V i VI sedmica nastave

4. Oscilatorna kretanja materijalne tačke

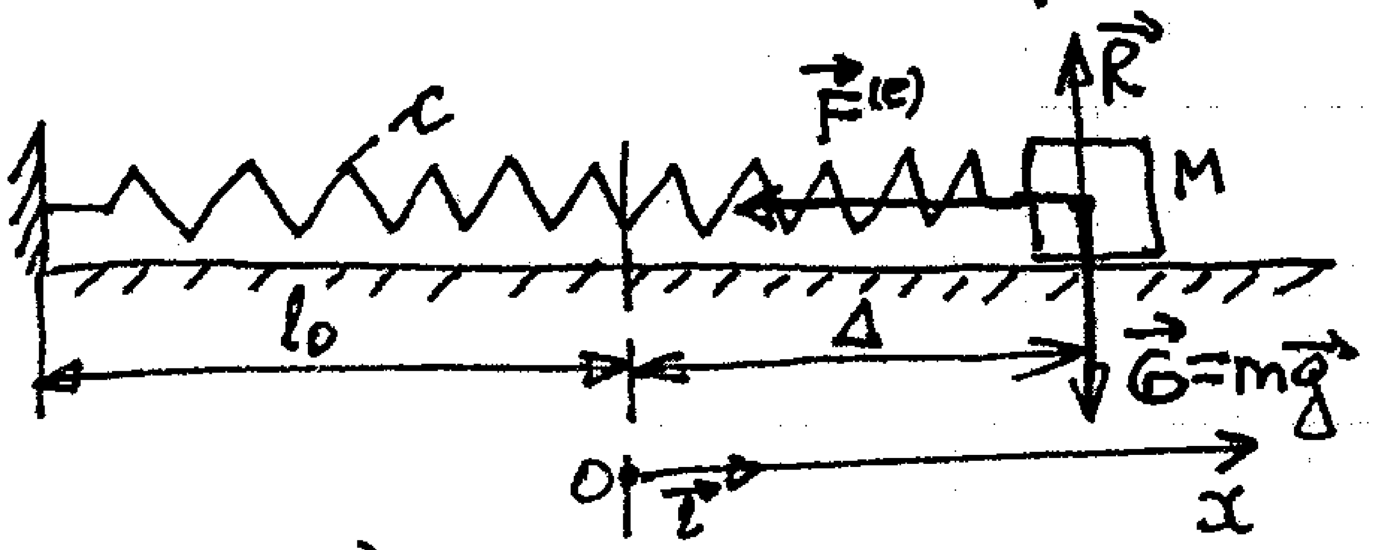
Važnu klasu kretanja predstavljaju oscilatorna kretanja materijalne tačke. Ona se izvode oko ravnotežnog položaja tačke (centra oscilovanja), a izazivaju ih tzv. restitucione sile (sile uspostavljanja) koje nastoje da materijalnu tačku, kada se ona izvede iz položaja ravnoteže, vrate u ravnotežni položaj. Takve sile zavise od položaja tačke. Iako njihova priroda može biti vrlo različita, razlog pojave restitucionih sila je najčešće u elastičnim, odnosno deformabilnim, svojstvima tijela sa kojima je materijalna tačka u interakciji. Na tačku koja izvodi oscilatorno kretanje može djelovati, osim restitucione sile, i sila otpora koja prigušuje kretanje, kao i tzv. prinudna sila – sila koja je zadana kao funkcija vremena. Najvažnija prinudna sila je ona koja se mijenja tokom vremena po harmonijskom (sinusnom ili kosinusnom) zakonu.

Zavisno od kombinacije sila koje djeluju na tačku, oscilatorna kretanja se dijele na:

- slobodne oscilacije
  - nepriguśene
  - prigušene
- prinudne oscilacije
  - nepriguśene
  - prigušene

Sve ove vrste oscilatornih kretanja tačke proučićemo na modelu materijalne tačke vezane za elastičnu oprugu, koja se deformiše u granicama važenja Hukovog zakona (linearna veza između sile i deformacije), i čija je masa zanemarljivo mala u odnosu na masu tačke.

4.1. Slobodne nepriguśene oscilacije.



Razmotra se tačka M, mase m, vezana za slobodan kraj opruge, krutosti c, čija je dužina u nedeformisanom stanju l_0. Tačka se kreće pravolinijski po glatkoj horizontalnoj podlozi.

$\vec F^{(e)} = -cx\vec i$ – elastična sila opruge (restituciona sila)

$$m\vec a = \vec F^{(e)} + \vec G + \vec R \longrightarrow m\ddot x = -cx$$

$$\longrightarrow \boxed{\ddot x + \omega^2 x = 0,\ \omega^2 = \frac{c}{m}}$$ (1) – diferencijalna jednačina slobodnih nepriguśenih oscilacija mat. tačke

$$(1) \xrightarrow{x = e^{\lambda t}} \lambda^2 + \omega^2 = 0$$ (2) – karakteristična jednačina dif. jed. (1)

$$\lambda_{1,2} = \pm i\omega,\ i = \sqrt{-1}$$ – korijeni jednačine (2)

Opšte rješenje dif. jed. (1)

$$x = c_1' e^{\lambda_1 t} + c_2' e^{\lambda_2 t} = c_1' e^{i\omega t} + c_2' e^{-i\omega t}$$

može se, na osnovu Moavrovog obrasca: $e^{i\alpha} = \cos\alpha \pm i\sin\alpha$, transformisati na oblik

$$x = C_1 \cos\omega t + C_2 \sin\omega t \qquad (3)$$

sa novim integracionim konstantama C_1 i C_2 $(C_1 = c_1' + c_2',\ C_2 = i(c_1' - c_2'))$.

Ako umjesto C_1 i C_2 uvedemo druge konstante A i α, smjenama

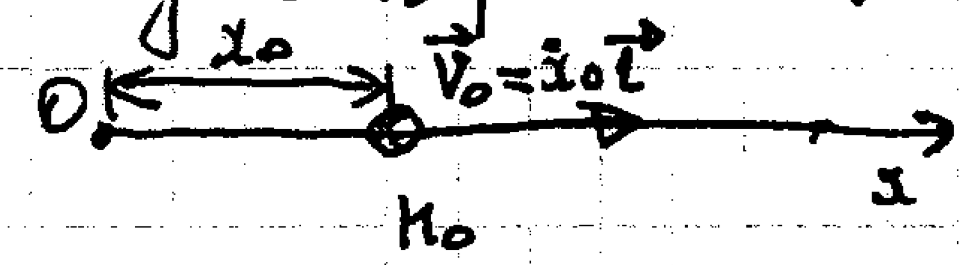
$$C_1 = A\sin\alpha,\quad C_2 = A\cos\alpha \quad \longleftrightarrow \quad A=\sqrt{C_1^2+C_2^2},\ \sin\alpha=\frac{C_1}{\sqrt{C_1^2+C_2^2}},\ \cos\alpha=\frac{C_2}{\sqrt{C_1^2+C_2^2}} \qquad (4)$$

opšte rješenje (3) postaje

$$x = A\sin(\omega t+\alpha) \qquad (5)$$

Integracione konstante C_1 i C_2 (odnosno A i α) određuju se iz početnih uslova:

$$t_0=0,\ x(t_0)=x_0,\ \dot x(t_0)=\dot x_0 \qquad (6)$$



$$(3)\xrightarrow{(6)} C_1 = x_0,\ C_2=\frac{\dot x_0}{\omega} \xrightarrow{(4)} A=\sqrt{x_0^2+\left(\frac{\dot x_0}{\omega}\