učiniti određene hipoteze u vezi sa njenom strukturom. U opštem slučaju reakcija veze $\vec{R}$ rastavlja se na dvije komponente od kojih je jedna u pravcu normale na površ u tački M, a druga u pravcu tangente na putanju i zove se sila trenja. Sila trenja je suprotnog smjera od smjera brzine tačke.



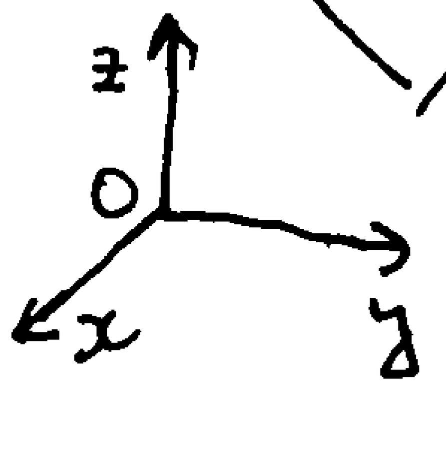
$$\vec{R} = \vec{R}_n + \vec{R}_\tau, \quad \vec{R}_\tau = \vec{F}_{tr}$$

Normalna komponenta $\vec{R}_n$ može se napisati u obliku

$$\vec{R}_n = R_n \vec{n}$$

ili

$$\vec{R}_n = \lambda \, \mathrm{grad} f,$$



gdje je $\vec{n}$ jedinični vektor spoljašnje normale na površ, λ - skalar i $\mathrm{grad} f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}$

Očigledno je

$$\vec{n} = \frac{\operatorname{grad} f}{|\operatorname{grad} f|} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}\right)$$

Ako je $R_\tau = 0$, odnosno ako reakcija veze pada u pravcu normale na površ veze za vezu se kaže da je idealna. Idealna veza, kada je ostvarena posredstvom materijalne površi, odgovara slučaju glatke površi (dobro polirane površi) tako da se tangencijalna komponenta reakcije može zanemariti.

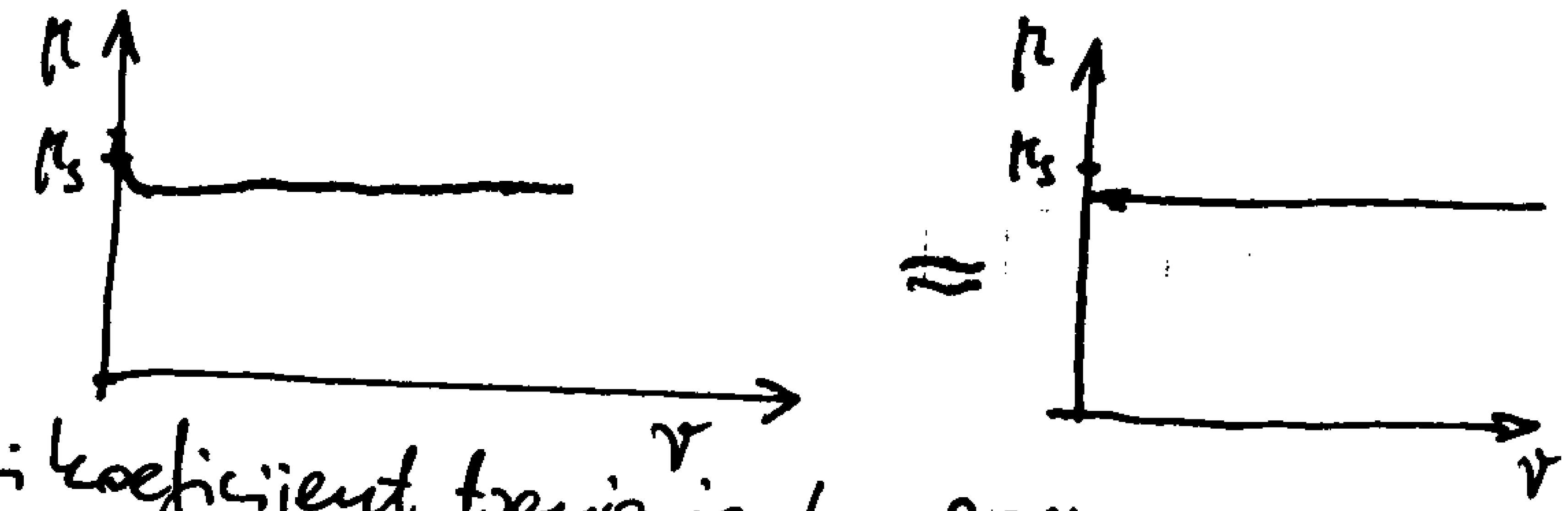
Ukoliko je površ po kojoj se tačka kreće hrapava, sila trenja se ne može zanemariti, tj. reakcija ne pada u pravcu normale, i veza je neidealna (realna).

Sila trenja se određuje na osnovu zakona trenja koji se potvrđuju eksperimentalno. Najčešće se primjenjuje Kulonov zakon trenja po kome je

$$\vec{F}_{tr} = -\mu|\vec{R}_n|\frac{\vec{v}}{v}, \quad v\neq 0$$

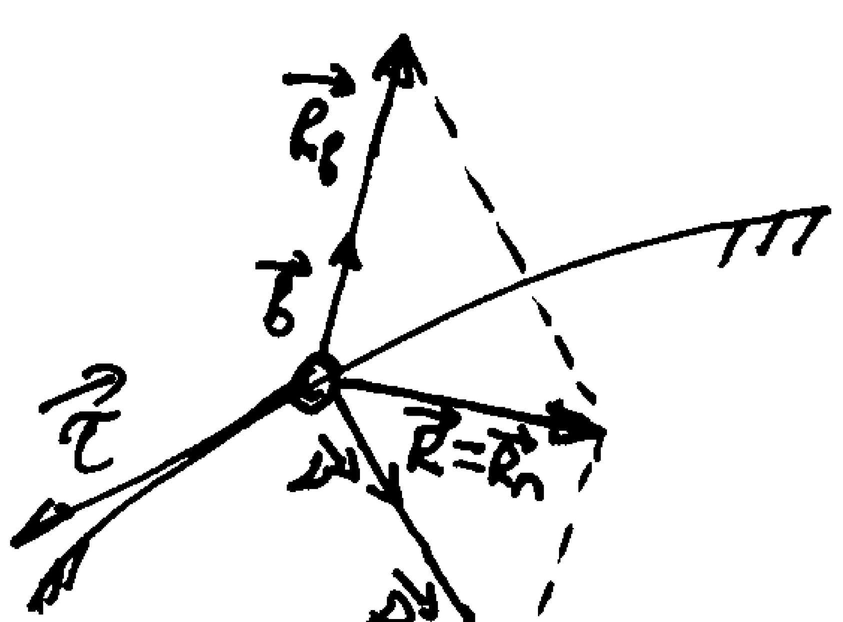
$$F_{tr} \le \mu_s|\vec{R}_n|, \quad v=0$$

gdje je μ - kinematički (kinetički) koeficijent trenja, a μ_s - statički koeficijent trenja. Koeficijent trenja μ zavisi od vrste materijala koji se dodiruju, hrapavosti dodirnih površina, podmazivanja i, u izvjesnom stepenu, od brzine, a određuje se eksperimentalno.



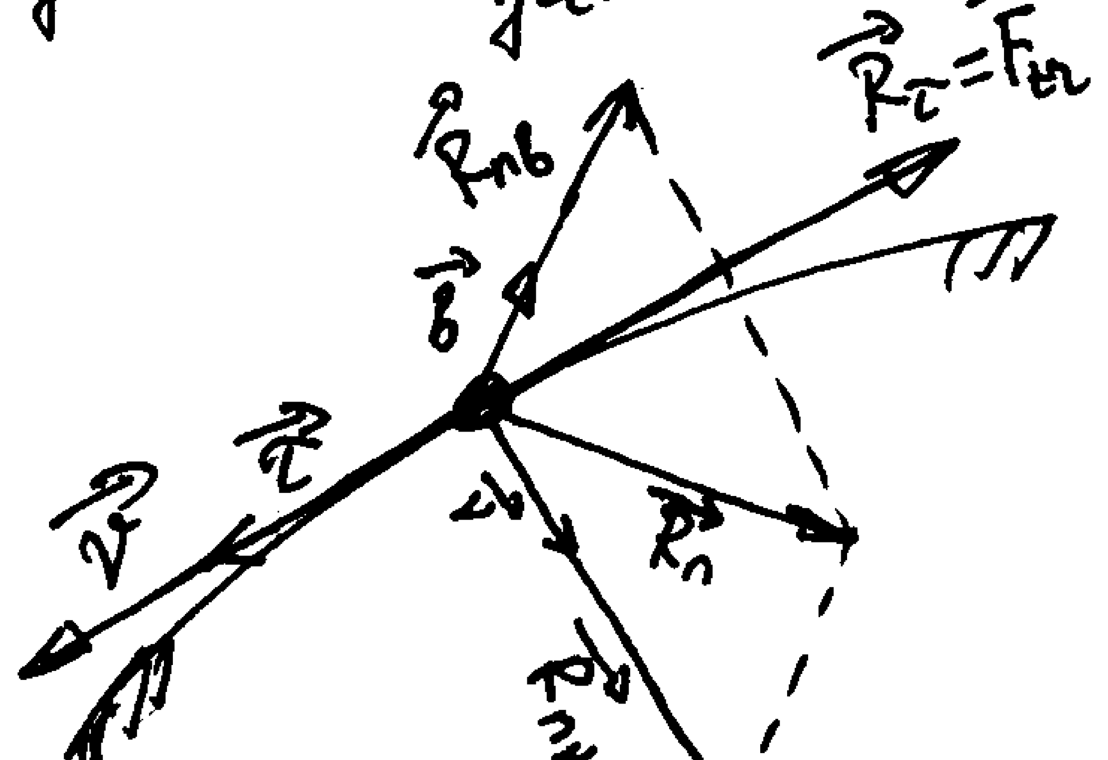
Kinetički koeficijent trenja je oko 20% manji od statičkog, ali se najčešće, zbog jednostavnosti proračuna, uzima da je $\mu = \mu_s$.

Kod idealne veze u obliku linije reakcija veze leži u normalnoj ravni krive i može se razložiti na komponente u pravcu glavne normale $\vec{\nu}$ i binormale $\vec{b}$, dok se kod hrapave linije kao komponenta reakcije javlja i sila trenja.



$\vec{R} = \vec{R}_n = R_\nu\vec{\nu} + R_b\vec{b}$

glatka kriva



$\vec{R} = \vec{R}_n + \vec{F}_{tr}, \quad \vec{R}_n = R_{n\nu}\vec{\nu} + R_{nb}\vec{b}$

hrapava kriva

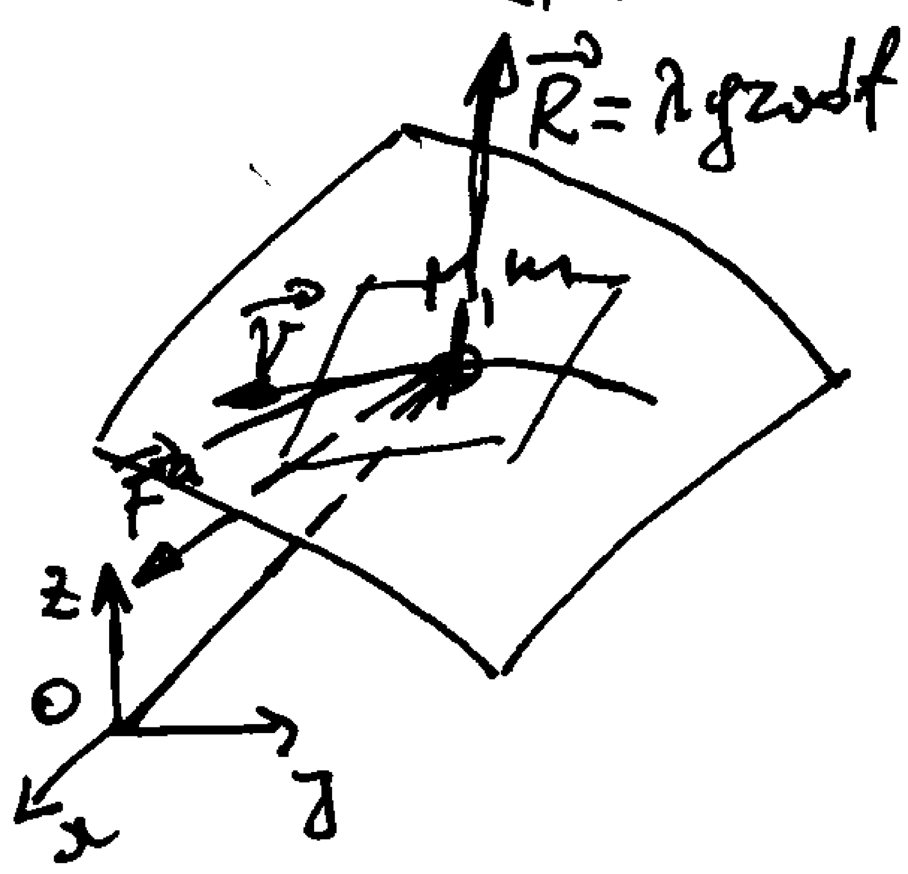
U dinamici neslobodne tačke, na osnovu osnovne jednačine (2), rješavaju se dva zadatka, i to:

Prvi - direktni - zadatak: poznato je kretanje tačke i aktivne sile koje na nju djeluju, a treba odrediti reakciju veze.

Drugi - osnovni - zadatak: poznate su aktivne sile koje djeluju na tačku, a treba odrediti zakon kretanja i reakciju veze.

ne/2.2. Diferencijalne jednačine kretanja materijalne tačke po glatkoj površi (Lagranžove jednačine prve vrste)

Neka je tačka M, mase m, primorana da se kreće po glatkoj površi čija je jednačina $f(x, y, z) = 0$



$$m\vec{a} = \vec{F}^a + \vec{R}$$

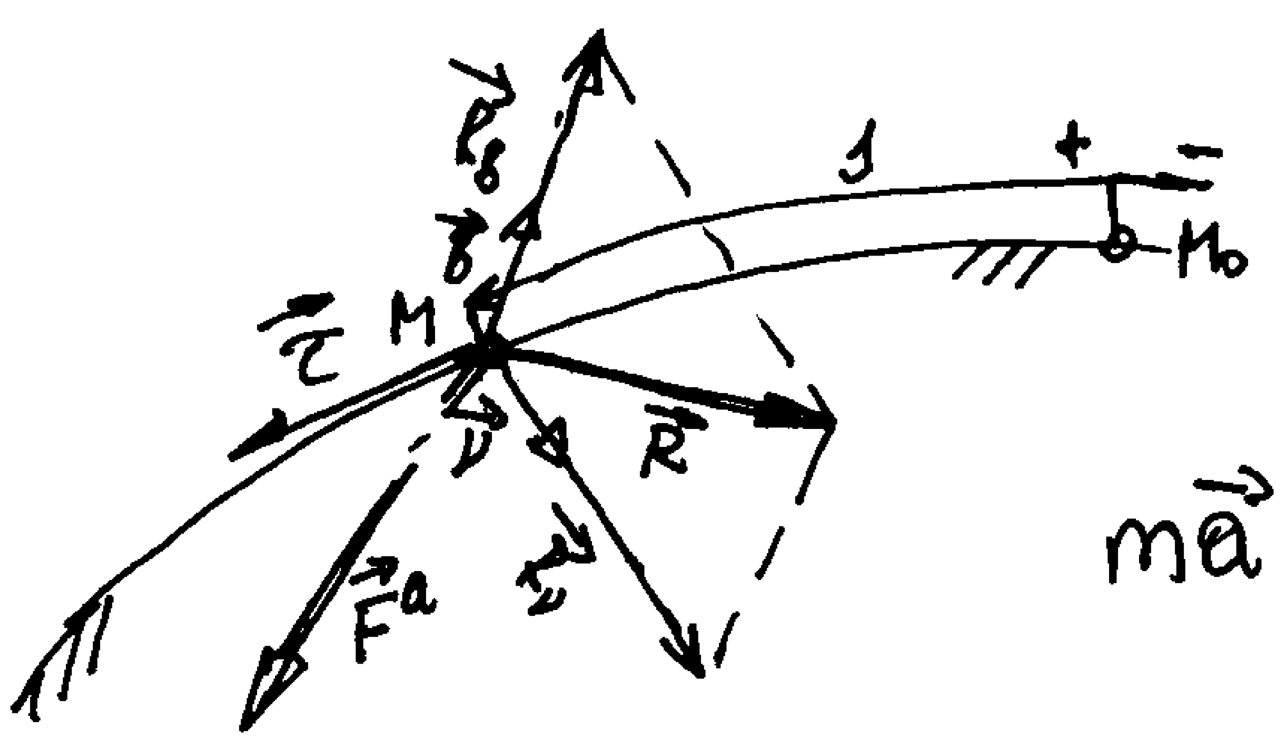
$$\vec{R} = \lambda \,\mathrm{grad} f = \lambda\left(\frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}\right)$$

$$\rightarrow \quad \left.\begin{aligned} m\ddot{x} &= F_x^a + \lambda\frac{\partial f}{\partial x} \\ m\ddot{y} &= F_y^a + \lambda\frac{\partial f}{\partial y} \\ m\ddot{z} &= F_z^a + \lambda\frac{\partial f}{\partial z} \end{aligned}\right\} (3)$$

Ove tri jednačine, koje se zovu Lagranžove jednačine prve vrste ili dif. jednačine kretanja sa množiteljem veze, zajedno sa jednačinom veze čine sistem od četiri jednačine iz kojih mogu biti određene nepoznate funkcije vremena x, y, z i λ. Nalaženjem funkcija $x(t)$, $y(t)$ i $z(t)$ određene su konačne jednačine kretanja, a određivanjem množitelja λ određuje se reakcija veze.

2.3. Diferencijalne jednačine kretanja materijalne tačke po nepokretnoj krivoj (Ojlerove jednačine)

Neka se tačka M, mase m, pod dejstvom rezultante aktivnih sila $\vec{F}^a$, kreće po nepokretnoj glatkoj krivoj. Za opisivanje ovakvog kretanja najpodesnije su prirodne diferencijalne jednačine kretanja tj. dif. jednačine kretanja dobijene projekcijom osnovne jednačine dinamike $m\vec{a} = \vec{F}^a + \vec{R}$ na ose prirodnog koordinatnog sistema.



$$\vec{v} = v_\tau \vec{\tau} = \dot{s}\vec{\tau}$$

$$\vec{a} = a_\tau \vec{\tau} + a_\nu \vec{\nu} = \ddot{s}\vec{\tau} + \frac{v^2}{R_k}\vec{\nu}$$

$$\vec{R} = R_\nu \vec{\nu} + R_\beta \vec{\beta}$$

$$m\vec{a} = \vec{F}^a + \vec{R} \rightarrow \left.\begin{aligned} m\ddot{s} &= F^a_\tau \\ m\frac{\dot{s}^2}{R_k} &= F^a_\nu + R_\nu \\ 0 &= F^a_\beta + R_\beta \end{aligned}\right\} (4)$$

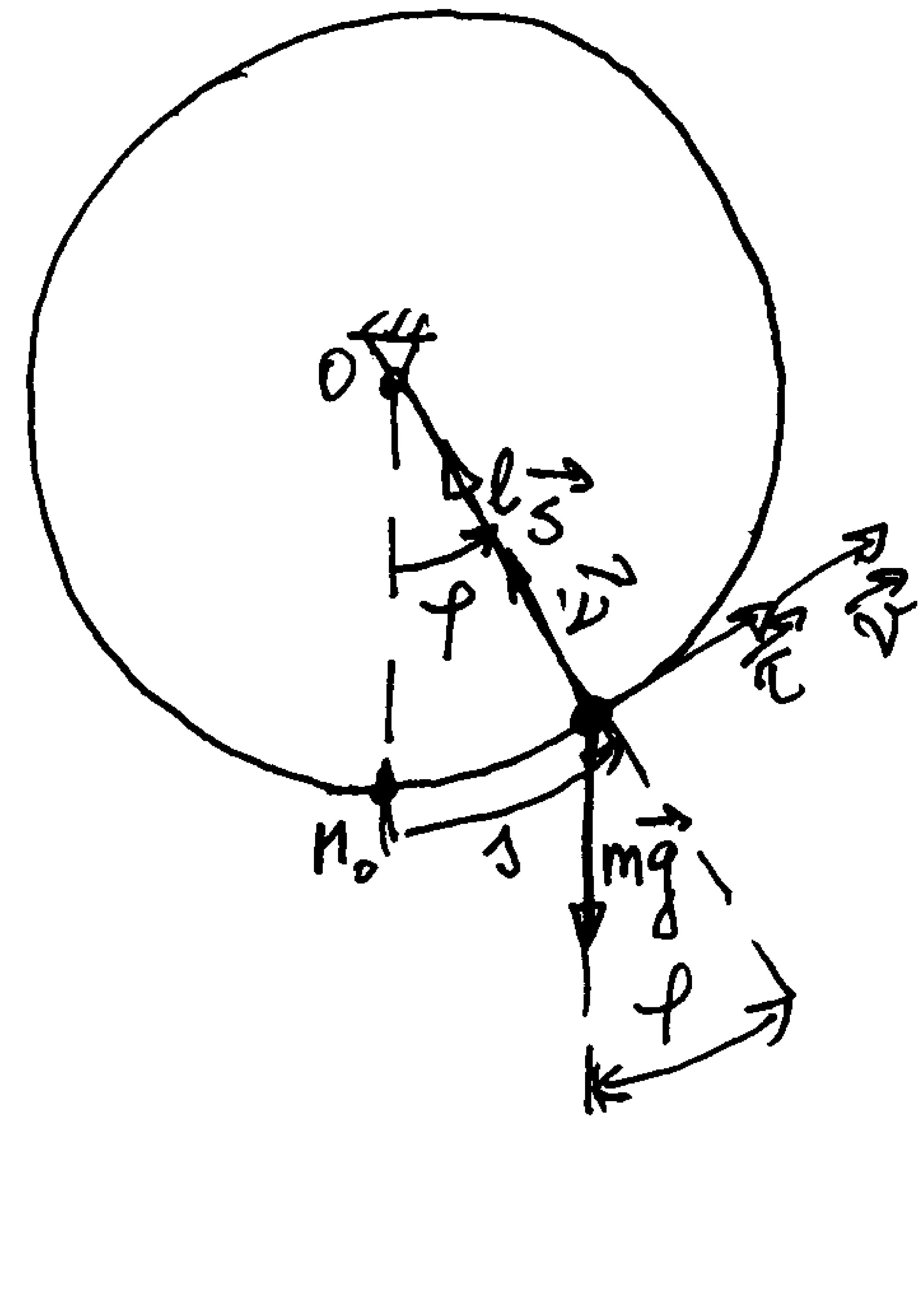
Jednačina $(4)_1$ ne sadrži nepoznatu reakciju i omogućuje da se odredi zakon kretanja duž krive ($s = s(t)$), a jednačine $(4)_{2,3}$ služe za određivanje reakcije.

Ako kriva nije glatka, reakcija ima komponentu u tangencijalnom pravcu, silu trenja, pa, u tom slučaju, jednačinu $(4)_1$ treba zamijeniti jednačinom

$$m\ddot{s} = F^a_\tau + R_\tau$$

Pr. Matematičko klatno – materijalna tačka koja se kreće po kružnici, u vertikalnoj ravni, pod dejstvom sile teže.

Veza koja obezbjeđuje takvo kretanje može biti ostvarena pomoću krutog lakog štapa OM, koji se može okretati oko nepokretne horizontalne ose O a za drugi kraj M vezana je tačka mase m.



$$\vec{R} = \vec{S}, \quad s = l\varphi, \quad v = \dot{s} = l\dot{\varphi} \rightarrow \ddot{s} = l\ddot{\varphi}$$

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{S}$$

$$\rightarrow \quad m\ddot{s} = -mg\sin\varphi$$

$$m\frac{v^2}{l} = -mg\cos\varphi + S$$

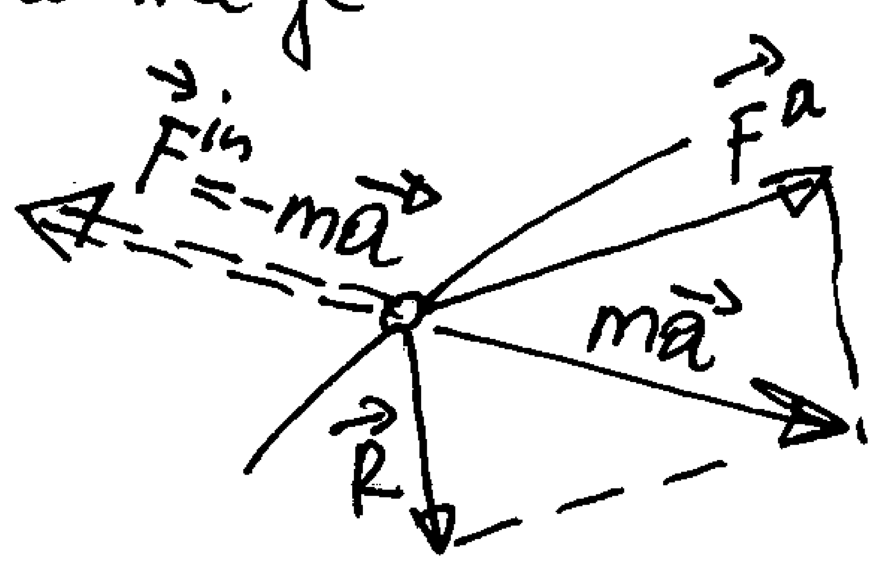
$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\sin\varphi = 0 \text{ – dif. jed. kretanja mat. klatna}$$

2.4. Dalamberov princip za tačku

Dalamberov princip predstavlja rezultat nastojanja da se dinamičke jednačine zapišu, u formalnom smislu, u obliku statičkih uslova ravnoteže.

Posmatrajmo neslobodnu tačku mase m na koju djeluju aktivne sile čija je rezultanta $\vec{F}^a$. Osnovna jednačina dinamike je

$$m\vec{a} = \vec{F}^a + \vec{R}$$



i ona se može napisati u obliku

$$\vec{F}^a + \vec{R} + (-m\vec{a}) = 0,$$

odnosno

$$\vec{F}^a + \vec{R} + \vec{F}^{in} = 0 \qquad (5)$$

pri čemu je uvedena oznaka $\vec{F}^{in} = -m\vec{a}$.

Vektor $\vec{F}^{in}$ koji je jednak negativnom proizvodu mase tačke i njenog ubrzanja naziva se inercijalna sila (sila inercije).

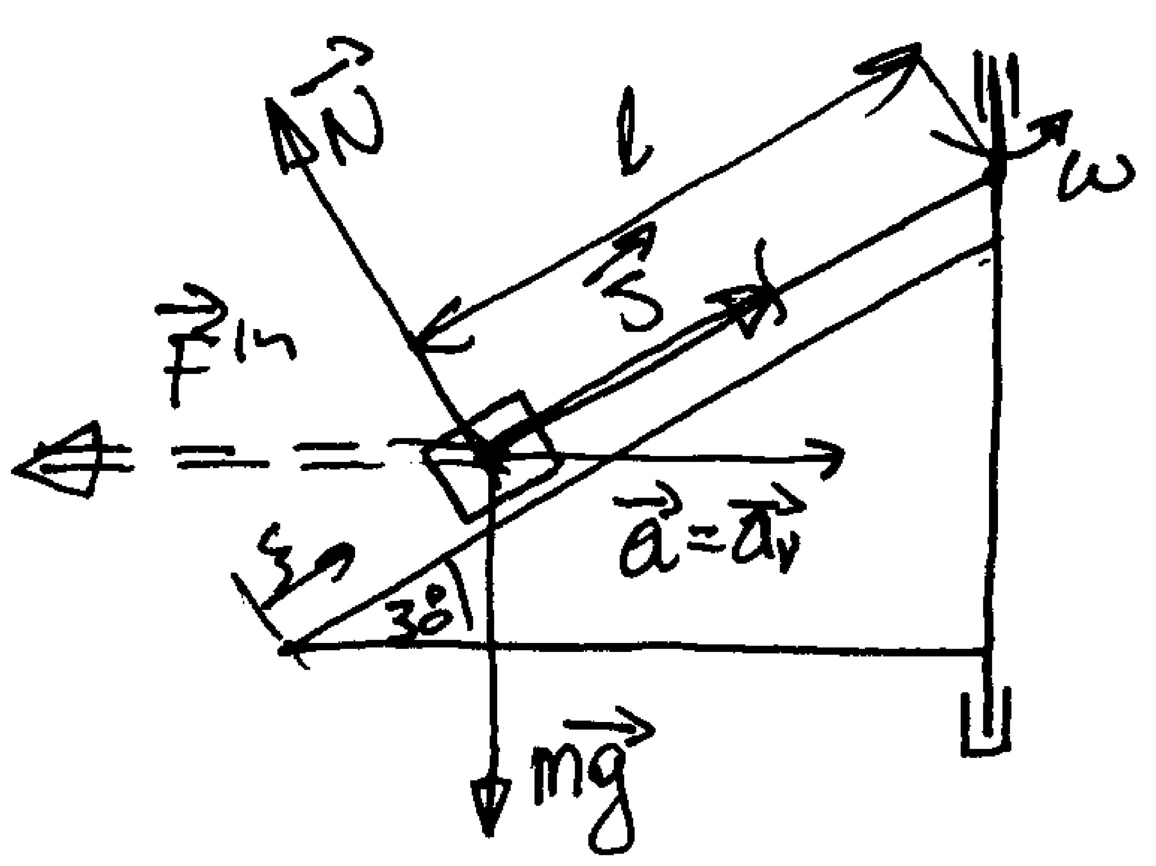
Jednačina (5) izražava Dalamberov princip za tačku: Materijalna tačka se kreće tako da je u svakom trenutku geometrijski zbir aktivnih sila, reakcije veze i inercijalne sile jednak nuli.

Jednačina (5) ima oblik statičke jednačine, tj. izražava se u obliku uslova ravnoteže sila, a u suštini predstavlja dinamičku jednačinu u vektorskom obliku. Stoga se Dalamberov princip naziva i metod kinetostatike.

Naročito treba naglasiti da na pokretnu tačku stvarno djeluju samo sile $\vec{F}^a$ i $\vec{R}$, a da sila inercije <u>ne djeluje</u> na datu tačku. Inercijalna sila je uvedena uslovno, tj. vještački, da bismo bili u stanju da dinamičke jednačine postavimo formalno u obliku statičkih jednačina.

Primjena ovog principa je naročito pogodna pri rješavanju prvog zadatka dinamike.

Pr. Kameni blok mase $m = 10\,kg$ nalazi se na glatkoj strmoj ravni, nagiba $30°$, koja se sa 10 ob/min obrće oko vertikalne katete. Kolika je sila u nerastegljivom užetu, dužine $l = 2\,m$, kojim je blok vezan za obrtnu osovinu.



$$\omega = 10 \cdot \frac{2\pi}{60} = 1{,}05\ rad/s$$

$$a = a_\nu = l\cos 30°\,\omega^2 = 2\ \frac{m}{s^2}$$

$$F^{in} = ma = 20\,N$$

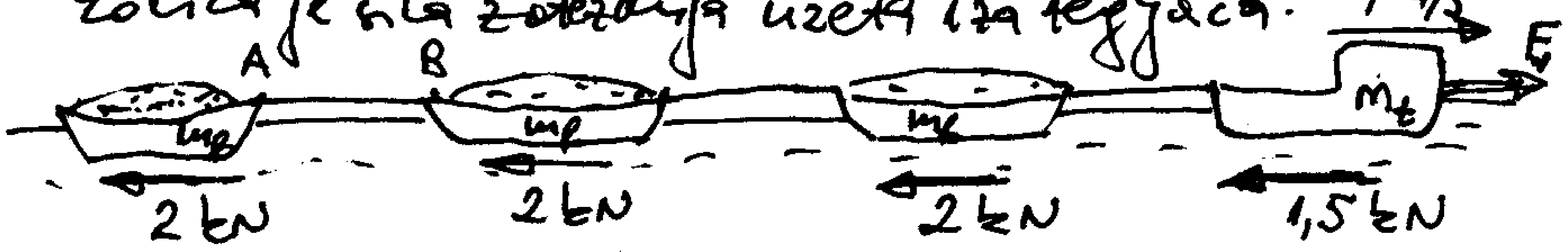
$$m\vec{g} + \vec{N} + \vec{S} + \vec{F}^{in} = 0$$

$$\xi:\ -mg\sin 30° + S - F^{in}\cos 30° = 0$$

$$\rightarrow S = 66{,}35\,N$$

2. (Zadaci za vježbanje)

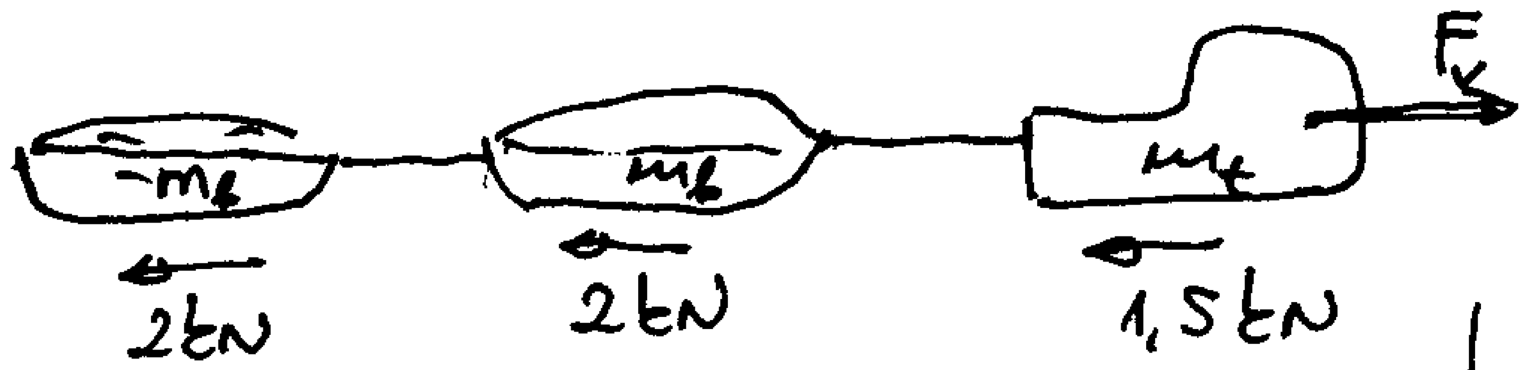
1. Tegljač mase 12 tona vuče tri barže, svaka mase po 30 tona, konstantnom brzinom od 4 m/s savladavajući otpor vode koji je po 2 kN za svaku baržu i 1,5 kN za tegljač. Ako se uže AB prekine, odrediti koliko je tada ubrzanje tegljača i kolika je sila zatezanja užeta iza tegljača.



$$(3m_b+m_t)a = F_v - F^{(d)}$$

$v=const, \to a=0 \to F_v = F^{(d)}$

$F^{(d)} = 7,5\,kN$, vučna sila

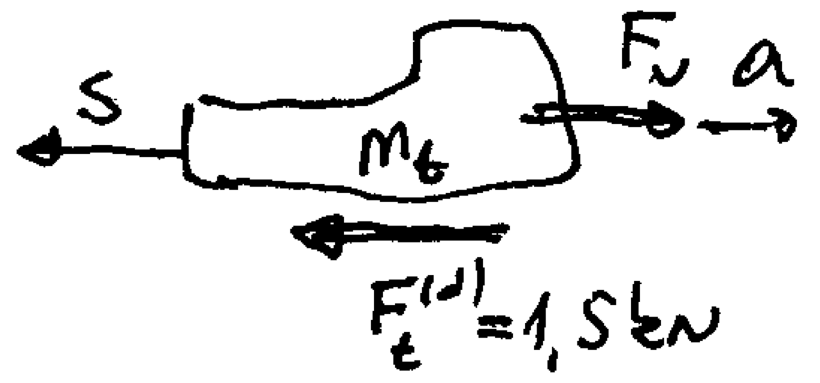


$$(2m_b+m_t)a = F_v - F_1^{(d)}$$

$m_b = 30\cdot10^3\,kg$, $m_t = 12\cdot10^3\,kg$

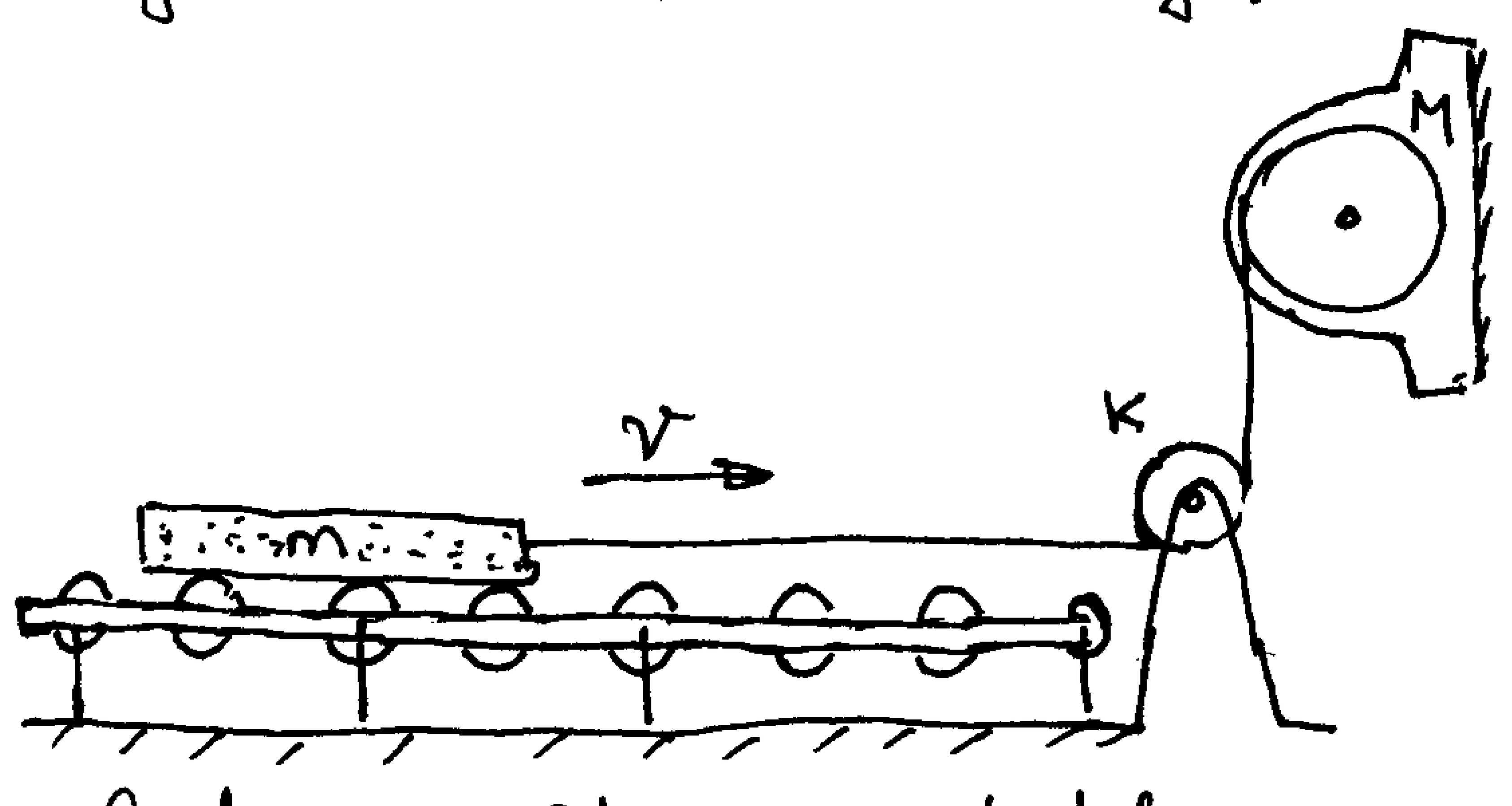
$F_v = 7,5\cdot10^3\,N$; $F_1^{(d)} = 5,5\,kN = 5,5\cdot10^3\,N$

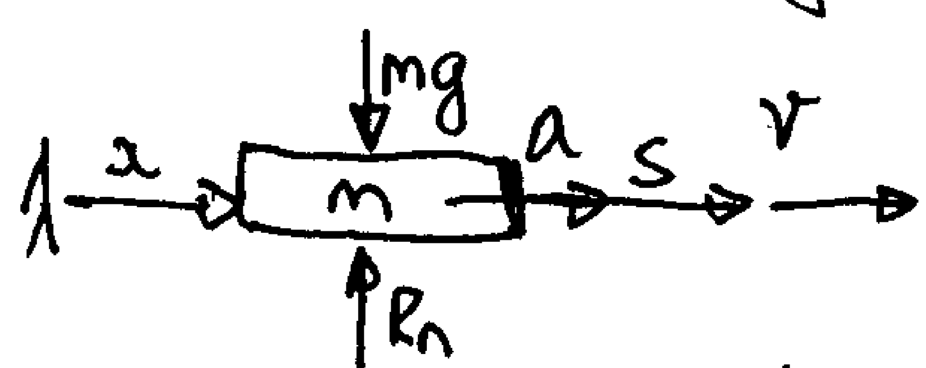
$\Rightarrow a = 0,01961\,m/s^2$



$$m_t a = F_v - F_t^{(d)} - S, \to S = 5765\,N$$

2. Greda mase $m=300\,kg$, koja je bila u miru, počinje da se vuče preko niza malih valjaka (tako da je trenje zanemarljivo malo) posredstvom užeta koje je prebačeno preko idealnog kotura K i koje se namotava na doboš koji pokreće motor M. Izračunati silu u užetu u trenutku $t_1 = 5\,s$, ako se ~~uže~~ namotava na doboš tako da se brzina grede mijenja po zakonu $v = 0,4t^2\,[m/s]$. Za koliko će se pomjeriti greda za ~~vrijeme od~~ 5 s od početka kretanja?



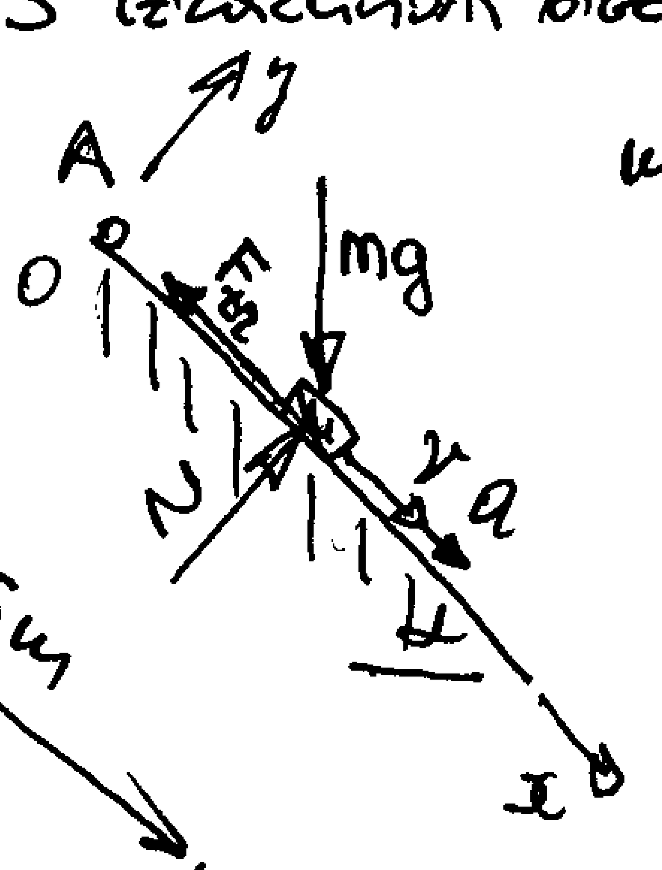


$$ma = S, \quad a = \frac{dv}{dt} = 0,8t$$

za $t = t_1 = 5\,s$, $S = S_1 = 300\cdot0,8\cdot5 = 1200\,N$

$$\frac{dx}{dt} = v(t), \quad \int_0^L dx = \int_0^{t_1} 0,4t^2\,dt \to L = 16,67\,m$$

3. Opeka mase 2 kg počinje da klizi iz mira iz položaja A niz krov nagiba $\alpha = 30°$. Ako je koeficijent trenja $\mu = 0,3$ izračunati brzinu kojom opeka upada u oluk.



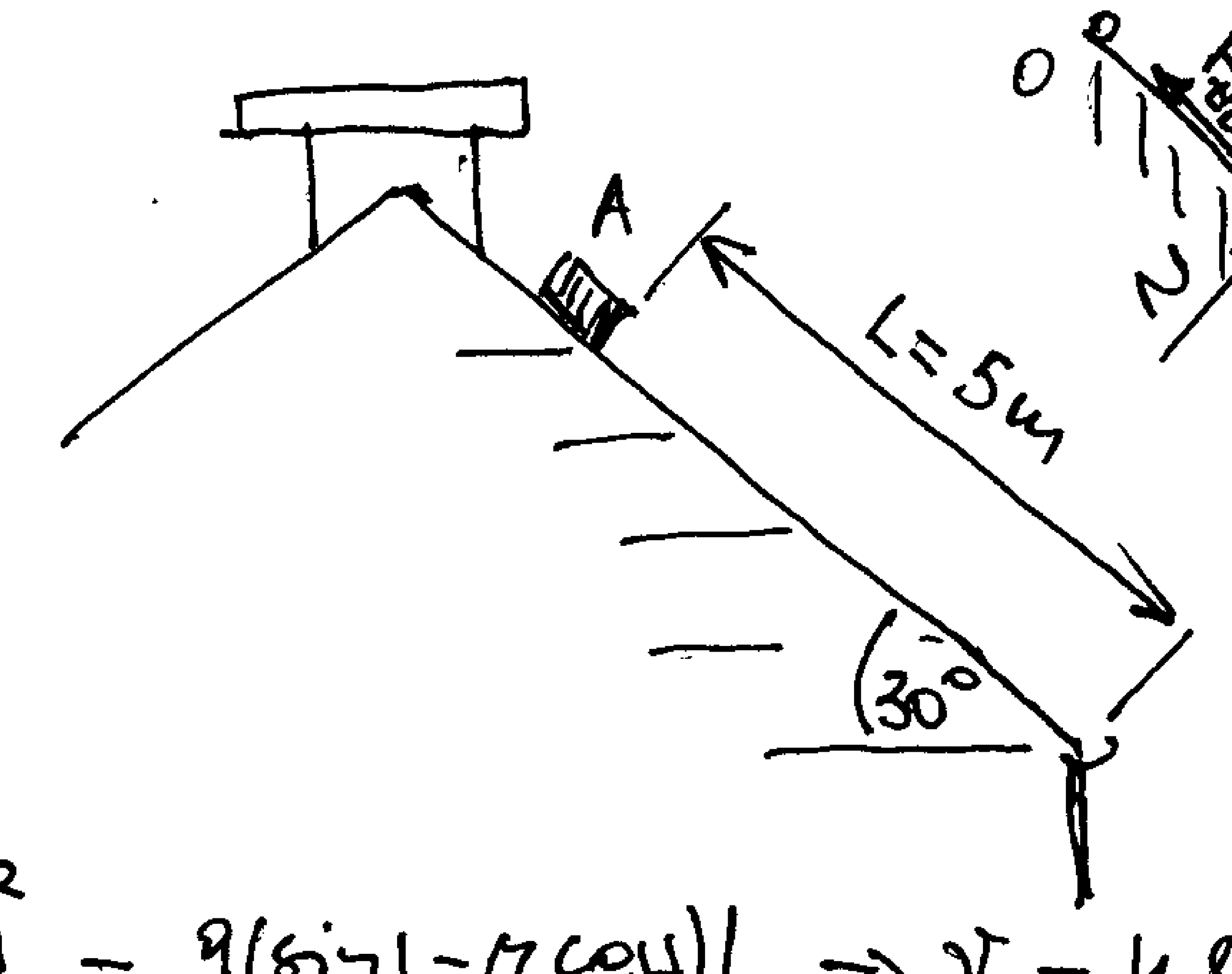
$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{tr} \Rightarrow$ $ma = mg\sin\alpha - F_{tr}$

$0 = N - mg\cos\alpha$, $F_{tr} = \mu N$

$\Rightarrow a = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) = const$

$\ddot{x} = a = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)$

$\ddot{x} = \frac{d\dot{x}}{dx}\cdot\frac{dx}{dt} = \dot{x}$

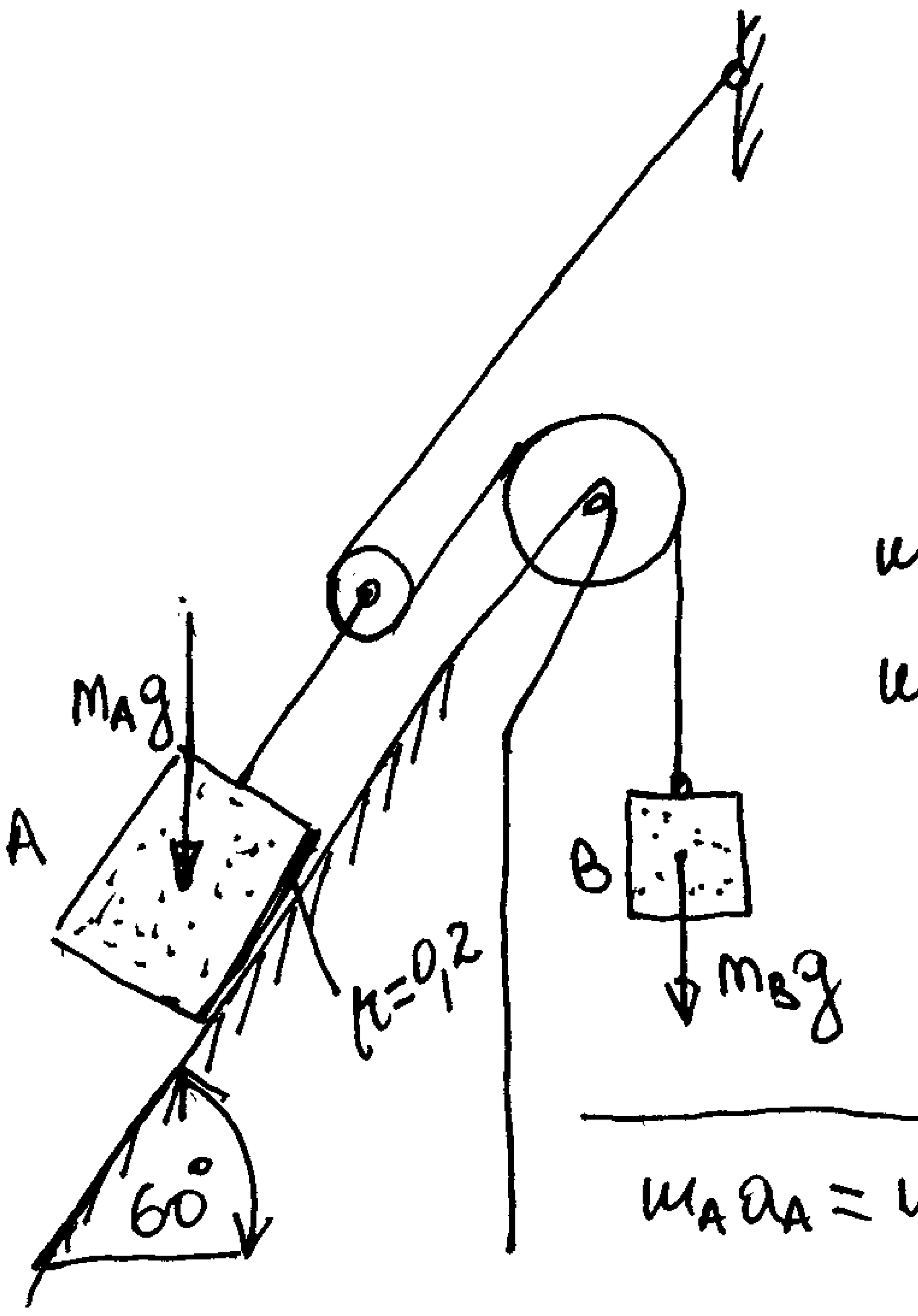


$\Rightarrow \dot{x}\,d\dot{x} = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)\,dx \;/\int$

$$\int_0^{v_1} \dot{x}\,d\dot{x} = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)\int_0^L dx$$

$$\frac{v_1^2}{2} = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)L \Rightarrow v_1 = 4,85\,\frac{m}{s}$$

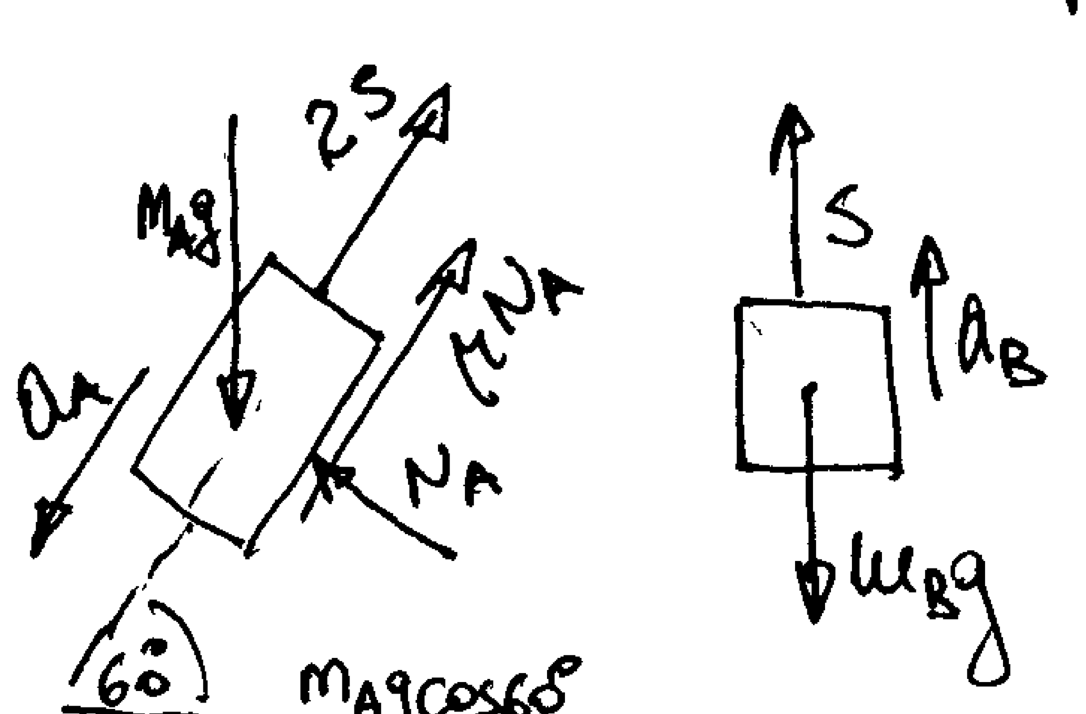
4. U sistemu prikazanom na slici odrediti ubrzanje tereta A. Koeficijent trenja i mase tereta su date na sl. Zanemariti mase kotura i užeta.

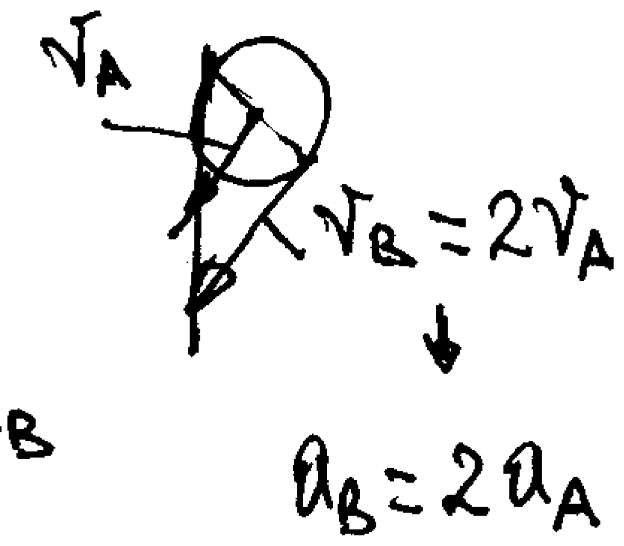


$m_A = 80\,kg$

$m_B = 20\,kg$

Uputstvo!

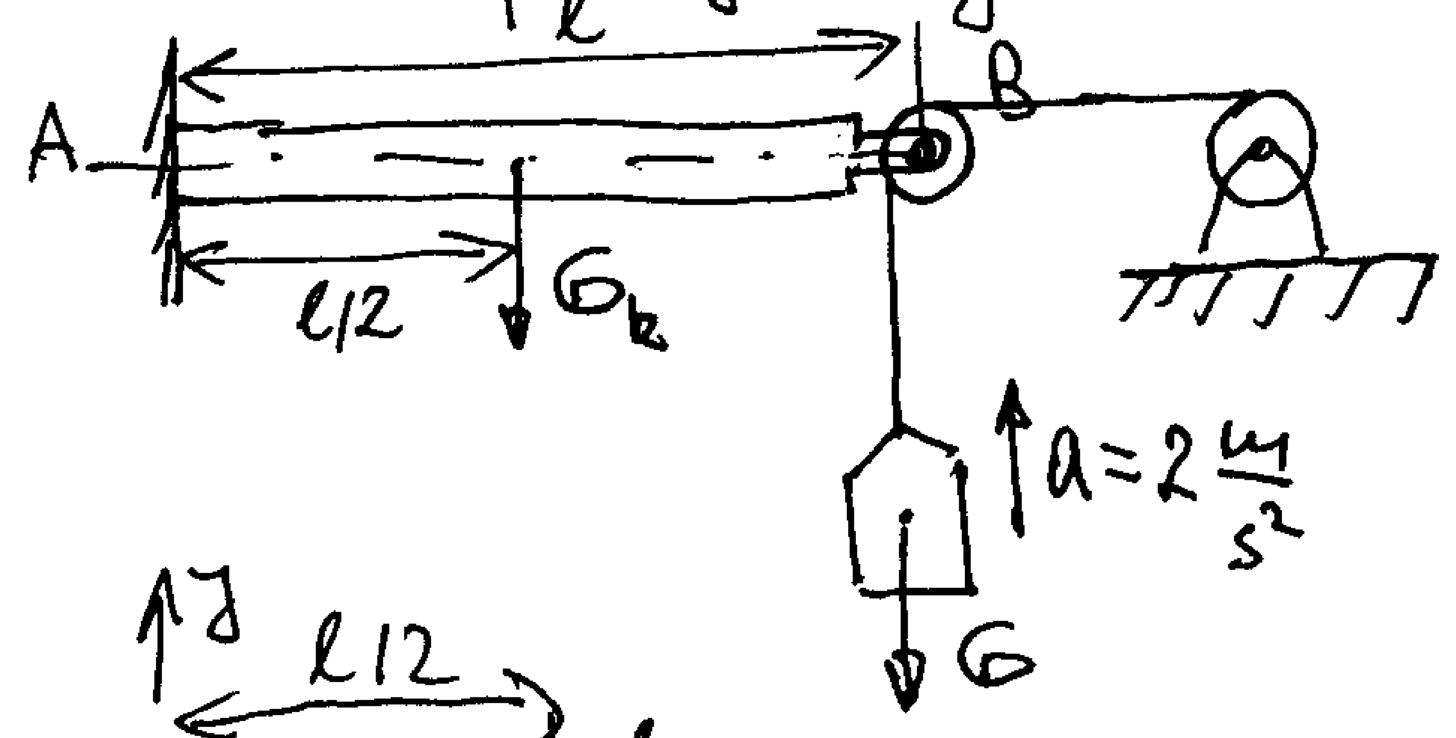




$m_A g\cos 60^\circ$

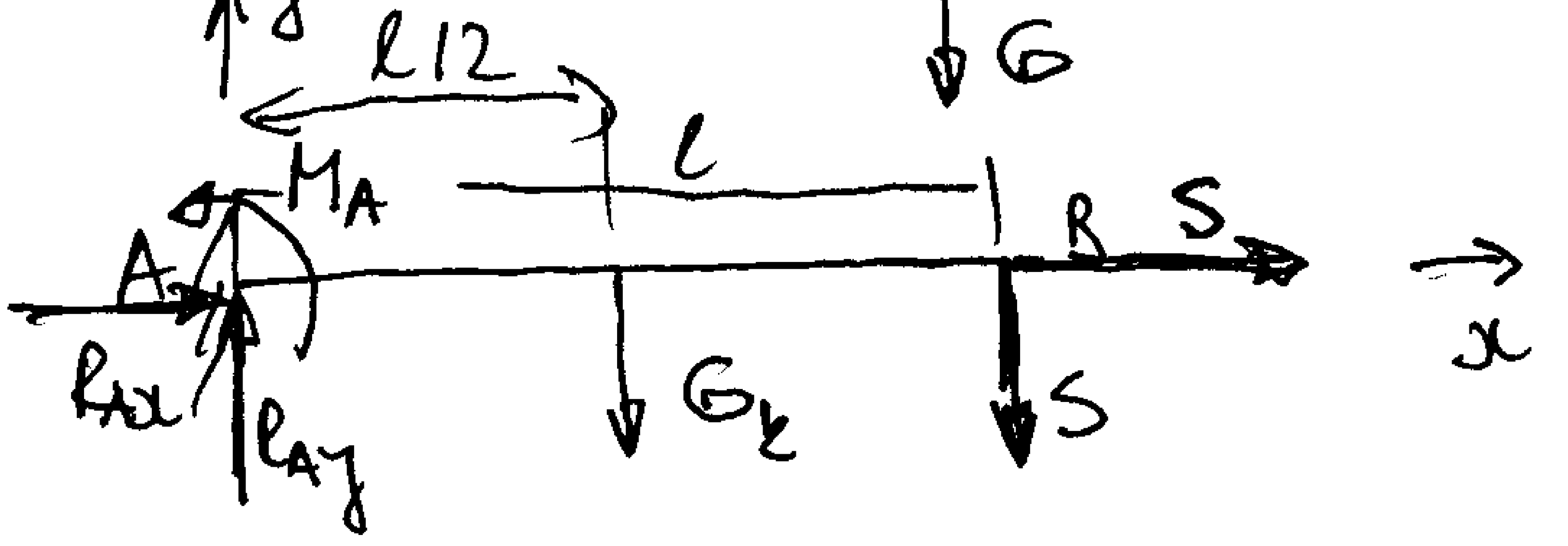
$$m_A a_A = m_A g \sin 60^\circ - 2S - \mu N_A \;;\; m_B a_B = S - m_B g \xrightarrow{a_B = 2a_A} a_A = 1,3\,\frac{m}{s^2}$$

5. Sanduk težine 150N podiže se konstantnim ubrzanjem od $2\,m/s^2$. Ako je težina homogene konzole konstantnog poprečnog presjeka 500N, a dužina $l = 2m$, odrediti reakcije uklještenja A. Zanemariti masu i dimenzije kotura B.



$$ma = S - G \;,\; m = \frac{G}{g}$$

$$\rightarrow S = G\left(\frac{a}{g} + 1\right)$$



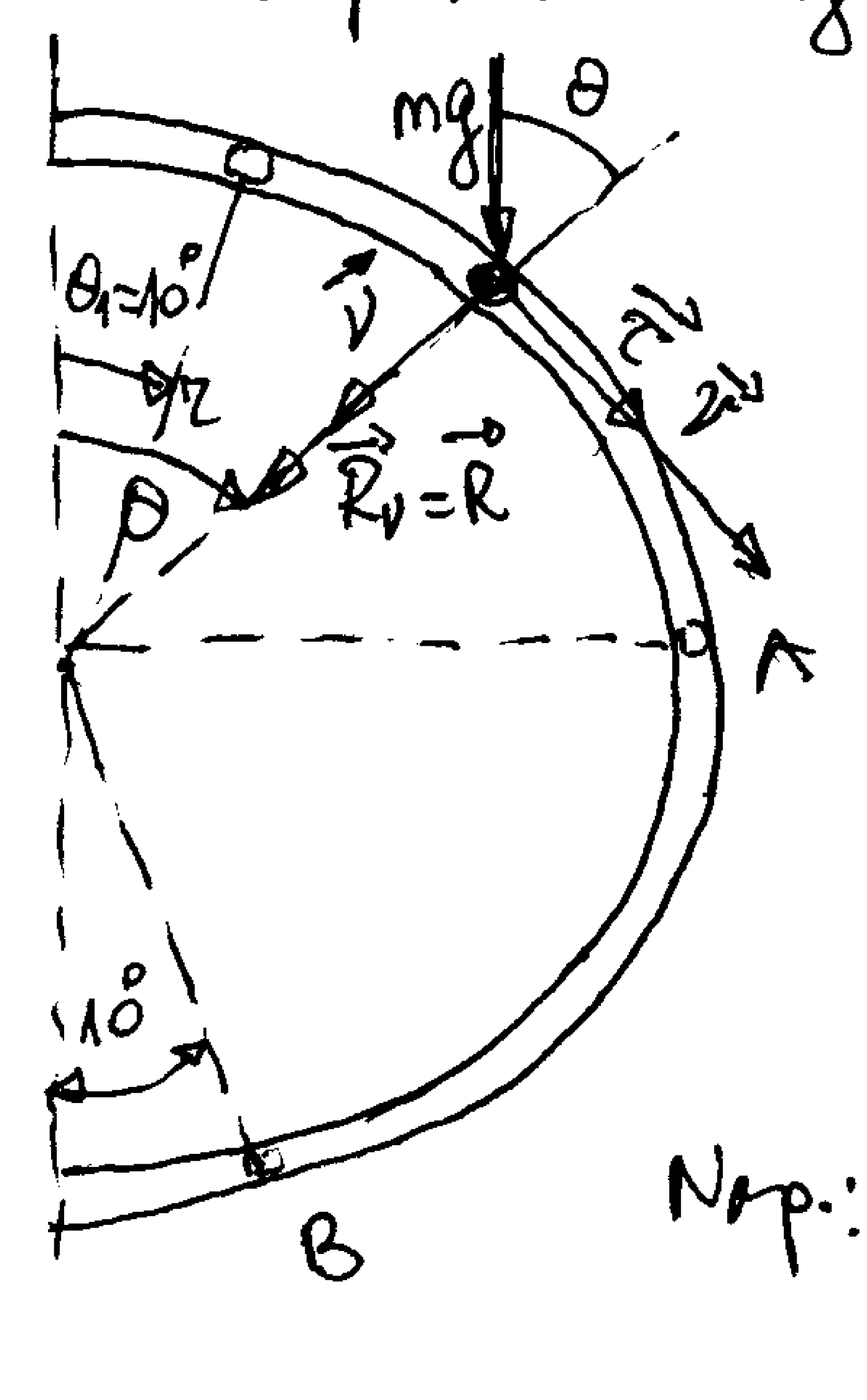
uslovi ravnoteže konzole:

$$R_{Ax} + S = 0 \Rightarrow R_{Ax} = -S = -180,6\,N$$

$$R_{Ay} - G_k - S = 0 \Rightarrow R_{Ay} = G_k + S = 680,6\,N$$

$$M_A - G_k\frac{l}{2} - S\cdot l = 0 \Rightarrow M_A = 861,2\,Nm$$

6. Kugla mase $m = 2kg$ klizi bez trenja kroz vertikalni kružni žlijeb poluprečnika $r = 0,8m$. Ako je kugla počela kretanje iz mira iz položaja $\theta_1 = 10^\circ$, odrediti pritisak kugle na zid žlijeba u položajima A i B.



$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{R} \rightarrow m a_\tau = mg\sin\theta \rightarrow$$

$$m a_\nu = mg\cos\theta + R_\nu$$

$$a_\nu = \frac{v^2}{r}$$

$$\frac{dv}{dt} = g\sin\theta$$

$$v = f(\theta)\,?$$

$$\frac{dv}{d\theta}\cdot\underbrace{\frac{d\theta}{dt}}_{=\dot\theta = \frac{v}{r}} = g\sin\theta$$

$$\rightarrow v\,dv = rg\sin\theta\,d\theta$$

$$\int_0^v v\,dv = rg\int_{\theta_1}^{\theta}\sin\theta\,d\theta$$

$$\rightarrow v^2 = 2rg(\cos\theta_1 - \cos\theta)$$

$$\Rightarrow R_\nu = mg(2\cos\theta_1 - 3\cos\theta)$$

$$R_{A\nu} = R_\nu\left(\theta = \frac{\pi}{2}\right) = 38,6\,N$$

$$R_{B\nu} = R_\nu(\theta = 170^\circ) = 96,6\,N$$

Nap.: Pritisak kuglice na žlijeb $\vec{P} = -\vec{R}$

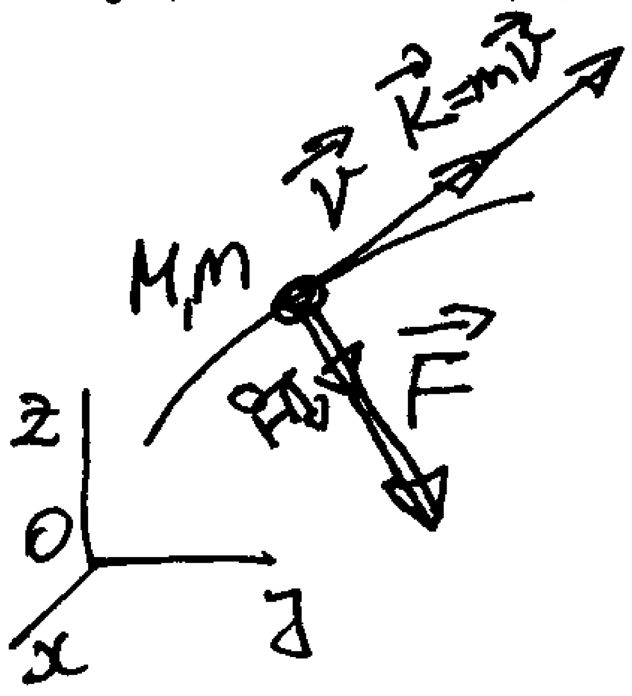
3. Opšti zakoni dinamike tačke

Opšti zakoni se izvode iz osnovne jednačine dinamike i oni povezuju određene dinamičke veličine (mjere mehaničkog kretanja) koje karakterišu kretanje sa veličinama koje karakterišu dejstvo sila.

3.1. Zakon o promjeni količine kretanja

Količina kretanja materijalne tačke $\vec{K}$ je vektorska veličina određena proizvod mase i brzine tačke, tj

$$\vec{K} = m\vec{v}$$



$$\vec{K} = K_x\vec{i} + K_y\vec{j} + K_z\vec{k}$$

$$K_x = mv_x = m\dot{x}$$

$$K_y = mv_y = m\dot{y}$$

$$K_z = mv_z = m\dot{z}$$

Ako je $\vec{F}$ rezultanta sila (aktivnih i reakcija veza) koje djeluju na tačku mase m, onda se osnovna jednačina dinamike

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}$$

pod pretpostavkom o nepromjenljivosti mase ($m=const$) može napisati u obliku

$$\frac{d(m\vec{v})}{dt} = \vec{F},$$

odnosno

$$\frac{d\vec{K}}{dt} = \vec{F}, \qquad (1)$$

koja, kada se projicira na ose inercijalnog Dekartovog koordinatnog sistema, daje

$$\frac{dK_x}{dt} = F_x, \quad \frac{dK_y}{dt} = F_y, \quad \frac{dK_z}{dt} = F_z \qquad (1')$$

Relacija (1) izražava diferencijalni oblik zakona o promjeni količine kretanja: Izvod po vremenu količine kretanja materijalne tačke jednak je ukupnoj sili koja na tačku djeluje.

Relacije (1') izražavaju diferencijalne oblike zakona o promjeni količine kretanja za koordinatne ose (projekcija količina kretanja).

Relacija (1) može se napisati u ekvivalentnom diferencijalnom obliku

$$d\vec{K} = d\vec{I}, \quad d\vec{I} \overset{def}{=} \vec{F}dt \qquad (2)$$

gdje je $d\vec{I} = \vec{F}dt$ elementarni impuls sile $\vec{F}$, tj. diferencijal količine kretanja tačke jednak je elementarnom impulsu sile koja na tačku djeluje.

Impuls sile $\vec{F}$ za konačni vremenski interval $[t_0, t_1]$ jednak je određenom integralu elementarnog impulsa, koji se računa u granicama od t_0 do t_1, tj.

$$\vec{I} = \int_{t_0}^{t_1} \vec{F}dt \qquad (3)$$

$$\vec{I} = I_x \vec{i} + I_y \vec{j} + I_z \vec{k}$$

gdje su: $I_x = \int_{t_0}^{t_1} F_x \, dt$, $I_y = \int_{t_0}^{t_1} F_y \, dt$, $I_z = \int_{t_0}^{t_1} F_z \, dt$ - projekcije impulsa na koordinatne ose.

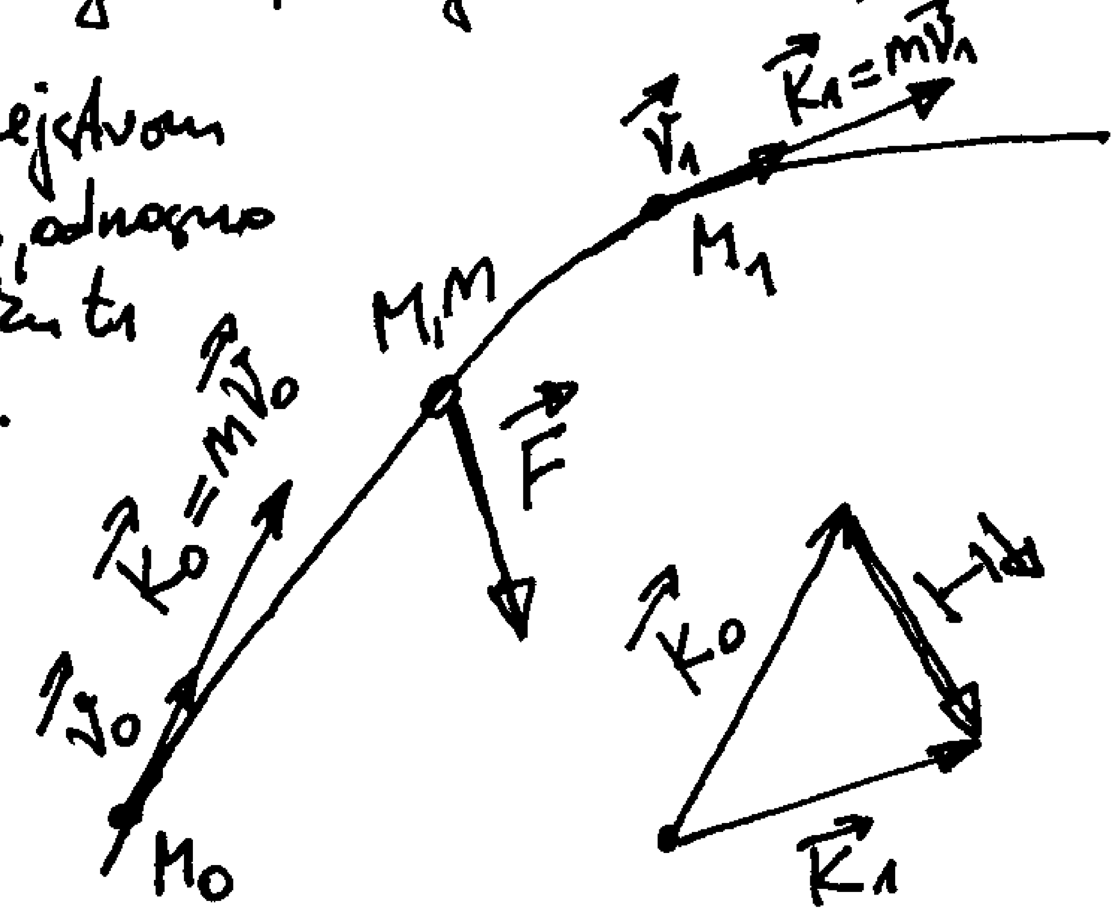
Iz relacije (3) slijedi:

1) Impuls rezultante sila $\vec{F} = \sum \vec{F}_i$ jednak je geometrijskom zbiru impulsa komponenata, tj

$$\vec{I} = \sum \vec{I}_i \,, \quad \vec{I}_i = \int_{t_0}^{t_1} \vec{F}_i \, dt$$

2) Da bi se izračunao određeni integral kojim je definisan impuls potrebno je znati silu kao funkciju vremena. Specijalno, ako je $\vec{F} = \overrightarrow{const}$, biće $\vec{I} = \vec{F}(t_1 - t_0)$.

Neka tačka mase m, krećući se pod dejstvom sile $\vec{F}$, u trenutku t_0 ima brzinu $\vec{v}_0$, odnosno količinu kretanja $\vec{K}_0 = m\vec{v}_0$, a u trenutku t_1 brzinu $\vec{v}_1$ i količinu kretanja $\vec{K}_1 = m\vec{v}_1$.



Iz (2), integraljenjem u posmatranom intervalu, dobijamo

$$\int_{t_0}^{t_1} d\vec{K} = \int_{t_0}^{t_1} \vec{F} \, dt \,,$$

pa je

$$\vec{K}_1 - \vec{K}_0 = \vec{I} \,, \qquad (4)$$

što predstavlja zakon o promjeni količine kretanja u integralnom obliku: promjena količine kretanja tačke za neki interval vremena jednaka je impulsu sile koja dejstvuje na tačku za taj isti vremenski interval.

Jednačini (4) odgovaraju tri skalarne jednačine (zakoni o promjeni projekcija količine kretanja):

$$\left.\begin{aligned} K_{1x} - K_{0x} &= I_x = \int_{t_0}^{t_1} F_x \, dt \\ K_{1y} - K_{0y} &= I_y \\ K_{1z} - K_{0z} &= I_z \end{aligned}\right\} \quad (4')$$

Iz zakona (1) direktno slijede sljedeće posledice:

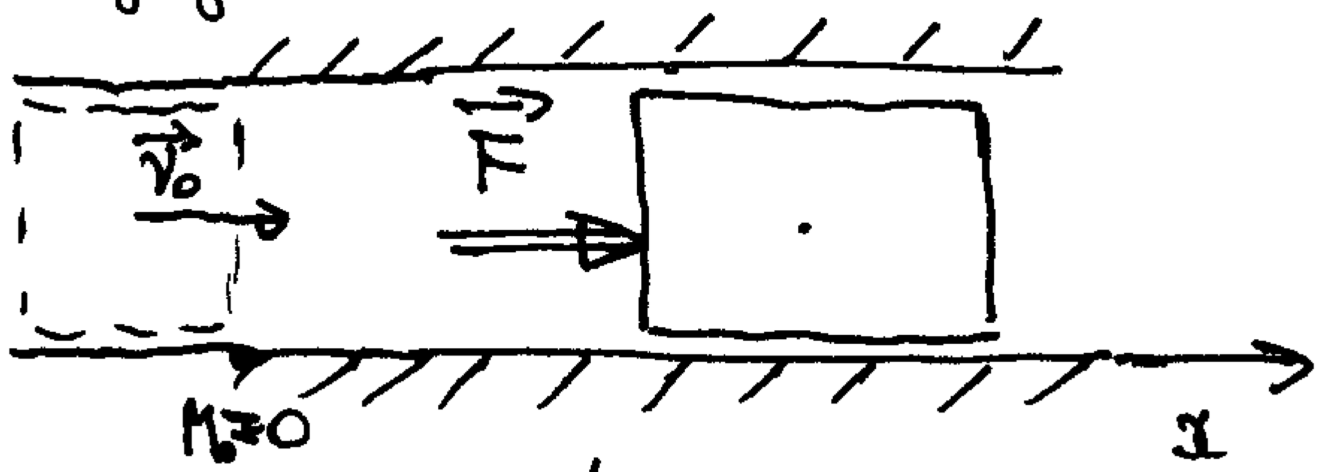
P.1 (zakon o održanju količine kretanja). Ako na materijalnu tačku ne dejstvuje sila ($\vec{F} = 0$) onda je količina kretanja konstantna u toku kretanja, tj

$$\vec{K} = \overrightarrow{const} = \vec{K}_0 \quad (\rightarrow \vec{v} = \vec{v}_0 = \overrightarrow{const})$$

P.2 (zakon o održanju projekcije količine kretanja). Ako je projekcija sile na neku nepokretnu osu jednaka nuli ($F_x = 0$) onda je projekcija količine kretanja na tu osu konstantna u toku kretanja, tj

$$K_x = const = K_{0x} \quad (\rightarrow v_x = \dot{x} = const = \dot{x}_0)$$

Pz. Rezultanta svih sila koje djeluju na klip mijenja se u toku nekog vremenskog intervala po zakonu $\vec{F} = 0{,}4G(1-kt)\vec{i}$, G – težina klipa, $k = 1{,}6\ s^{-1}$, t u sekundama. Odrediti brzinu klipa u trenutku $t_1 = 0{,}5\ s$, ako je u trenutku $t_0 = 0$ njegova brzina $v_0 = 0{,}2\ m/s$.



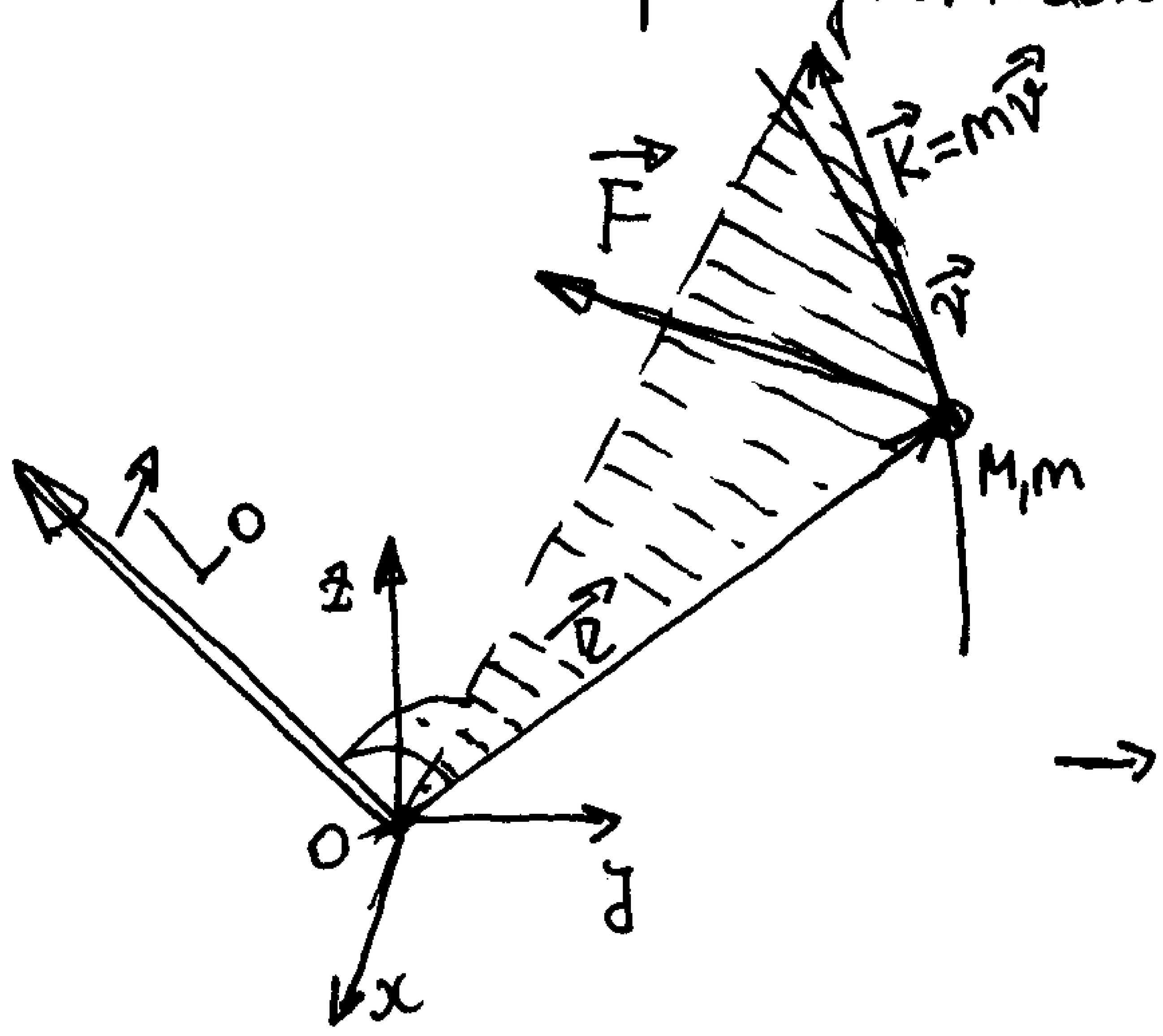
$$K_{1x} - K_{0x} = I_x, \quad I_x = \int_0^{t_1} F_x\, dt$$

$$K_{1x} = mv_{1x}, \quad K_{0x} = mv_{0x}$$

$$I_x = 0{,}4G\int_0^{t_1}(1-kt)dt = 0{,}4G\,t_1\left(1-\frac{k}{2}t_1\right); \quad G = mg, \; v_{0x} = v_0$$

$$\rightarrow v_{1x} = v_0 + 0{,}4g\,t_1\left(1-\frac{k}{2}t_1\right) = 1{,}4\ m/s$$

3.2 Zakon o promjeni momenta količine kretanja



$\vec{L}_0 \overset{def}{=} \vec{r} \times \vec{K} = \vec{r} \times m\vec{v}$ – moment količine kretanja mat. tačke za nepokretnu tačku (pol) O.

$$\vec{L}_0 = L_{0x}\vec{i} + L_{0y}\vec{j} + L_{0z}\vec{k} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ mv_x & mv_y & mv_z \end{vmatrix}$$

$$\rightarrow L_{0x} = L_x = m(yv_z - zv_y) = m(y\dot{z} - z\dot{y})$$

$$L_{0y} = L_y = m(zv_x - xv_z) = m(z\dot{x} - x\dot{z})$$

$$L_{0z} = L_z = m(xv_y - yv_x) = m(x\dot{y} - y\dot{x})$$

Projekcije L_x, L_y i L_z vektora $\vec{L}_0$ su momenti količine kretanja (kinetički momenti) za ose x, y i z, respektivno ($L_x = M_x^{m\vec{v}}$, $L_y = M_y^{m\vec{v}}$, $L_z = M_z^{m\vec{v}}$)

$$\frac{d\vec{L}_0}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times m\vec{v}) = \frac{d\vec{r}}{dt} \times m\vec{v} + \vec{r} \times m\frac{d\vec{v}}{dt} = \underbrace{\cancel{\vec{v} \times m\vec{v}}}_{0} + \vec{r} \times m\vec{a}$$

$$\frac{d\vec{L}_0}{dt} = \vec{r} \times m\vec{a} \overset{m\vec{a}=\vec{F}}{=\!=\!=} \vec{r} \times \vec{F}, \quad \vec{r} \times \vec{F} = \vec{M}_0^{\vec{F}}$$

$$\rightarrow \frac{d\vec{L}_0}{dt} = \vec{M}_0^{\vec{F}} \qquad (1)$$

Ova jednačina izražava zakon o promjeni momenta količine kretanja: Izvod po vremenu momenta količine kretanja za nepokretnu tačku O jednak je momentu sile koja djeluje na tačku, računatom za istu tačku O.

$$(1) \rightarrow \frac{dL_x}{dt} = M_x^{\vec{F}}, \quad \frac{dL_y}{dt} = M_y^{\vec{F}}, \quad \frac{dL_z}{dt} = M_z^{\vec{F}} \qquad (1')$$

Svaka od skalarnih jednačina (1') predstavlja zakon o promjeni kinetičkog momenta za odgovarajuću osu: Izvod po vremenu momenta količine kretanja tačke za neku nepokretnu osu jednak je momentu sile koja djeluje na tačku za istu osu.

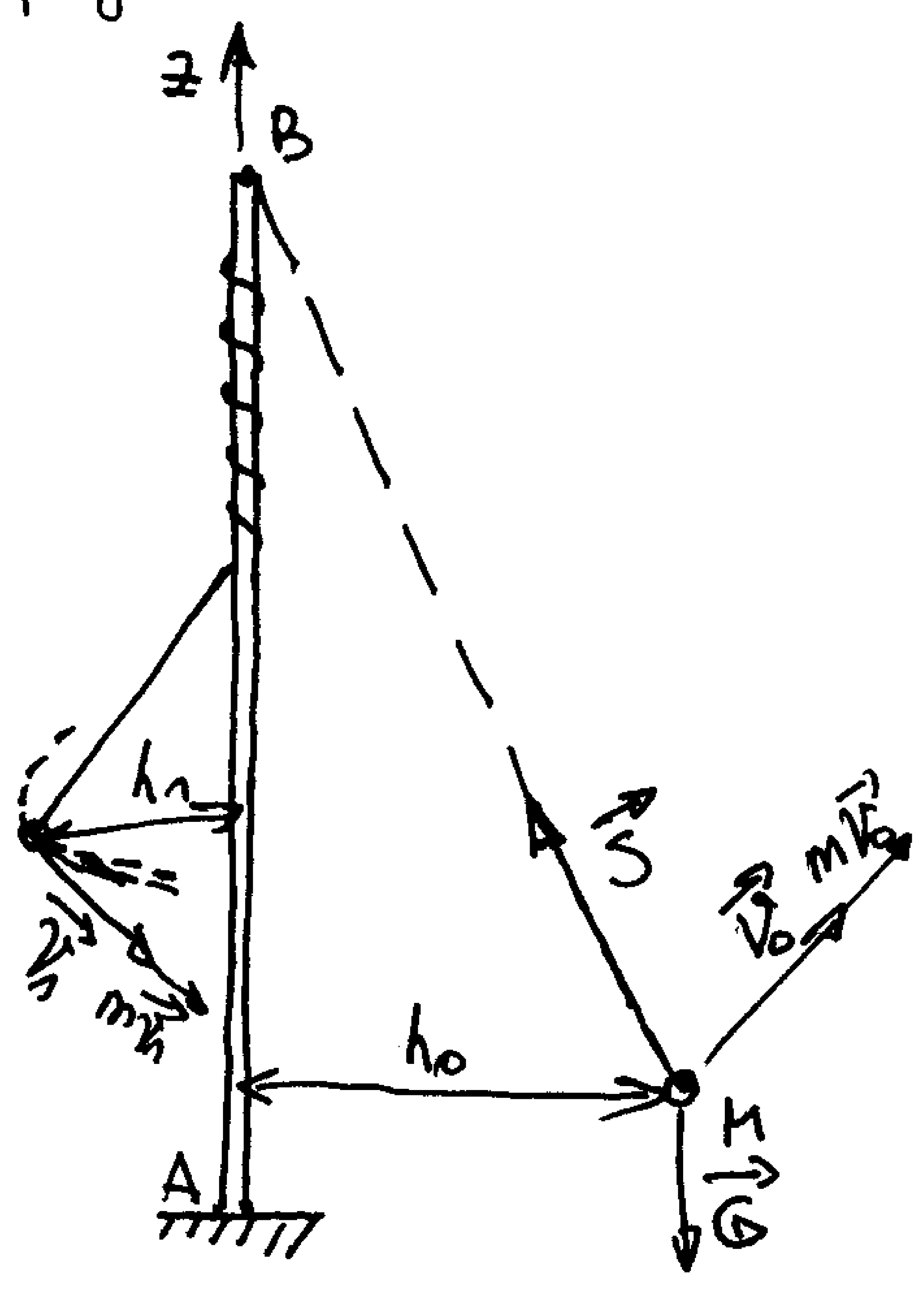
P. 1 (zakon o održanju momenta količine kretanja)

Ako je $\vec{M}_O^{\vec{F}} = 0 \xrightarrow{(1)} \vec{L}_O = \overrightarrow{const}$

P. 2 (zakon o održanju momenta količine kretanja za osu)

Ako je $M_x^{\vec{F}} = 0 \xrightarrow{(1')_1} L_x = const$

Pr. Kuglica M privezana za konac BM kreće se tako da se konac namotava na tanki vertikalni štap. Početno rastojanje kuglice od štapa jednako je h_0, a početna brzina je v_0 i upravna je na ravan ABM. Zanemarujući debljinu štapa, odrediti brzinu v_1 kuglice u trenutku kada je njeno rastojanje od štapa jednako h_1.



$$\vec{F} = \vec{G} + \vec{S}$$

$$M_z^{\vec{F}} = \underbrace{\cancel{M_z^{\vec{G}}}}_{0} + \underbrace{\cancel{M_z^{\vec{S}}}}_{0} = 0$$

$$\frac{dL_z}{dt} = M_z^{\vec{F}} = 0 \rightarrow L_z = const$$

$$\rightarrow L_{z0} = L_{z1}$$

$$\begin{array}{cc} \| & \| \\ M_z^{m\vec{v}_0} & M_z^{m\vec{v}_1} \\ \| & \end{array}$$

$$m v_0 \cdot h_0 = m v_1 h_1$$

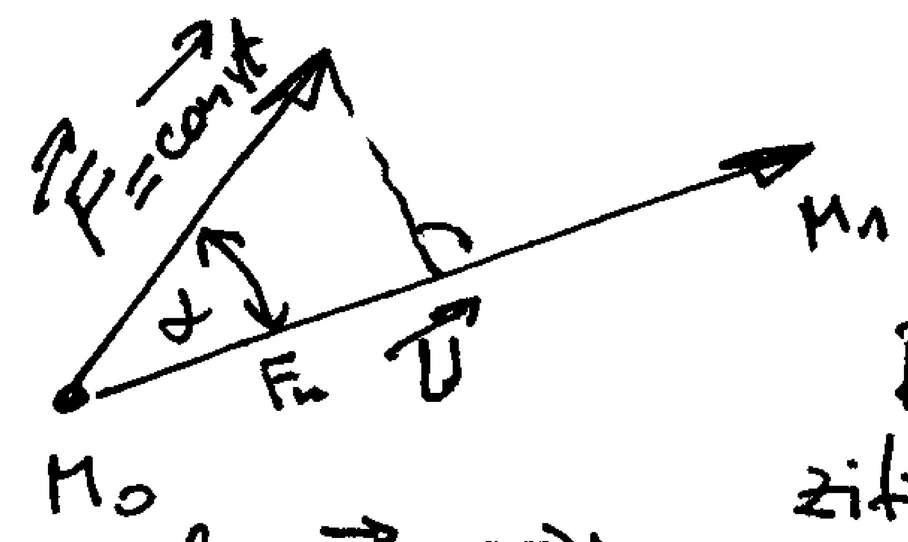
$$v_1 = \frac{h_0}{h_1} v_0$$

3.3 Zakon o promjeni kinetičke energije

3.3.1 Rad sile. Snaga.

a) Rad konstantne sile na pravolinijskom pomjeranju

Rad konstantne sile $\vec{F}$ na pravolinijskom pomjeranju njene napadne tačke definisan je skalarnim proizvodom sile i vektora pomjeranja napadne tačke, tj



$\vec{F} = \overrightarrow{const}$

$\vec{u} = \overrightarrow{M_0M_1}$

$$A \stackrel{def.}{=} \vec{F}\cdot\vec{u}, \qquad (1)$$

ili $A = Fu\cos\alpha = F_u u$

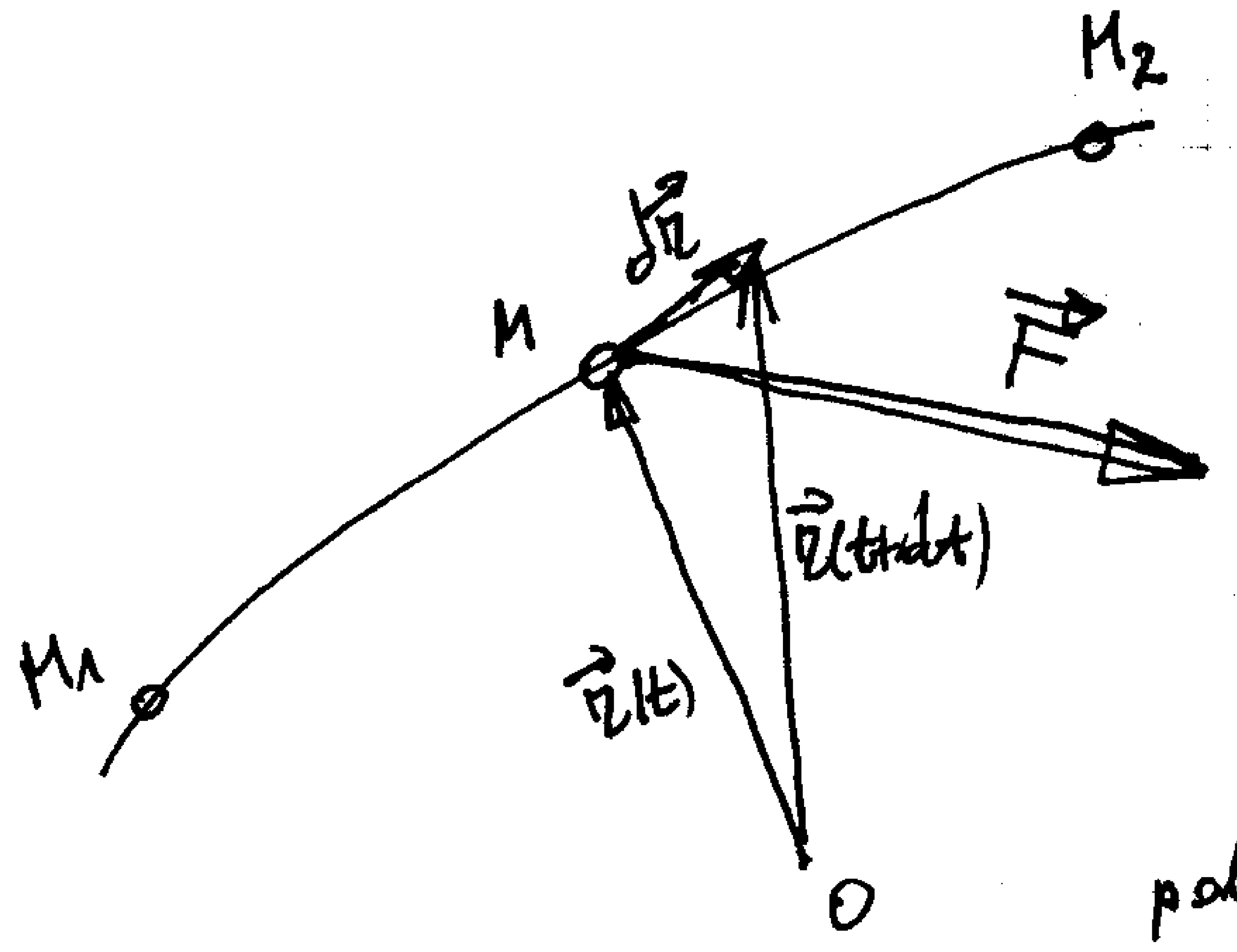
Rad je, dakle, <u>skalarna</u> veličina koja može biti pozitivna (α – oštar ugao), negativna (α – tup ugao) ili jednaka nuli ($\vec{F} \perp \vec{u}$).

$$[A] = [F]\cdot[L]$$

1 jedinica rada = N·m (1 Džul)

~~Rad~~ Jedan Džul (J) je rad koji izvrši sila od 1 N na pomjeranju dužine 1 m, u pravcu dejstva sile.

b) Rad promjenljive sile na krivolinijskom pomjeranju



Za vrijeme dt mat. tačka, na koju djeluje promjenljiva sila $\vec{F}$, izvrši elementarno (infinitezimalno) pomjeranje $d\vec{r}$. Na tom pomjeranju može se smatrati da je sila konstantna pa je, u skladu sa (1), rad sile na elementarnom pomjeranju

$$\delta A = \vec{F}\cdot d\vec{r} \qquad (2)$$

i on se zove <u>elementarni rad</u>.

Ako tačka izvrši pomjeranje iz položaja M_1 u položaj M_2, tada sila $\vec{F}$ vrši konačan rad na tom pomjeranju, koji je jednak krivolinijskom integralu od elementarnog rada, računatom duž krive koju opisuje napadna tačka sile, tj

$$A_{(M_1,M_2)} = \int_{M_1}^{M_2} \vec{F}\cdot d\vec{r} \qquad (3)$$

Iz (3) i osobine skalarnog proizvoda slijedi da je rad rezultante $\vec{F} = \sum \vec{F}_i$ jednak zbiru radova komponenata:

$$A_{(M_1,M_2)}(\vec{F}) = \sum A_{(M_1,M_2)}(\vec{F}_i)$$

Izraze (2) i (3), zavisno od izbora koordinatnog sistema, možemo napisati u odgovarajućim eksplicitnim oblicima.

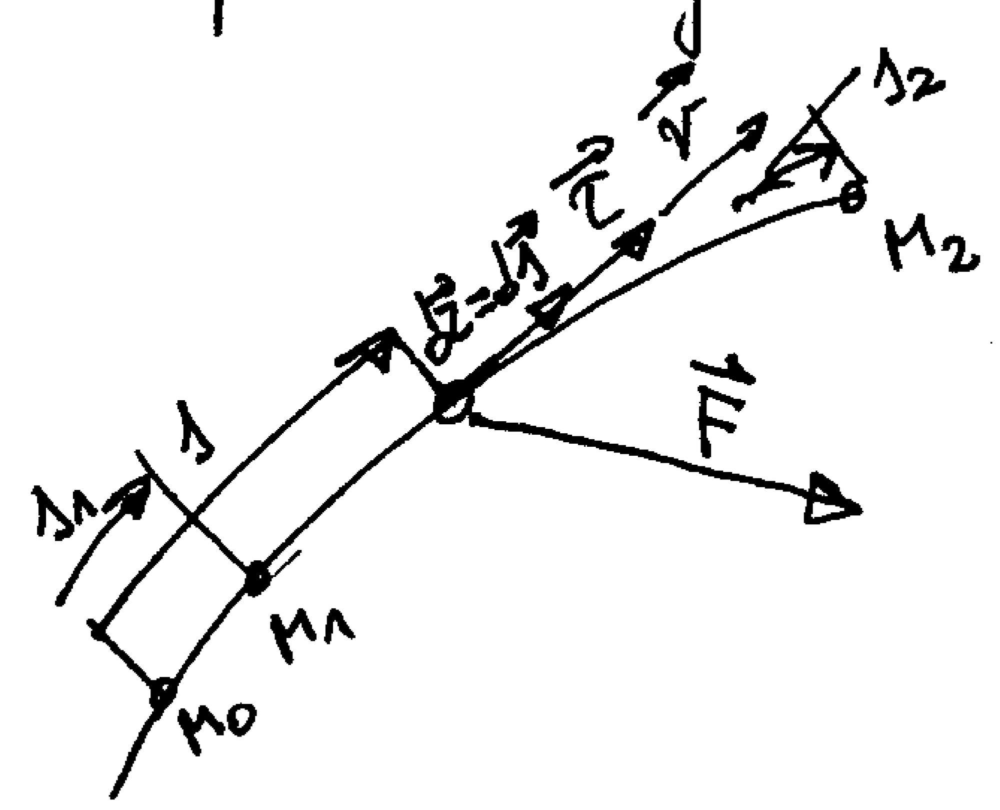
1) Dekartov koordinatni sistem

$$d\vec{r} = dx\,\vec{i} + dy\,\vec{j} + dz\,\vec{k}, \quad \vec{F} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k}$$

$$dA = \vec{F}\cdot d\vec{r} = F_x\,dx + F_y\,dy + F_z\,dz \quad (4)$$

$$A_{(M_1,M_2)} = \int_{M_1}^{M_2} (F_x\,dx + F_y\,dy + F_z\,dz) \quad (5)$$

2) prirodni trijedar

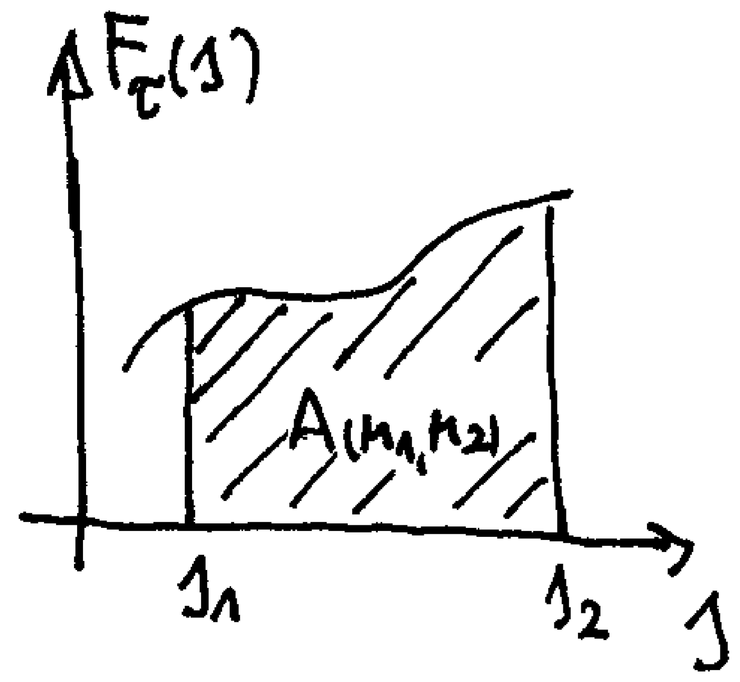


$$d\vec{r} = d\vec{s} = ds\,\vec{\tau}$$

$$\vec{F} = F_\tau\vec{\tau} + F_\nu\vec{\nu} + F_b\vec{b}$$

$$dA = \vec{F}\cdot d\vec{r} = F_\tau\,ds \quad (6)$$

$$A_{(M_1,M_2)} = \int_{s_1}^{s_2} F_\tau\,ds \quad (7)$$

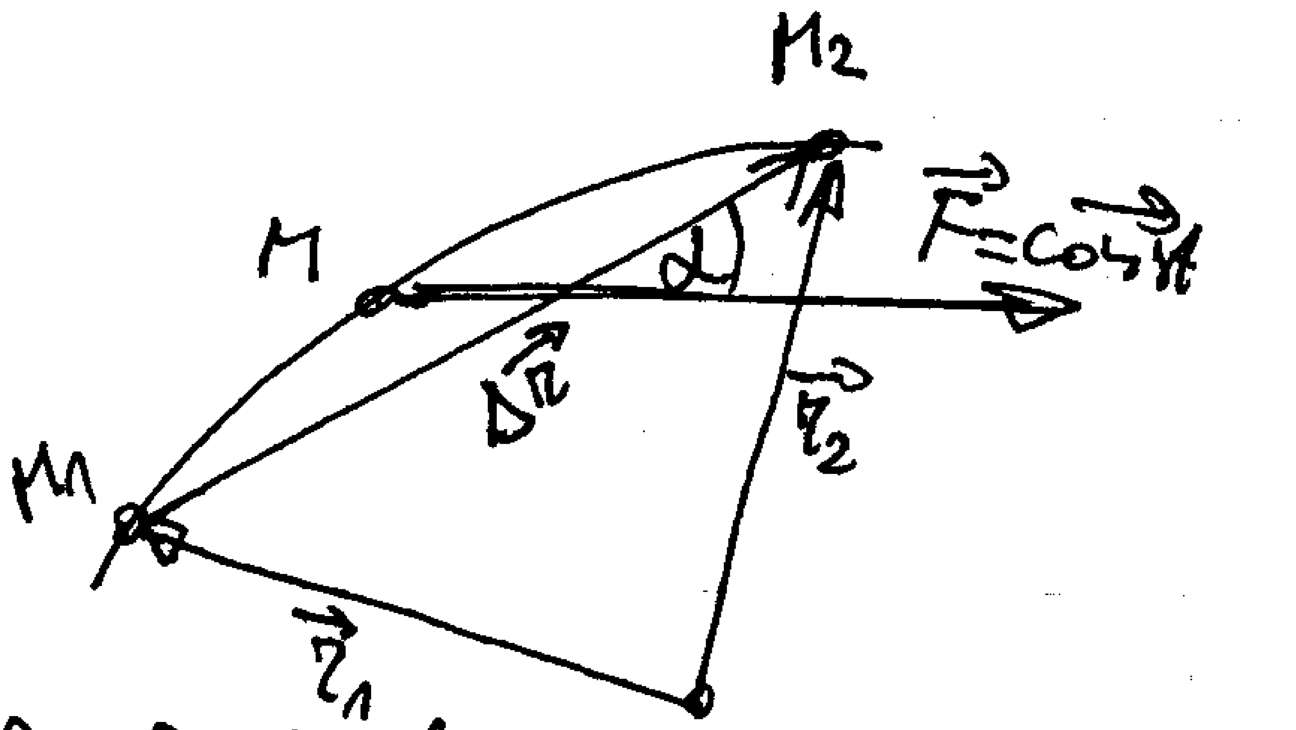


Rad se može izračunati unaprijed, ne poznavajući zakon kretanja tačke, samo kad je sila konstantna ili kada je funkcija položaja. Ako je poznat zakon kretanja tačke ($x=x(t)$, $y=y(t)$, $z=z(t)$), onda se krivolinijski integral (5) svodi na određeni, imajući u vidu da je $dx=\dot{x}\,dt$, $dy=\dot{y}\,dt$, $dz=\dot{z}\,dt$, tj.

$$A_{(M_1,M_2)} = \int_{t_1}^{t_2} (F_x\dot{x} + F_y\dot{y} + F_z\dot{z})\,dt$$

gdje su t_1 i t_2 trenuci prolaska materijalne tačke kroz položaje M_1 i M_2.

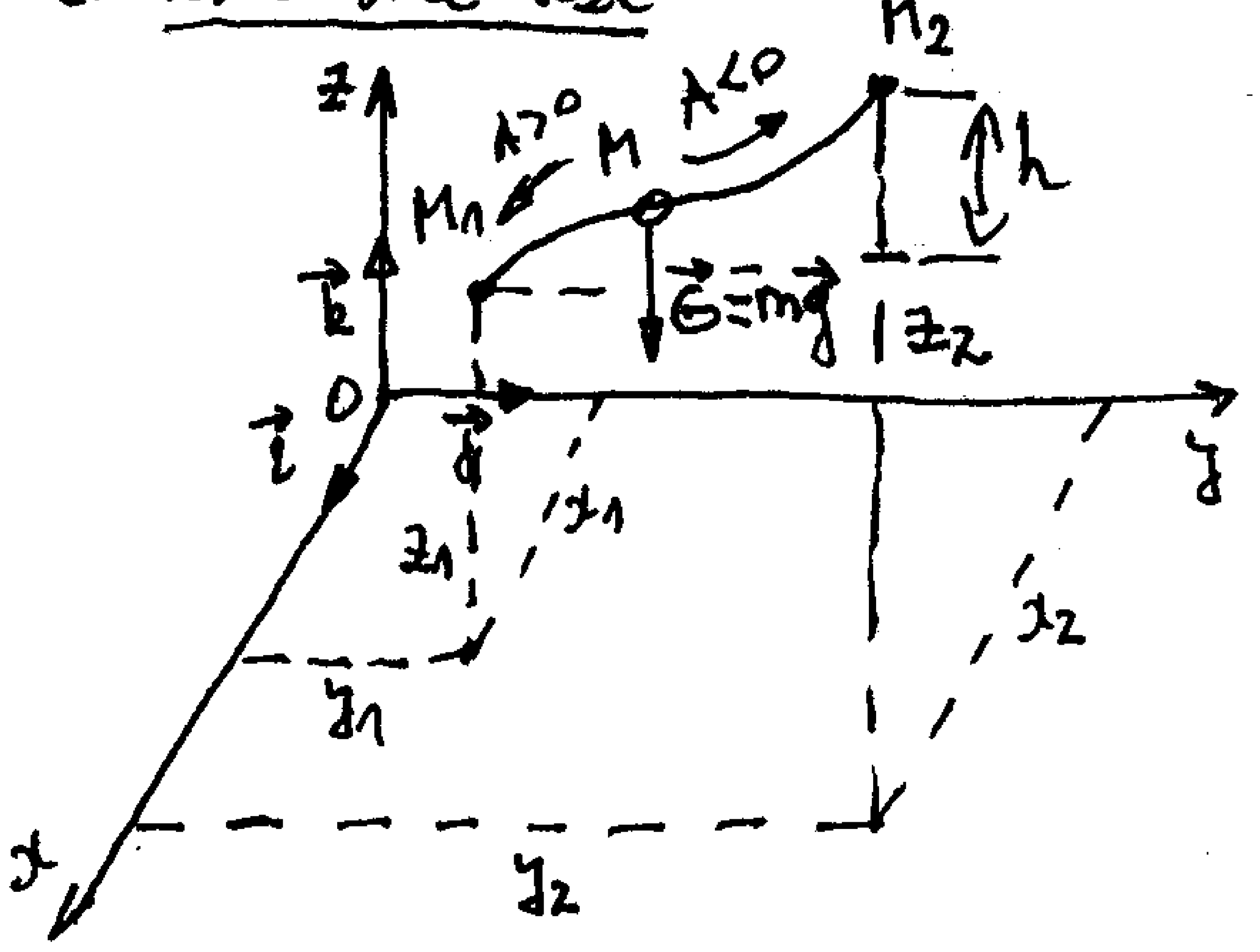
Na osnovu (3) lako je odrediti rad konstantne sile. Biće



$$A_{(M_1,M_2)} = \int_{M_1}^{M_2} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \vec{F}\cdot\int_{M_1}^{M_2} d\vec{r} = \vec{F}\cdot(\vec{r}_2-\vec{r}_1)$$

$$= \vec{F}\cdot\underbrace{\Delta\vec{r}}_{\overrightarrow{M_1M_2}} = F\,\overline{M_1M_2}\cos\alpha$$

Pr. <u>Rad sile teže</u>.



$$\vec{G} = m\vec{g} = -mg\vec{k} = const$$

$$\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2-x_1)\vec{i} + (y_2-y_1)\vec{j} + (z_2-z_1)\vec{k}$$

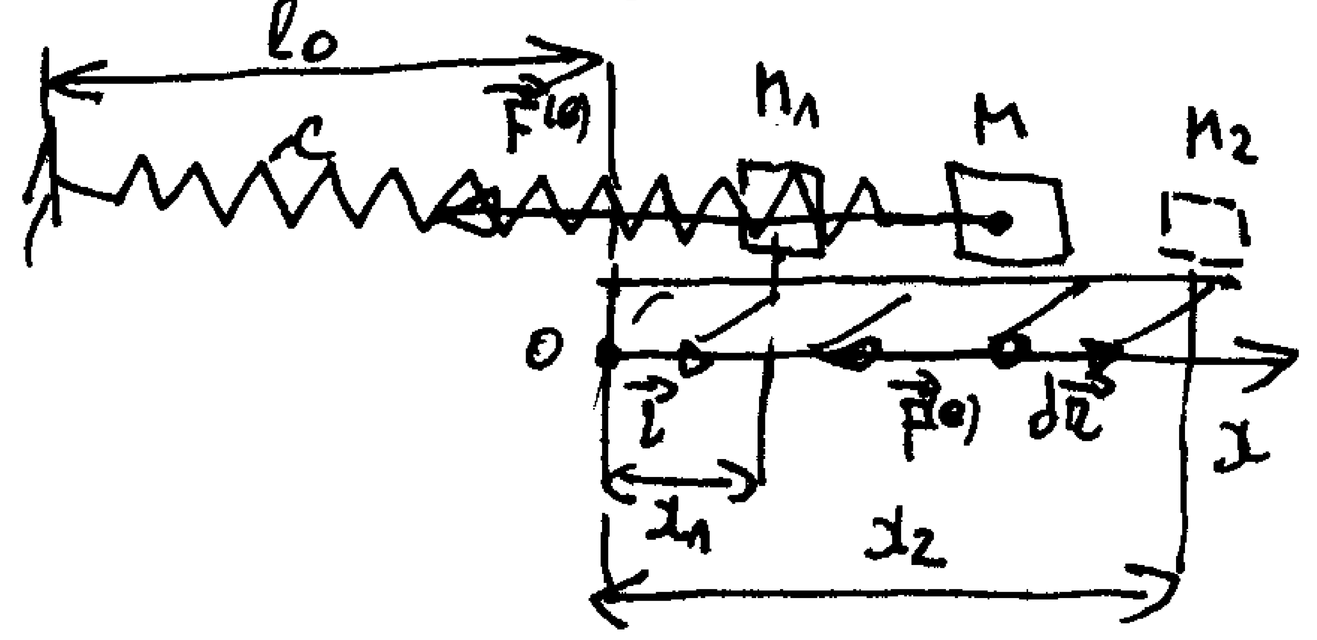
$$A_{(M_1,M_2)} = \vec{G}\cdot\overrightarrow{M_1M_2} = -mg(z_2-z_1)$$

$A_{(M_1,M_2)} = \pm mgh$, h - visinska razlika između krajnjeg i početnog položaja

"−" ako je početni položaj ispod krajnjeg

"+" — || — iznad — || —

Pr. Rad elastične sile



$$\vec{F}^{(e)} = -c x \vec{i}$$

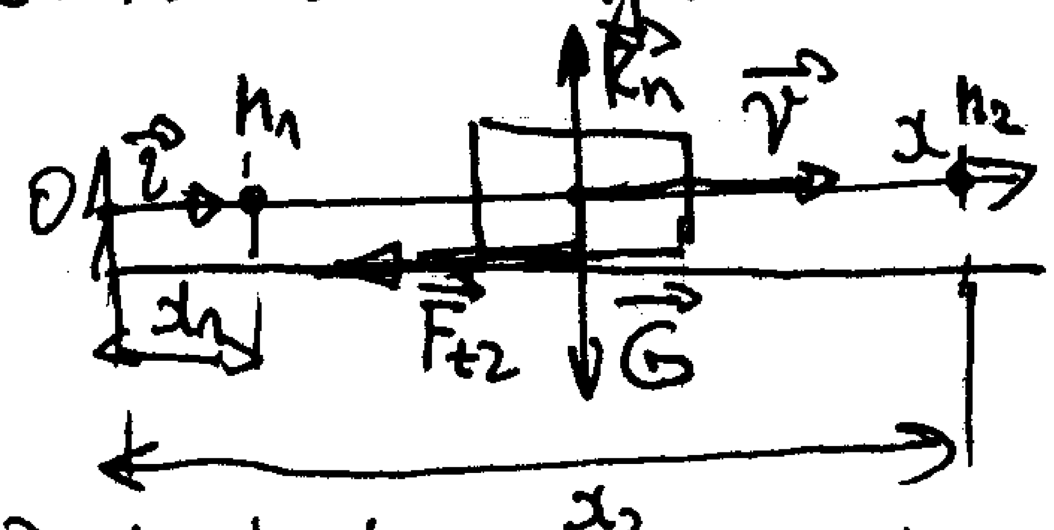
$$d\vec{r} = dx\,\vec{i}$$

$$\delta A = \vec{F}^{(e)} \cdot d\vec{r} = -c x\, dx$$

$$A_{(M_1,M_2)} = \int_{M_1}^{M_2} \vec{F}^{(e)} d\vec{r} = \int_{x_1}^{x_2} -c x\, dx$$

$$A_{(M_1,M_2)} = \frac{1}{2} c \left(x_1^2 - x_2^2\right)$$

Pr. Rad sile trenja



$$\delta A = \vec{F}_{tr} \cdot d\vec{r} = -F_{tr}\, dx$$

$$F_{tr} = \mu R_n = \mu G$$

$$A_{(M_1,M_2)} = \int_{x_1}^{x_2} -\mu G\, dx = -\mu G (x_2 - x_1) < 0$$

Rad sile trenja je negativan!

c) Snaga

Snaga je fizička veličina koja karakteriše brzinu izvršenja rada sile i definiše se na sljedeći način

$$P \overset{def}{=} \frac{\delta A}{dt} = \vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v} \qquad (8)$$

tj. snaga je skalarni proizvod sile koja dejstvuje na materijalnu tačku i brzine te tačke.

U Dekartovom koordinatnom sistemu je

$$P = F_x \dot{x} + F_y \dot{y} + F_z \dot{z}, \qquad (9)$$

a u prirodnom

$$P = F_\tau \cdot v_\tau = F_\tau \dot{s} \qquad (10)$$

$$[P] = [F][v]$$

$$1 \text{ jedinica snage} = \frac{Nm}{s} = \frac{J}{s} \quad (\text{Vat}(W))$$

$W = \frac{J}{s}$ – snaga sile koja izvrši rad od 1 džula za jednu sekundu.

Ako se rad vrši ravnomjerno (jednoliko) onda je snaga

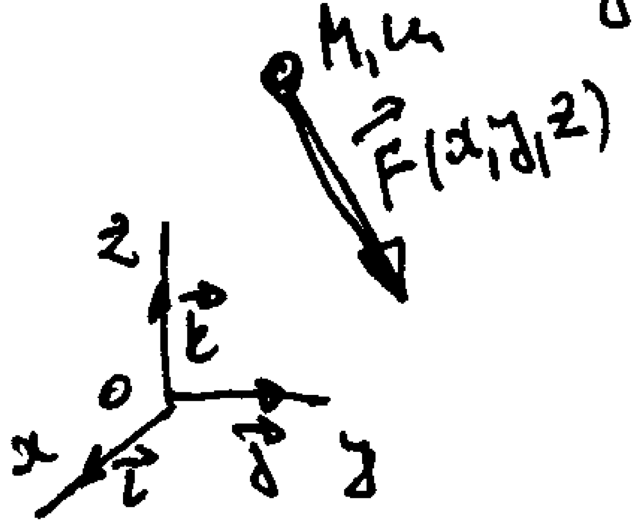
$$P = \frac{A}{T}, \quad T \text{ – vrijeme u toku koga sila vrši rad}$$

Tada se rad koji vrši mašina može da izrazi proizvodom njene snage i vremena rada mašine. Tako se došlo do jedinice za rad koja se zove kilovat-čas

$$1\,kWh = 1000\,\frac{J}{s} \cdot 3600\,s = 3{,}6 \cdot 10^6\,J$$

3.3.2 Konzervativne sile

Oblast prostora u čijoj svakoj tački, na u njoj smještenu materijalnu tačku, dejstvuje sila jednoznačno određena u svakom trenutku, naziva se polje sile. U tom slučaju sila zavisi samo od položaja (stacionarno polje) i, eventualno, još od vremena (nestacionarno polje).



$$\vec{F} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k}$$

Sila $\vec{F}$ koja zavisi od položaja je konzervativna, odnosno polje sile je konzervativno, ako se projekcije sile na ose Dekartovog koordinatnog sistema mogu izraziti kao negativni parcijalni izvodi jedne skalarne funkcije $E_p(x,y,z)$ po odgovarajućim koordinatama:

$$F_x = -\frac{\partial E_p}{\partial x}, \quad F_y = -\frac{\partial E_p}{\partial y}, \quad F_z = -\frac{\partial E_p}{\partial z}$$

Skalarna funkcija E_p se zove potencijalna energija.
Drugim riječima, sila je konzervativna ako se može napisati kao negativni gradijent potencijalne energije, tj

$$\vec{F} = -\operatorname{grad} E_p = -\left(\frac{\partial E_p}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial E_p}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial E_p}{\partial z}\vec{k}\right)$$

ili

$$\vec{F} = -\nabla E_p, \quad \nabla \stackrel{\text{def.}}{=} \vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z}$$ – Hamiltonov ("nabla) operator

Sljedeće tvrđenje daje kriterijum konzervativnosti sile.

T. Sila $\vec{F}(x,y,z)$ je konzervativna ako i samo ako su ispunjeni sljedeći uslovi:

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x}, \quad \frac{\partial F_x}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial x}, \quad \frac{\partial F_y}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial y} \qquad (11)$$

Uslovi (11) mogu se kraće izraziti jednim vektorskim uslovom

$$\operatorname{rot}\vec{F} = \nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = 0, \qquad (12)$$

tj. sila je konzervativna ako i samo ako je rotor te sile jednak nuli.

<u>Rad konzervativne sile</u>

$$\delta A = \vec{F}\cdot d\vec{r} = -\operatorname{grad} E_p \cdot d\vec{r} = -\overbrace{\left(\frac{\partial E_p}{\partial x}dx + \frac{\partial E_p}{\partial y}dy + \frac{\partial E_p}{\partial z}dz\right)}^{= dE_p}$$

$$\rightarrow \quad \delta A = -dE_p \qquad (13)$$

Dakle, elementarni rad konzervativne sile jednak je negativnom diferencijalu potencijalne energije te sile.

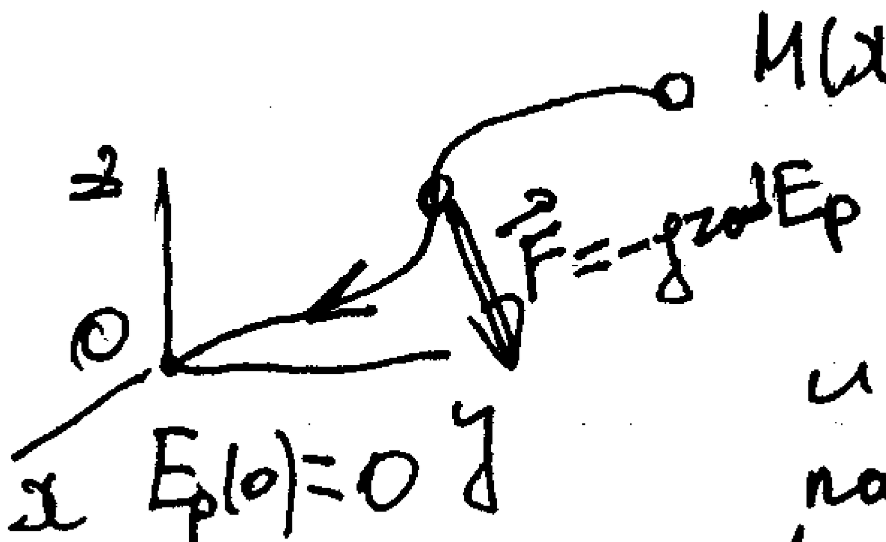
T. Rad konzervativne sile na konačnom pomjeranju ne zavisi od oblika putanje napadne tačke, već samo od početnog i krajnjeg položaja.

Zaista,

$$A_{(M_1,M_2)} = \int_{M_1}^{M_2} \vec{F}\cdot d\vec{r} \overset{(13)}{=} -\int_{M_1}^{M_2} dE_p = \boxed{E_p(M_1)-E_p(M_2)} \qquad (14)$$

pa je rad konzervativne sile određen razlikom između potencijalne energije u početnom i krajnjem položaju.

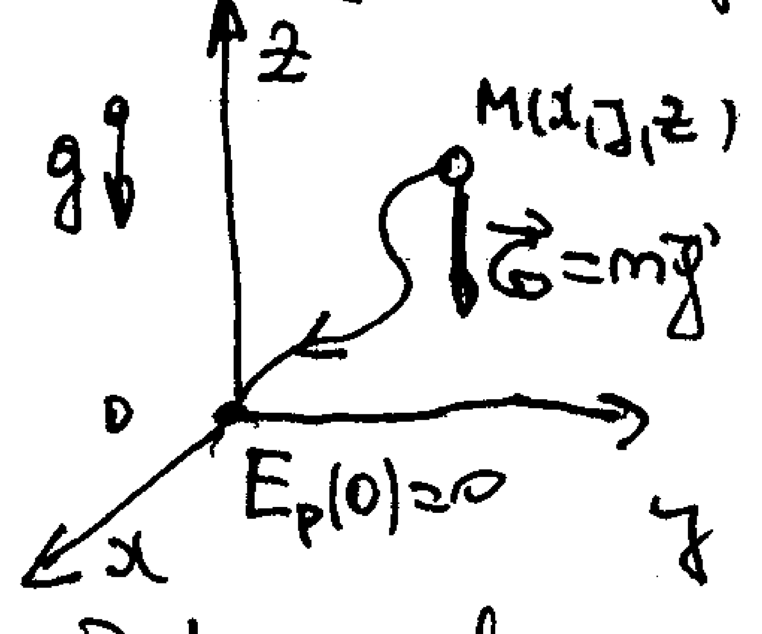
Iz definicije konzervativne sile slijedi da potencijalne energije koje se razlikuju za konstantu određuju istu silu. To znači da je potencijalna energija određena tačnošću do aditivne konstante. Obično se ova konstanta određuje iz uslova da je E_p jednako nuli u nekoj tački, izabranoj po slobodnoj volji. Uzimimo da je u koordinatnom početku O, $E_p=0$, i izračunajmo rad konzervativne sile ~~iz pozna~~ pomjeranju iz proizvoljnog (tekućeg) položaja $M(x,y,z)$ u nulti položaj potencijalne energije.



$$A_{(M,0)} \overset{(14)}{=} E_p(M) - \cancel{E_p(0)}^{\,0}$$

$\rightarrow$ $E_p(M) = A_{(M,0)}$ – potencijalna energija u proizvoljnom položaju mat. tačke jednaka je radu na pomjeranju tačke iz tog položaja u položaj nulte potencijalne energije.

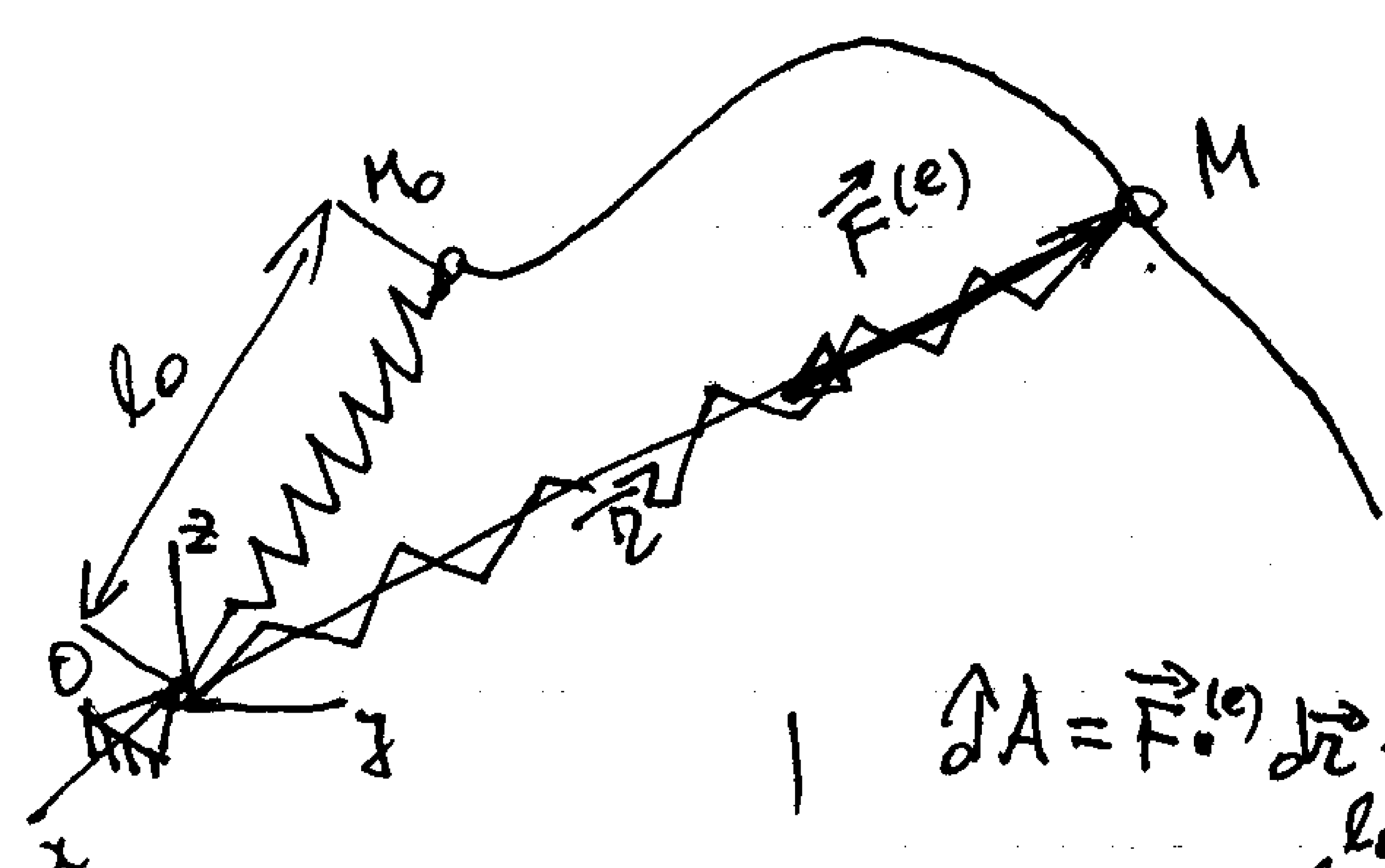
Pr. Potencijalna energija homogenog polja sile teže



$$E_p = A_{(M,0)}(\vec{G}) = Gz, \quad G = mg$$

$$E_p = mgz$$

Pr. Potencijalna energija elastične sile opruge.



$$\vec{F}^{(e)} = -c(r-l_0)\frac{\vec{r}}{r}, \quad r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

Ova sila zadovoljava uslove (11), tj. ona je konzervativna. $E_p(M_0)=0$ (uzima se da je $E_p=0$ u položaju u kojem je opruga nedeformisana)

$$E_p(M) = A_{(M,M_0)} = \int_M^{M_0} dA$$

$$dA = \vec{F}^{(e)}\cdot d\vec{r} = -c(r-l_0)\frac{\vec{r}\cdot d\vec{r}}{r} = -c(r-l_0)\,dr$$

$$\boxed{\begin{aligned}\vec{r}\cdot d\vec{r} &= \tfrac{1}{2}d(\vec{r}\cdot\vec{r})\\ &= \tfrac{1}{2}d(r^2) = r\,dr\end{aligned}}$$

$$E_p = -c\int_r^{l_0}(r-l_0)\,dr = \frac{1}{2}c(r-l_0)^2, \quad r-l_0=\Delta \text{ – deformacija opruge}$$

$$\boxed{E_p = \frac{1}{2}c\Delta^2}$$

3.3.3 Zakon o promjeni kinetičke energije tačke

Kinetička energija materijalne tačke mase m koja se kreće brzinom $\vec{v}$ je skalarna veličina (mjera kretanja), definisana izrazom

$$E_k \stackrel{def}{=} \frac{m}{2}\,\vec{v}\cdot\vec{v} = \frac{1}{2} m v^2 \qquad (1)$$

Ako osnovnu jednačinu dinamike tačke $m\vec{a} = \vec{F}$ pomnožimo skalarno sa vektorom elementarnog pomjeranja $d\vec{r} = \vec{v}\,dt$, imajući u vidu da je $\vec{a} = d\vec{v}/dt$, dobijamo

$$m\,d\vec{v}\cdot\vec{v} = \vec{F}\cdot d\vec{r} \qquad (2)$$

Pošto je $m\,d\vec{v}\cdot\vec{v} = m\frac{1}{2}d(\vec{v}\cdot\vec{v}) = d(\frac{1}{2}mv^2) = dE_k$ i $\delta A = \vec{F}\cdot d\vec{r}$ iz (2) dobijamo izraz

$$\boxed{dE_k = \delta A} \qquad (3)$$

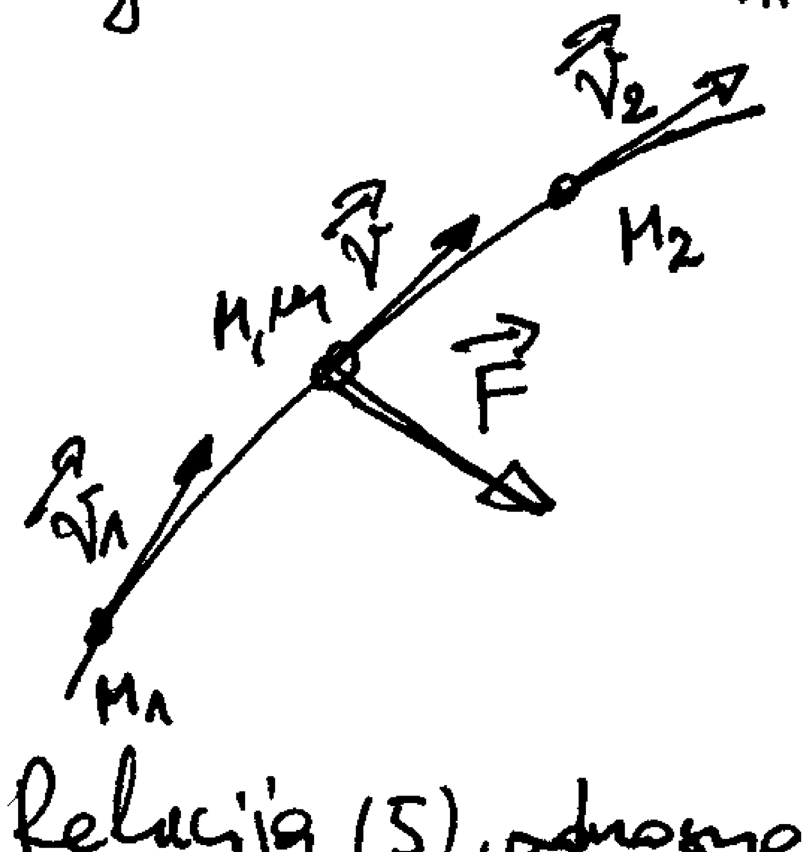
koji predstavlja diferencijalni oblik zakona o promjeni kinetičke energije materijalne tačke: Diferencijal kinetičke energije materijalne tačke jednak je elementarnom radu sile (rezultante svih sila) koja djeluje na tačku.

Dijeljenjem lijeve i desne strane u (3) sa dt dobijamo alternativni oblik

$$\frac{dE_k}{dt} = P, \qquad (4)$$

što znači da je izvod kinetičke energije po vremenu jednak snazi sile koja na tačku djeluje.

Integraleći jednačinu (3) između dva konačno različita položaja M_1 i M_2 u kojima su brzine $\vec{v}_1$ i $\vec{v}_2$, dobijamo



$$\int_{M_1}^{M_2} dE_k = \int_{M_1}^{M_2} \delta A$$

$$\rightarrow \boxed{E_{k2} - E_{k1} = A_{(M_1,M_2)}} \qquad (5)$$

odnosno

$$m\frac{v_2^2}{2} - m\frac{v_1^2}{2} = A_{(M_1,M_2)} \qquad (5')$$

Relacija (5), odnosno (5'), izražava zakon o promjeni kinetičke energije tačke u konačnom (integralnom) obliku: Promjena kinetičke energije materijalne tačke, na nekom njenom pomjeranju, jednaka je radu sile, koja djeluje na tačku, na tom pomjeranju.

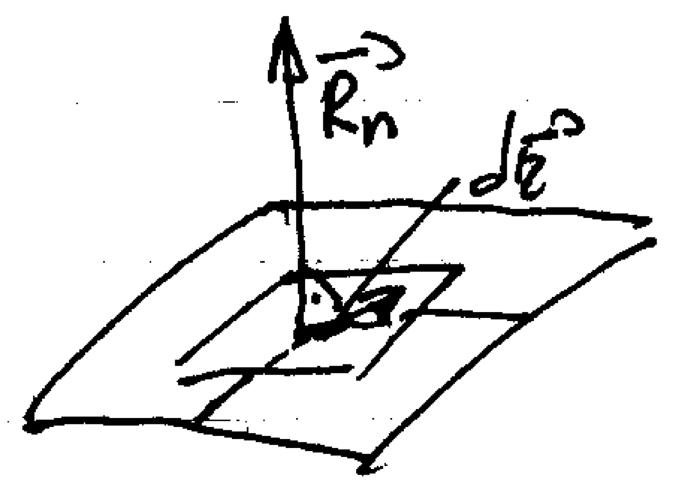
Zakon u oblicima (3) i (5) važi kako za slobodnu, tako i za neslobodnu tačku. U slučaju neslobodnog kretanja pod silom $\vec{F}$ podrazumijevamo rezultantu aktivnih sila i reakcija veza, tj

$$\vec{F} = \vec{F}^a_R + \vec{R}, \quad \vec{F}^a_R = \sum \vec{F}^a_i$$

pa je $\delta A = \delta A(\vec{F}^a_R) + \delta A(\vec{R})$, $\delta A(\vec{F}^a_R) = \sum \delta A(\vec{F}^a_i)$

Pošto je $\vec{R} = \vec{R}_n + \vec{F}_{tr}$, to je elementarni rad reakcije veze

$$\hat{d}A(\vec{R}) = \hat{d}A(\vec{R}_n) + \hat{d}A(\vec{F}_{tr})$$



Ako je veza stacionarna (nepokretna) uvijek je $\vec{R}_n \perp d\vec{r}$ pa je $\hat{d}A(\vec{R}_n) = 0$, tj. rad normalne komponente reakcije veze je jednak nuli (ona ne vrši rad).

Ako je veza idealna ($\vec{F}_{tr} = 0$), onda je $\vec{R} = \vec{R}_n$ i, dakle, $\hat{d}A(\vec{R}) = 0$

Prema tome, ako kretanje mat. tačke ograničavaju idealne stacionarne veze, onda u desnim stranama jed. (3) i (5) figuriše samo rad aktivnih sila.

Pretpostavimo da su sile koje djeluju na materijalnu tačku a koje vrše rad konzervativne. Tada jednačina (3) postaje

$$dE_k = -dE_p,$$

odnosno

$$d(E_k + E_p) = 0,$$

odakle zaključujemo da je

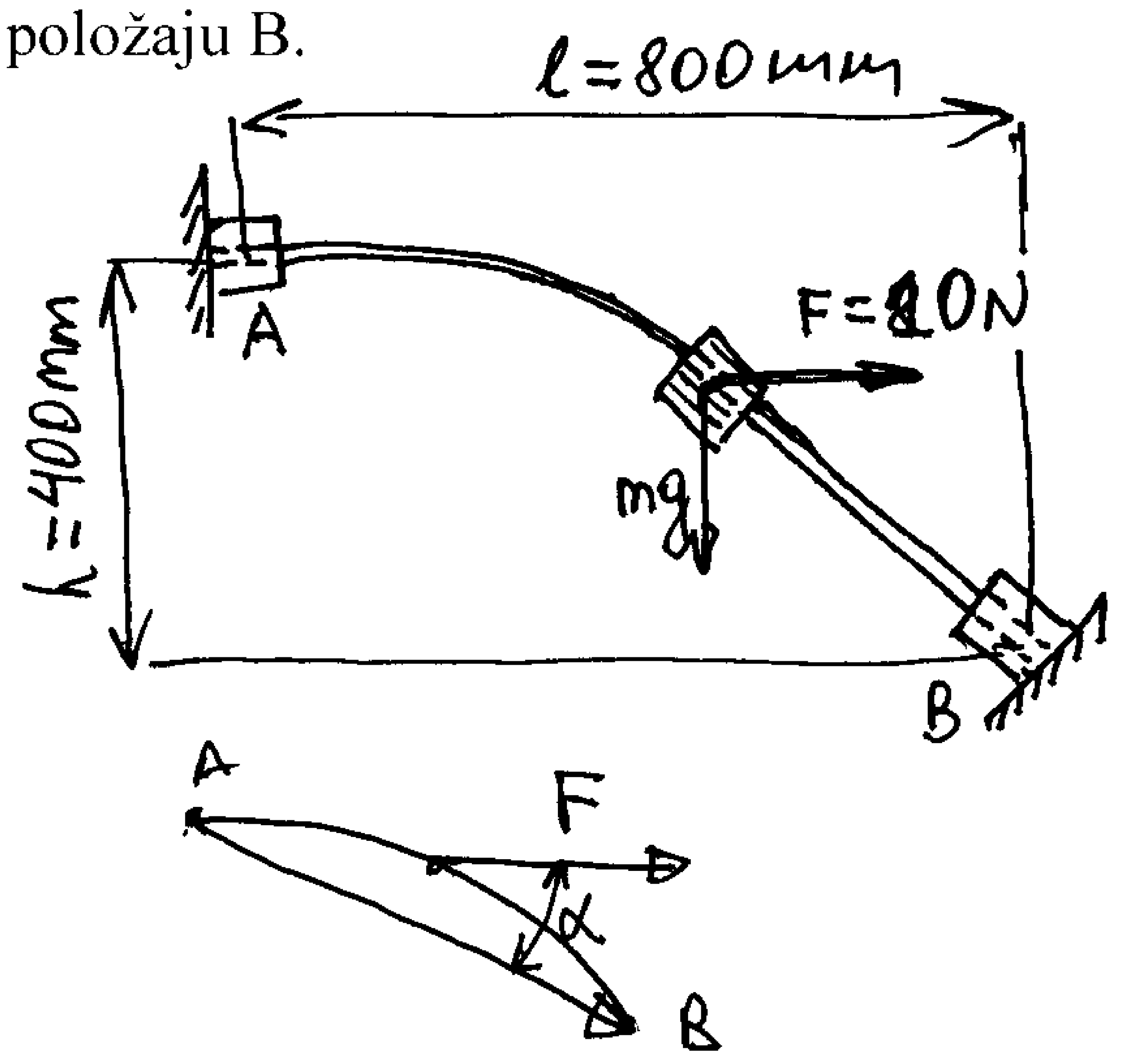
$$E_k + E_p = const \qquad (6)$$

Veličina $E = E_k + E_p$ zove se ukupna mehanička energija tačke, a relacija (6) izražava zakon o održanju mehaničke energije tačke: Ako su sve sile koje djeluju na materijalnu tačku, a koje vrše rad, konzervativne tada u toku kretanja mehanička energija ostaje konstantna.

Jasno je, na osnovu prethodne analize, da će zakon o održanju mehaničke energije važiti za neslobodno kretanje ako su aktivne sile konzervativne a veze idealne i stacionarne.

Zadaci – Zakon o promjeni kinetičke energije materijalne tačke

1. Klizač mase m = 2 kg može da klizi duž glatke vodjice u vertikalnoj ravni, započinjući kretanje bez početne brzine iz položaja A. Na njega, osim sile teže, dejstvuje i horizontalna konstantna sila inteziteta 10 N. Odrediti brzinu klizača kada se on nadje u položaju B.



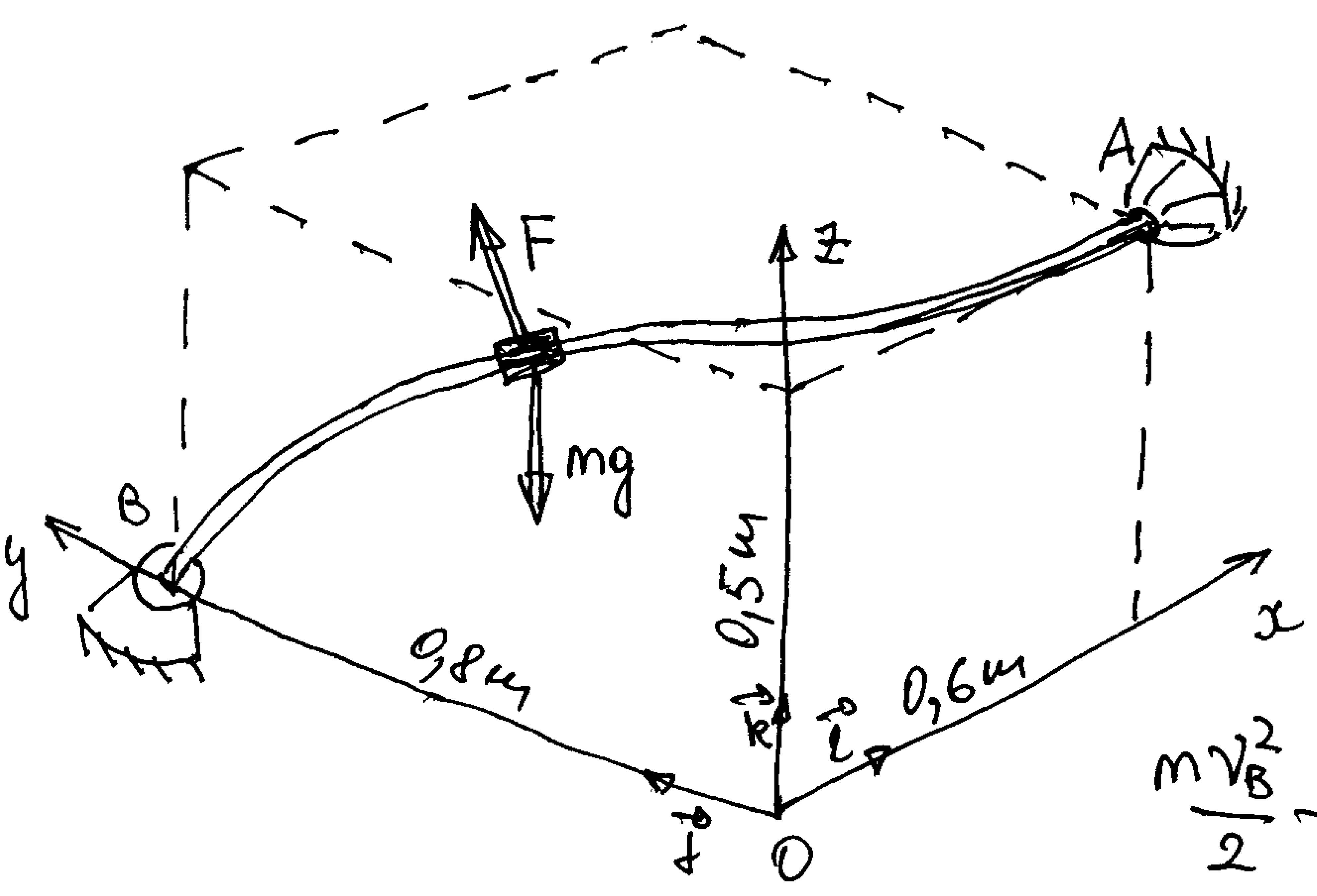
$$\frac{1}{2}mv_B^2-\frac{1}{2}m\overset{0}{\cancel{v_A^2}}=A_{(A,B)}(m\vec{g})+A_{(A,B)}(\vec{F})$$

$$A_{(A,B)}(m\vec{g})=mgh=7,848\ J$$

$$A_{(A,B)}(\vec{F})=\vec{F}\cdot\overrightarrow{AB}=F\,AB\cos\alpha=Fl=8\ J$$

$$\Rightarrow v_B=3,98\ \frac{m}{s}$$

2. Klizač mase m = 2 kg pomjera se po glatkoj vođici, u homogenom polju sile teže, iz položaja A u položaj B. Na klizač, osim sile teže, djeluje sila $\vec{F}=-15\vec{i}+10\vec{j}+7\vec{k}$ [N]. Odrediti brzinu klizača u položaju B ako je ona u položaju A bila 1 m/s.



$$\vec{F}=\overrightarrow{const}\Rightarrow A_{(A,B)}(\vec{F})=\vec{F}\cdot\overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{AB}=(x_B-x_A)\vec{i}+(y_B-y_A)\vec{j}+(z_B-z_A)\vec{k}$$
$$=-0,6\vec{i}+0,8\vec{j}-0,5\vec{k}$$

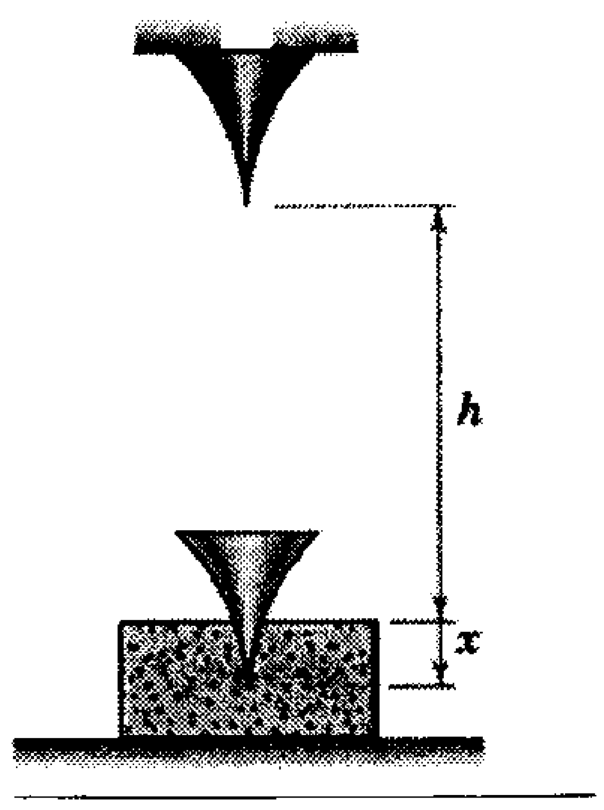
$$A_{(A,B)}(\vec{F})=13,5\ J$$

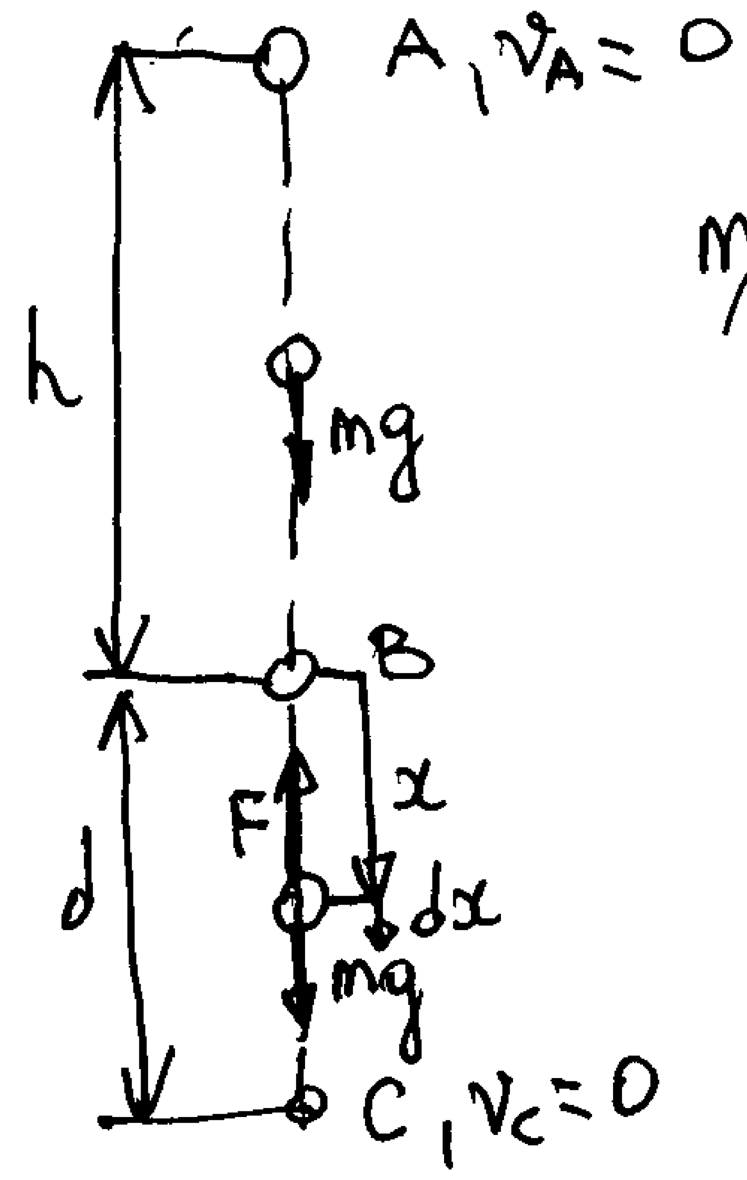
$$A_{(A,B)}(m\vec{g})=-mg(z_B-z_A)=9,81\ J$$

$$\frac{mv_B^2}{2}-\frac{mv_A^2}{2}=A_{(A,B)}(\vec{F})+A_{(A,B)}(m\vec{g})$$

$$\Rightarrow v_B=4,93\ \frac{m}{s}$$

3. Konični klin mase m, nakon slobodnog pada sa visine h = 1m prodire kroz drvenu ploču, pri čemu je sila otpora prodiranju proporcionalna četvrtom stepenu dubine prodiranja $F = kx^4$, $k = 1{,}65 \cdot 10^8\ N/m^4$. Odrediti masu klina ako je maksimalna dubina prodiranja d = 5 cm.

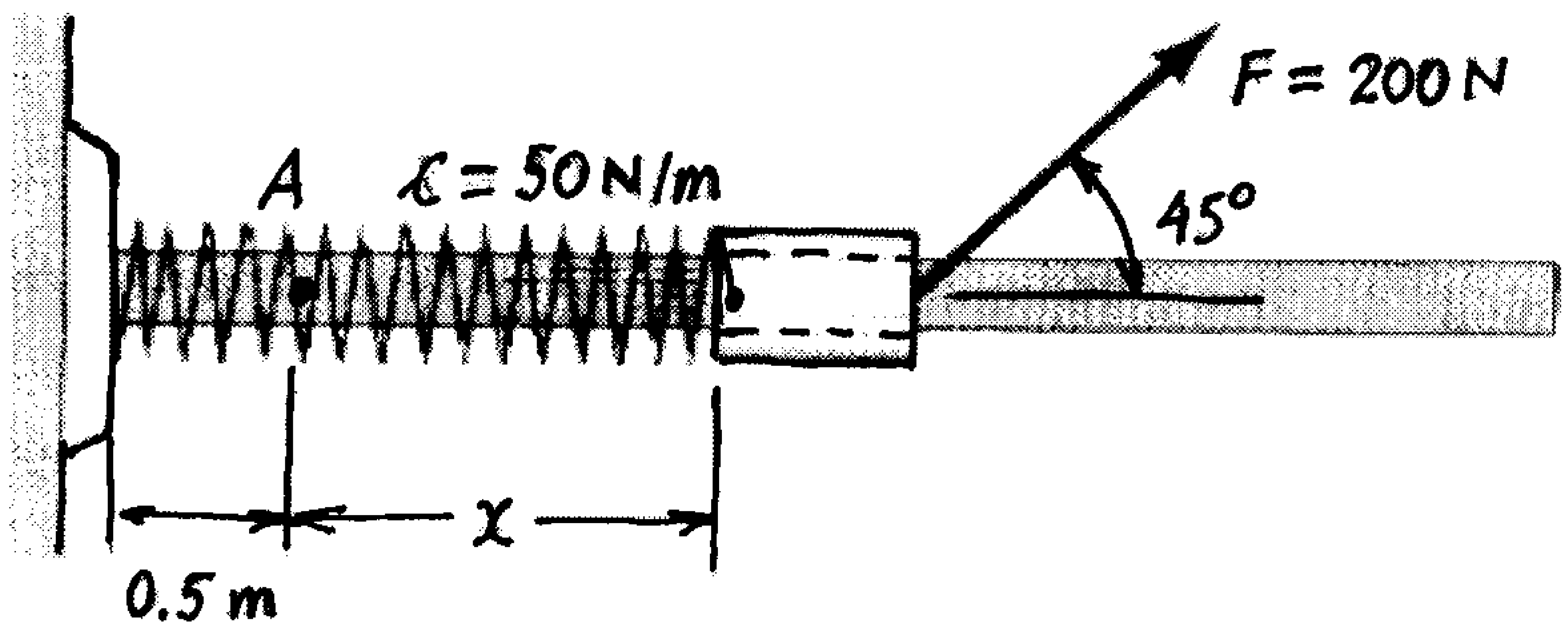


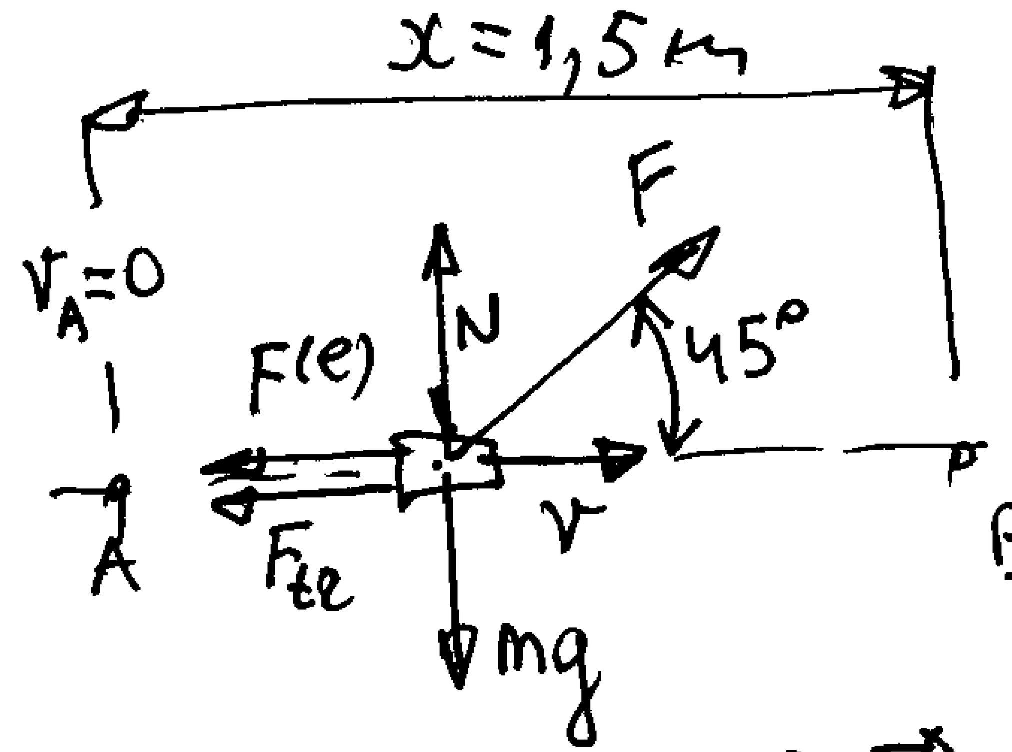


$$\frac{m v_C^2}{2} - \frac{m v_A^2}{2} = \underbrace{A_{(A,C)}(m\vec{g})}_{=\, mg(h+d)} + \underbrace{A_{(B,C)}(\vec{F})}_{=\, \int_0^d -kx^4\,dx}$$

$$\Rightarrow m = \frac{kd^5}{5g(h+d)} = 1\ kg$$

4. Klizač mase m = 30 kg, vezan za oprugu krutosti c = 50 N/m čija je dužina u nedeformisanom stanju l_0 = 0,2 m, vuče se konstantnom silom F = 200 N po hrapavoj horizontalnoj vodjici (μ = 0,4). Ako je brzina klizača u položaju A bila jednaka nuli, odrediti njegovu brzinu pri prolasku kroz položaj B koji se nalazi na rastojanju x = 1,5 m od tačke A.





$$m\vec{a} = \vec{F} + \vec{F}^{(e)} + m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{tr}$$

$$\uparrow:\ 0 = F\frac{\sqrt{2}}{2} - mg + N, \rightarrow N = mg - \frac{\sqrt{2}}{2}F$$

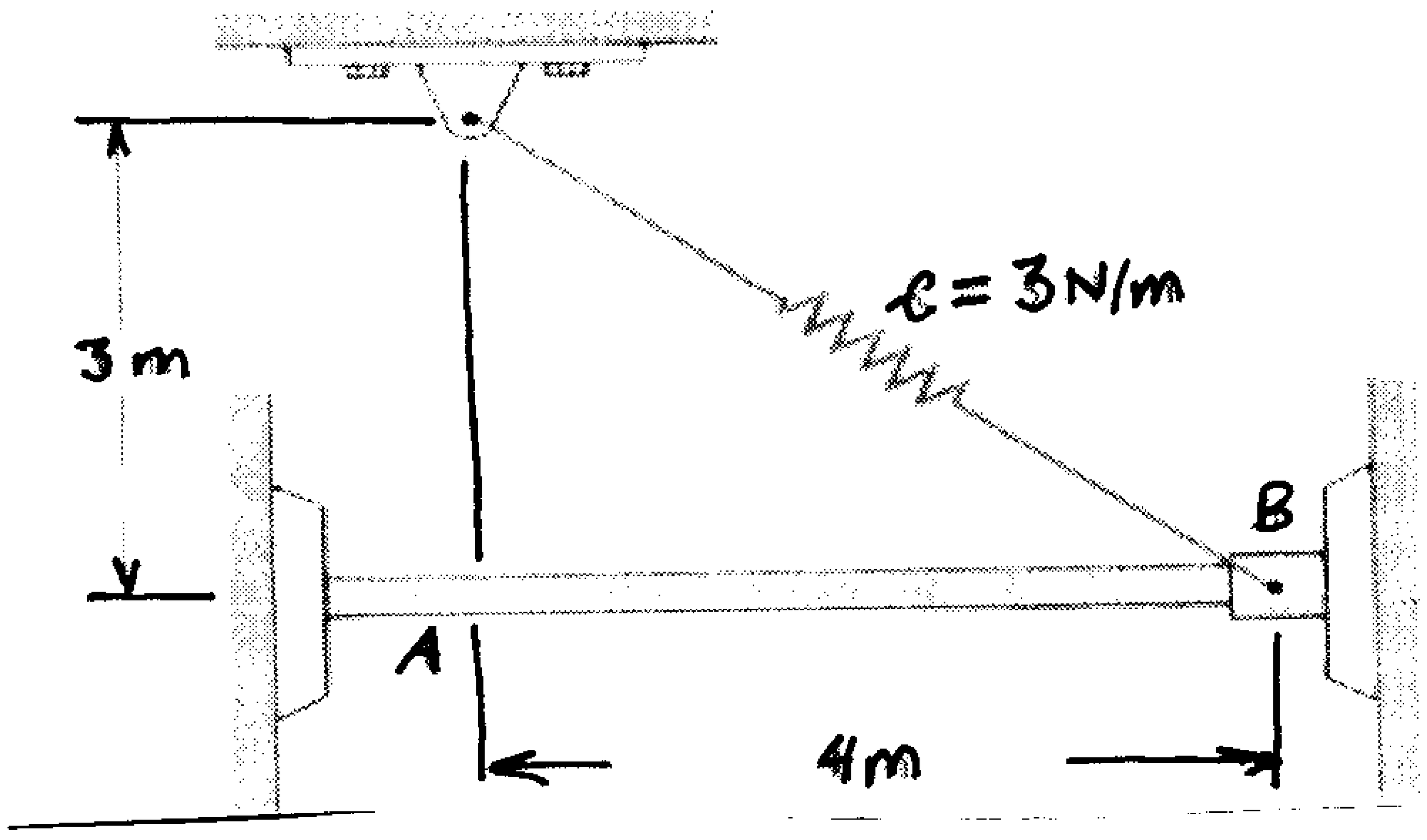
$$F_{tr} = \mu N = \mu\left(mg - \frac{\sqrt{2}}{2}F\right) = const.$$

$$\frac{m v_B^2}{2} - 0 = \underbrace{A_{(A,B)}(\vec{F})}_{=\, F\frac{\sqrt{2}}{2}\overline{AB}} + \underbrace{A_{(A,B)}(\vec{F}^{(e)})}_{=\, \frac{1}{2}c(\Delta_A^2 - \Delta_B^2)} + \underbrace{A_{(A,B)}(\vec{F}_{tr})}_{=\, -F_{tr}\overline{AB}}$$

$$\Delta_A = 0{,}3\,m;\ \Delta_B = 1{,}8\,m$$

$$\Rightarrow v_B = 1{,}67\ m/s$$

5. Klizač mase 2 kg ,vezan za oprugu čija je dužina u nenapregnutom stanju 3 m, koji može da se kreće po po glatkoj horizontalnoj vodjici dovede se u položaj B i pusti bez početne brzine. Kolika je brzina klizača pri prolasku kroz položaj A?



$$\frac{1}{2}mv_A^2 - \frac{1}{2}m\cancel{v_B^2} = A_{(B,A)}(\vec{F}^{(e)})$$

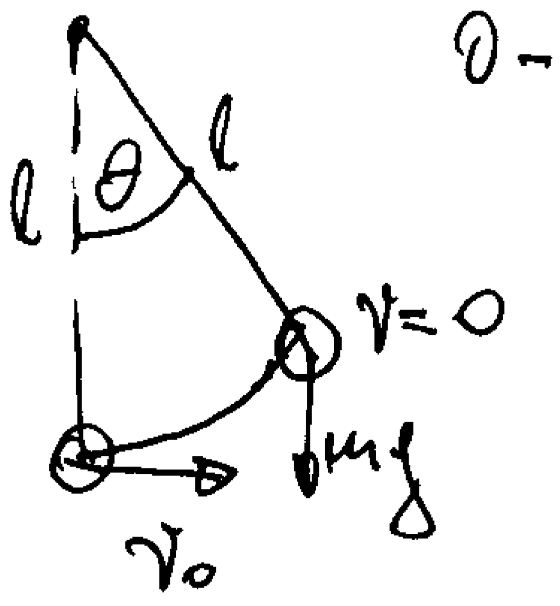
$$= \frac{1}{2}c(\Delta_B^2 - \Delta_A^2)$$

$\Delta_A = 0$

$\Delta_B = \sqrt{3^2+4^2} - 3 = 2\,m$

$\Rightarrow v_A = 2{,}45\ m/s$

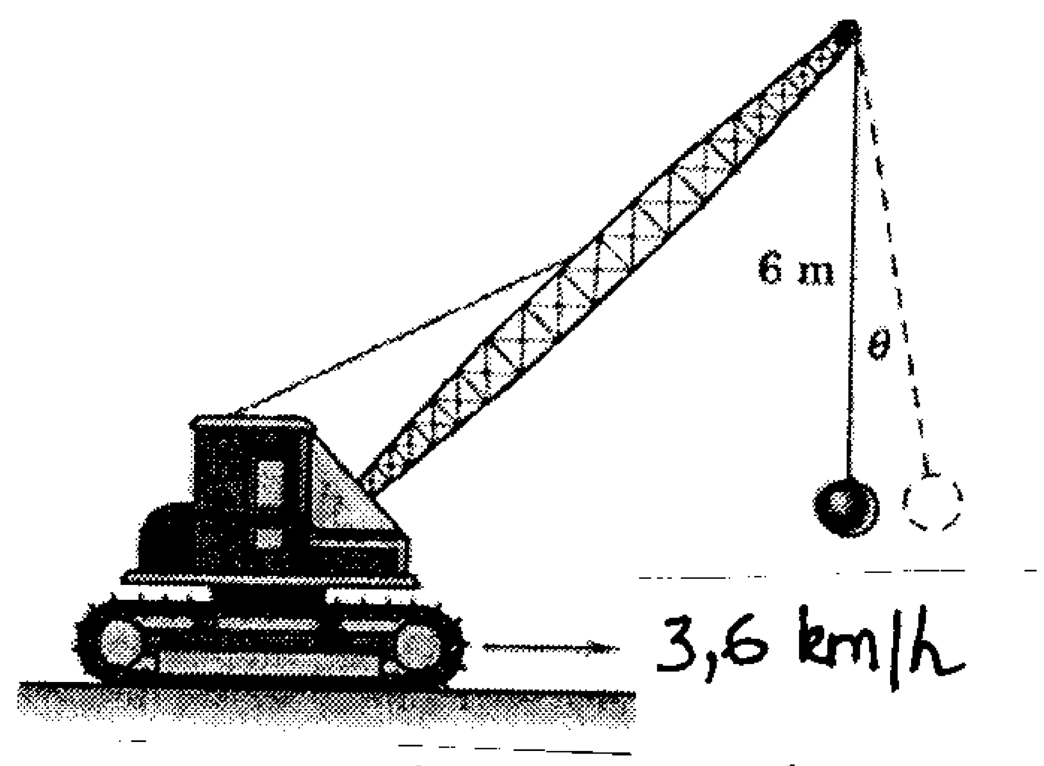
6. Samohodni kran kreće se konstantnom brzinom od 3,6 km/h. Odrediti maksimalni ugao otklona od vertikale njegovog klatna, nakon što se on naglo zaustavi.



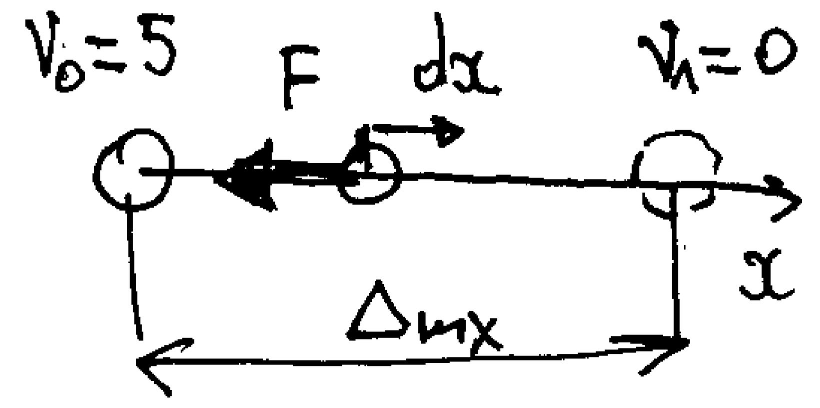
$$0 - \frac{mv_0^2}{2} = -mgl(1-\cos\theta)$$

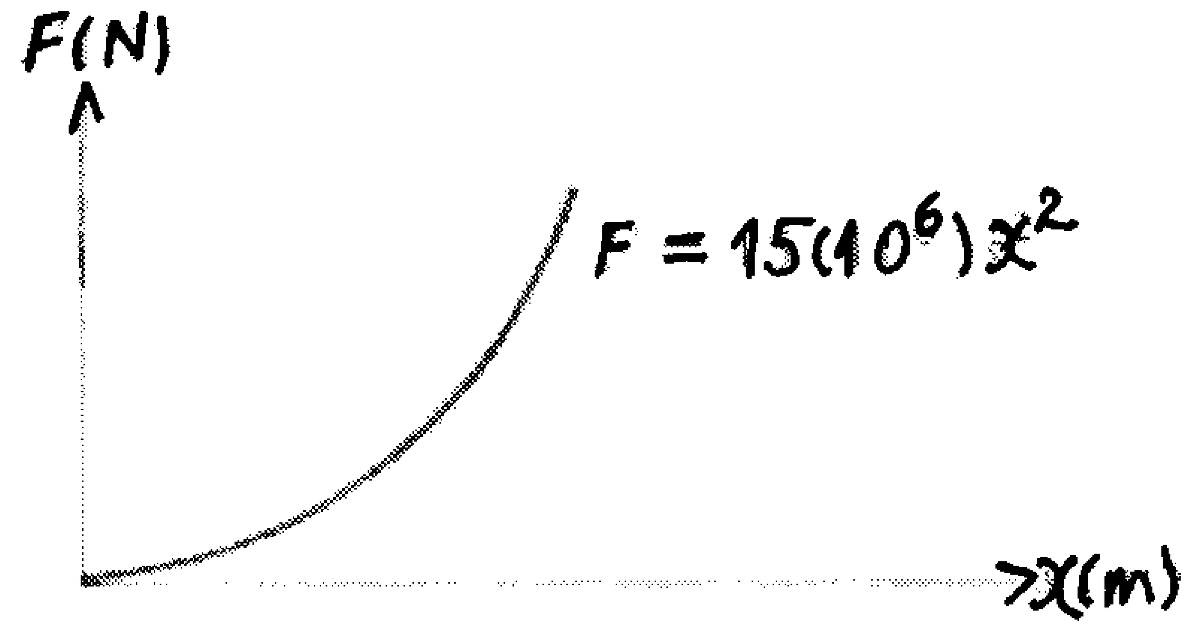
$$v_0 = 3{,}6\ \frac{km}{h} = 1\ \frac{m}{s}$$

$\Rightarrow \theta = 7{,}5^\circ$

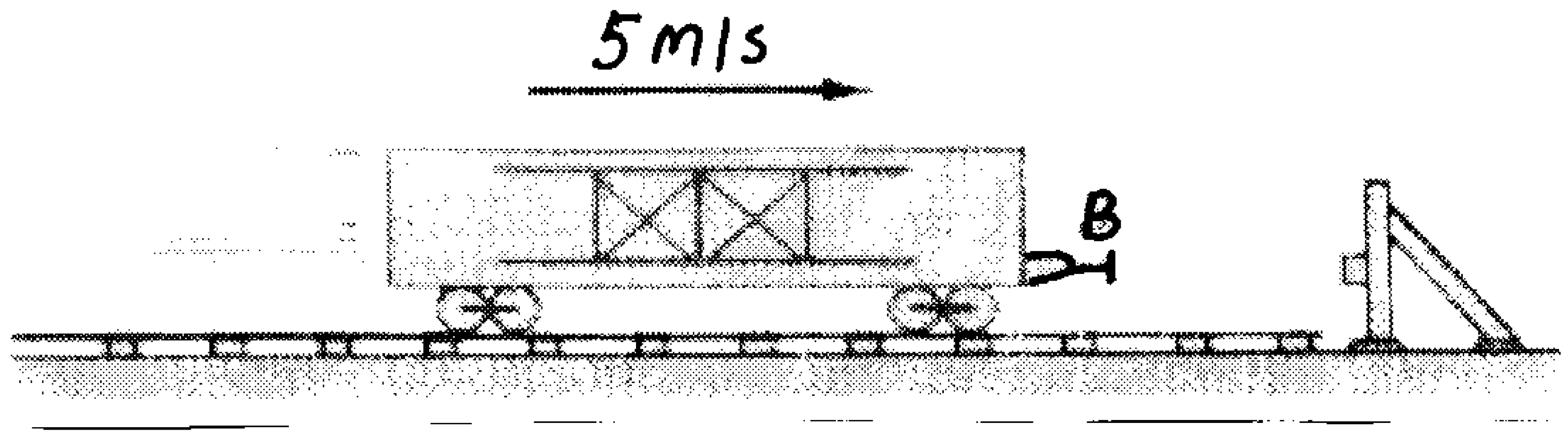


7. Vagon mase 5 tona krećući se brzinom od 5 m/s udara odbojnikom B u krutu prepreku. Odrediti maksimalno sabijanje odbojnika ako je njegova karakteristika (zavisnost sile od deformacije) data na sl.



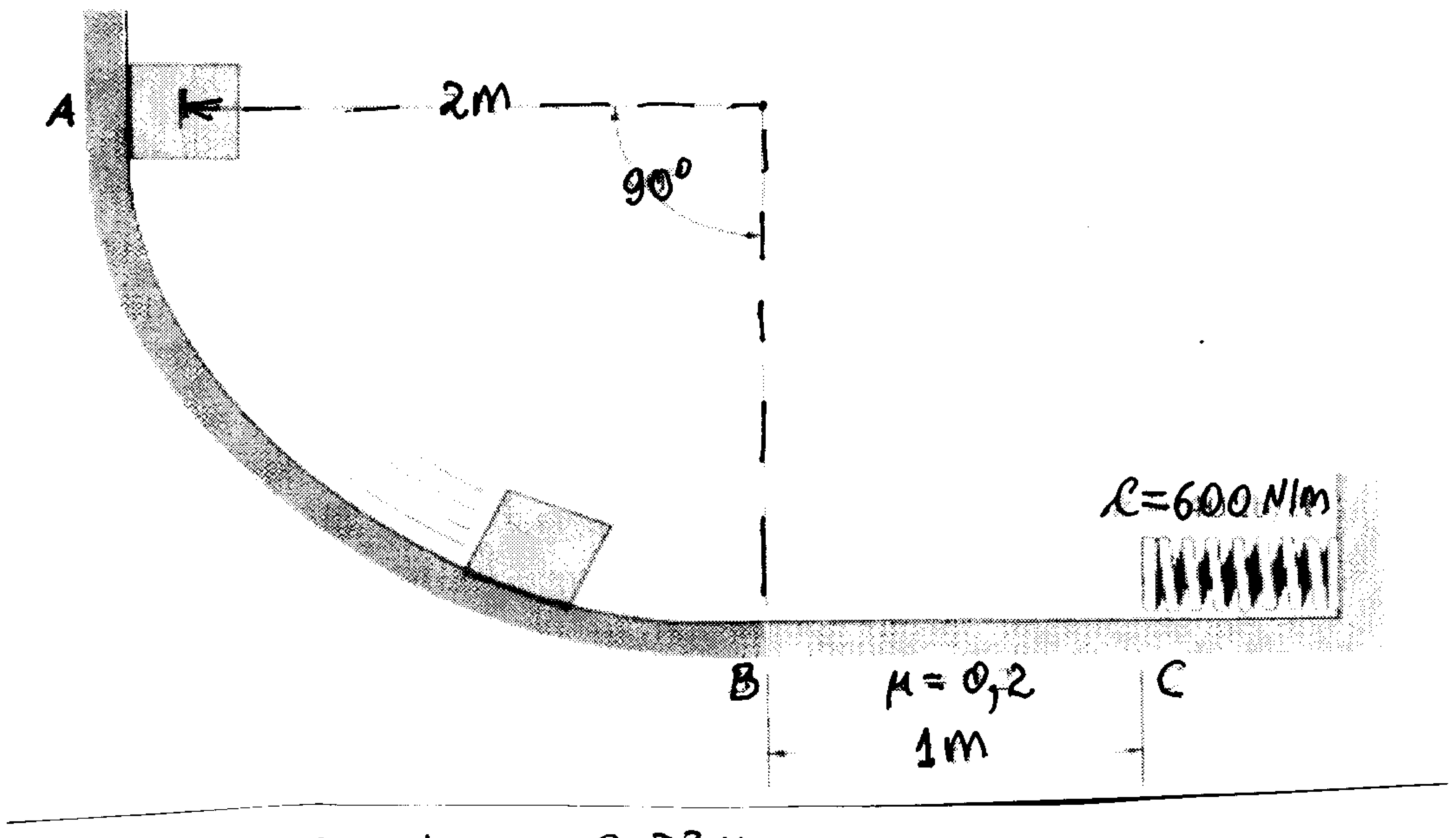


$$\cancel{\frac{mv_1^2}{2}} - \frac{mv_0^2}{2} = \int_0^{\Delta_{mx}} -15\cdot10^6 x^2\,dx$$



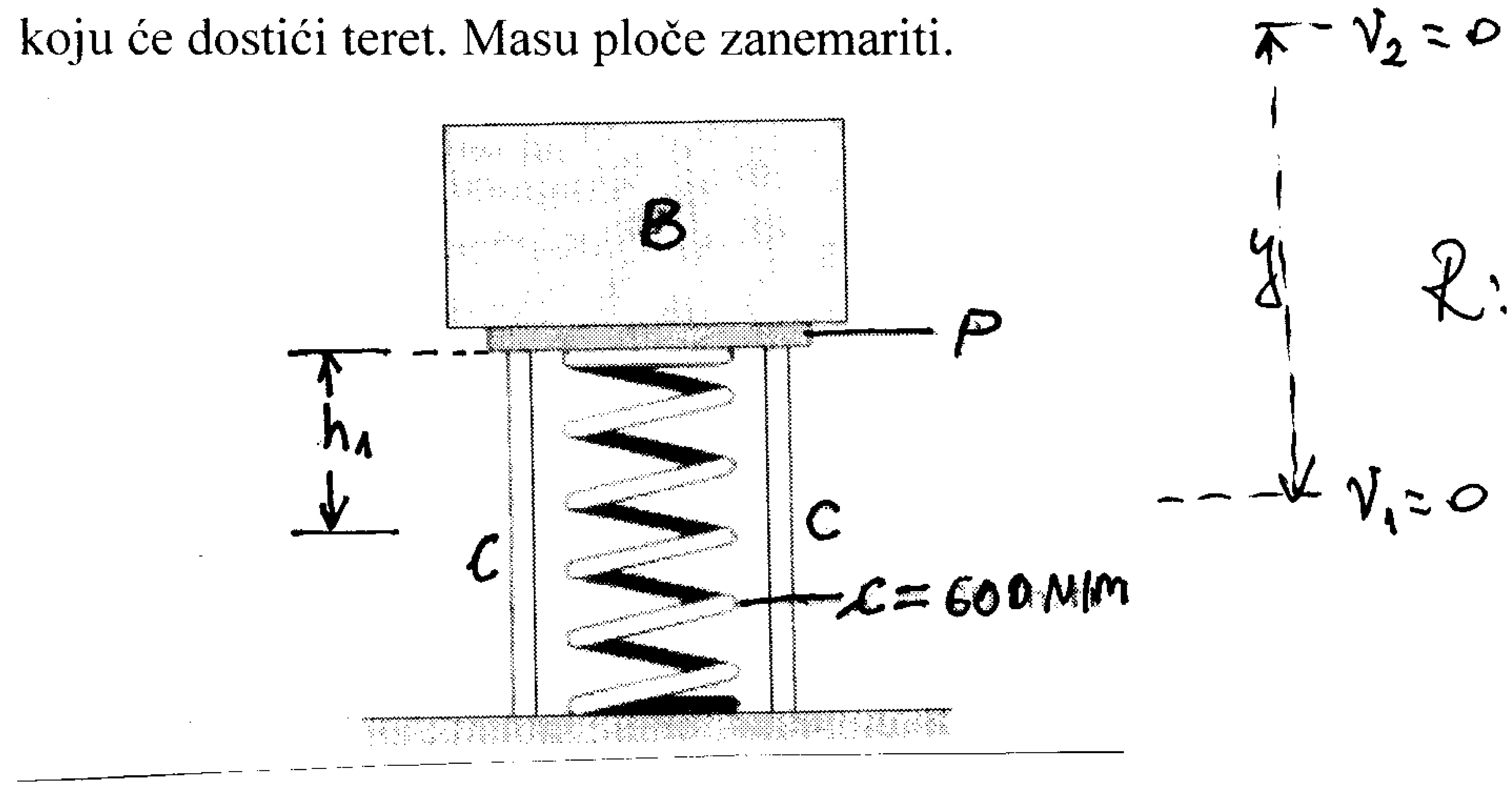
$\Rightarrow \Delta_{mx} = 0{,}232\ m$

8. Kutija mase 5 kg, počevši kretanje iz položaja A bez početne brzine spušta se niz cilindričnu glatku površ AB, a zatim nastavljajući klizanje po horizontalnoj hrapavoj ravni udara u elastičnu oprugu. Koliko je maksimalno sabijanje opruge?



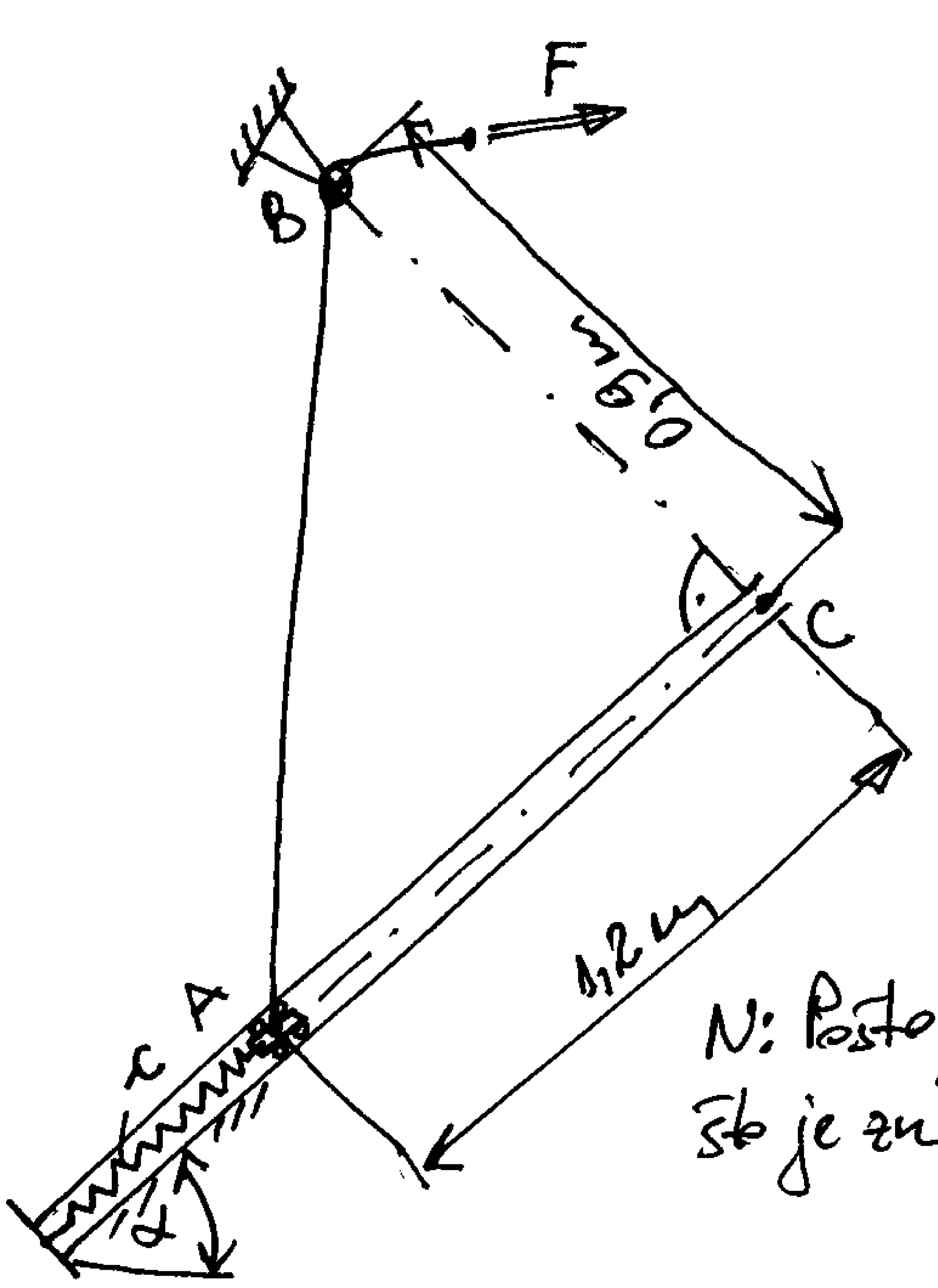
R: $\Delta_{max} = 0,53\ m$

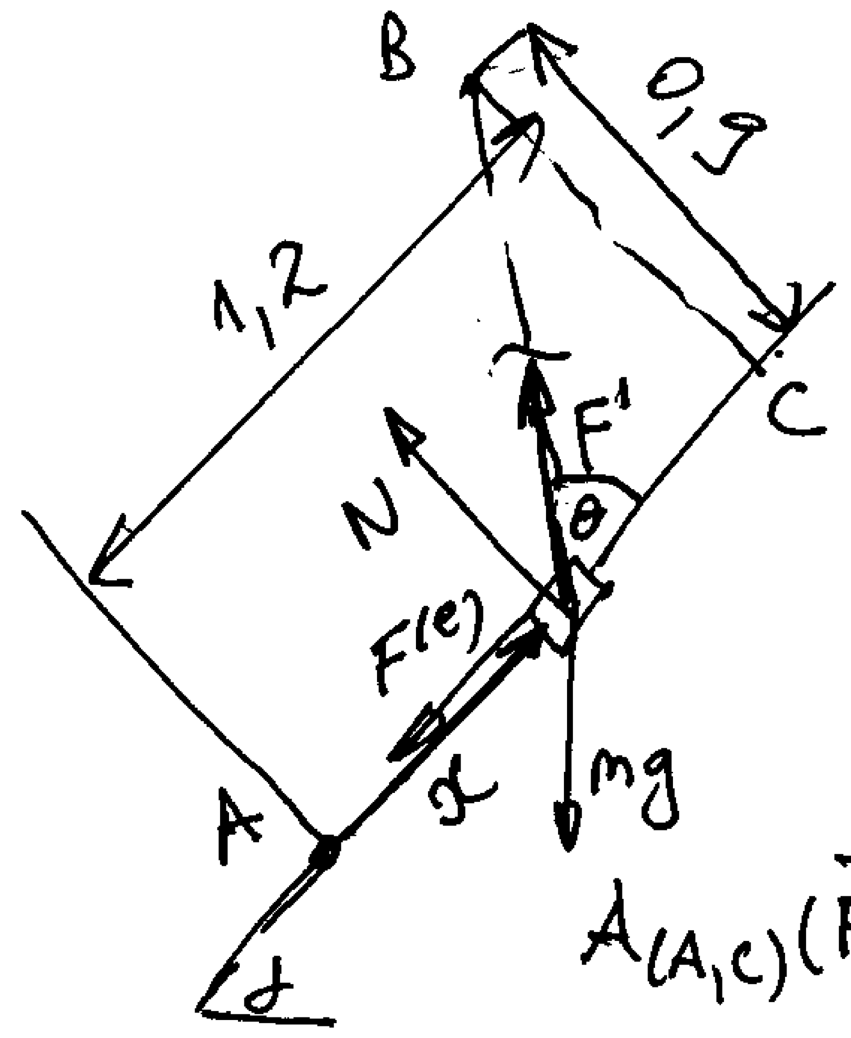
9. Četiri neistegljiva užeta C vezana za ploču P drže vertikalno pstavljenu oprugu sabijenu za $\Delta_0 = 15cm$. Ako se teret B, težine G = 30 N, postavi na ploču , pomjeri nadolje za $h_1 = 20cm$ i pusti bez početne brzine, odrediti visinu, u odnosu na taj položaj, koju će dostići teret. Masu ploče zanemariti.



R: $y = 1\ m$

10. Pomoću neistegljivog užeta, prebačenog preko kotura B zanemarljivih dimenzija, konstantnom silom F = 250 N vuče se klizač mase m = 10 kg u pravolinijskoj glatkoj vođici nagnutoj pod uglom $\alpha = 30^0$ u odnosu na horizont. Za dno vođice klizač je vezan oprugom krutosti c = 60 N/m. Odrediti brzinu klizača u položaju C ako je njegova brzina u položaju A bila jednaka nuli, a opruga izdužena za $\Delta_A = 0{,}6m$.





$$\frac{mv_C^2}{2} - \frac{m\cancel{v_A^2}}{2} = A_{(A,C)}(m\vec{g}) + A_{(A,C)}(\vec{F}^{(e)}) + A_{(A,C)}(\vec{F}')$$

$$A_{(A,C)}(m\vec{g}) = -58{,}9\,J$$

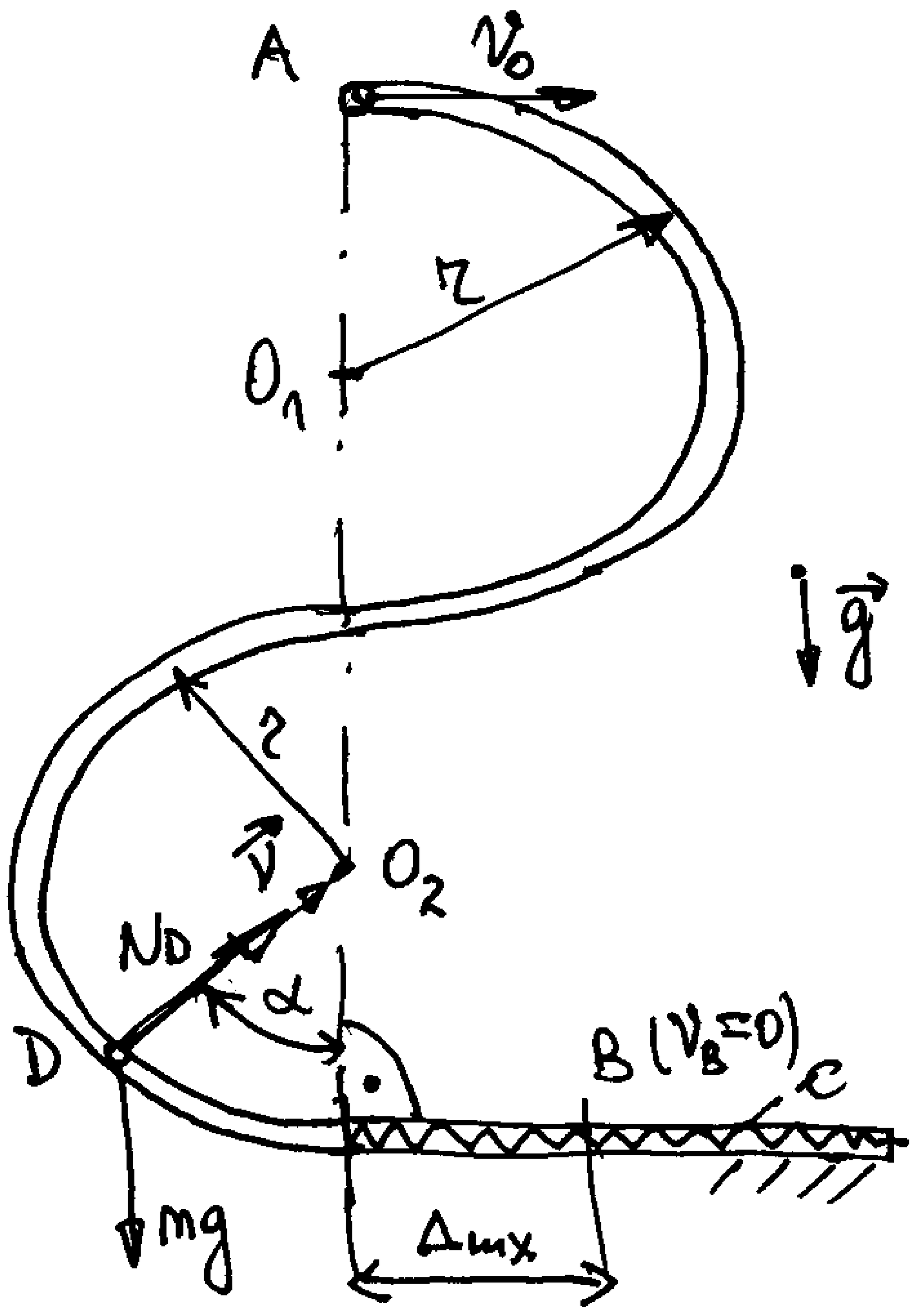
$$A_{(A,C)}(\vec{F}^{(e)}) = -86{,}4\,J$$

$$F' = F = 250\,N$$

$$A_{(A,C)}(\vec{F}') = \int_A^C F'_x\,dx = \int_0^{1,2} F\frac{(1{,}2-x)\,dx}{\sqrt{0{,}9^2+(1{,}2-x)^2}} = 150\,J$$

N: Pošto je uže neistegljivo, $A(\vec{F}') = A(\vec{F}) = F(\overline{AB} - \overline{CB}) = 150\,J$, što je znatno jednostavnije od računanja prethodnog integrala.

11. Kuglica mase m započinje kretanje iz položaja A brzinom v_0 i dalje se kreće krpz glatku nepokretnu cijev koja leži u vertikalnoj ravni. Odrediti: a) reakciju cijevi u tački D; b) maksimalno sabijanje horizontalne opruge krutosti c nakon što u nju udari kuglica.



a) $m\vec{a}_D = m\vec{g} + \vec{N}_D$

$\vec{\nu}:\ m\underset{\overset{\|}{\frac{v_D^2}{r}}}{a_{D\nu}} = -mg\cos\alpha + N_D$

$v_D^2 = ?$

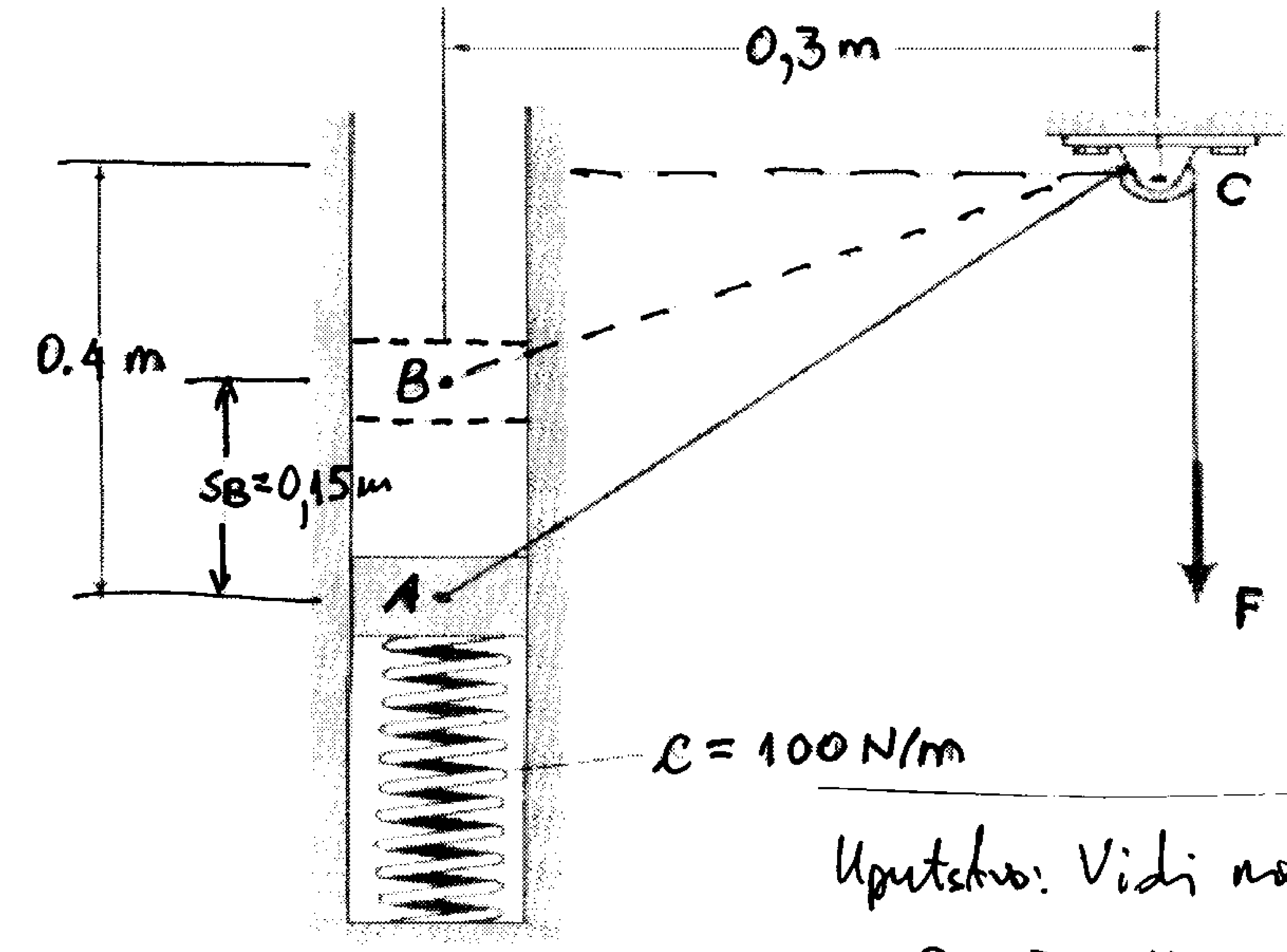
$\frac{1}{2}mv_D^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = mg(3r + r\cos\alpha)$

$\Rightarrow N_D = \frac{mv_0^2}{r} + 3mg(2+\cos\alpha)$

b) $\frac{1}{2}m\cancel{v_B^2} - \frac{1}{2}mv_0^2 = mg4r - \frac{1}{2}c\Delta_{mx}^2$

$\Rightarrow \Delta_{mx} = \sqrt{\frac{m}{c}(v_0^2 + 8gr)}$

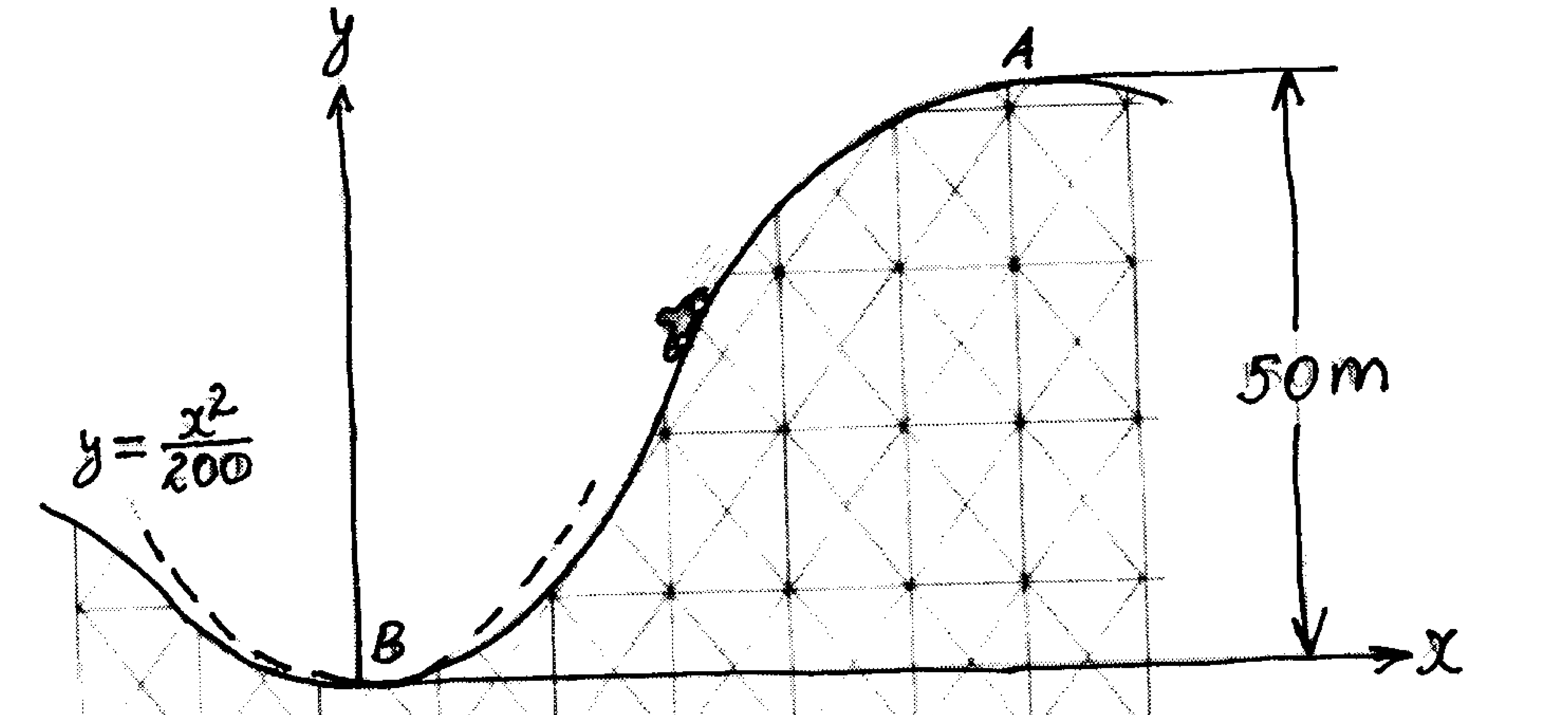
12. Klip mase 0.8 kg kreće se u vertikalnoj glatkoj cijevi, počevši kretanje bez početne brzine iz položaja A u kojem je opruga vezana za klip nenapregnuta. Kolikom konstantnom vertikalnom silom F treba vući nerastegljivo uže da bi pri prolasku kroz položaj B brzina klipa bila $v_B = 2.5$ m/s?



Uputstvo: Vidi napomenu u zadatku 10.

R: F = 43,8 N

13. Odrediti brzinu "roller-coastera" pri prolasku kroz položaj B ako je njegova brzina u položaju A iznosila 2 m/s. Kolikom normalnom silom putnik, mase 70 kg, pritiska kola u položaju B. U tački B staza ima oblik krive zadate funkcijom $y = x^2/200$. Zanemariti trenje, masu točkova i veličinu kola.



Uputstvo: Poluprečnik krivine krive koja je profil funkcije $y = f(x)$, određen je izrazom

$$R_k = \frac{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}{\left|d^2y/dx^2\right|},$$

R: $N_B = 1376,2$ N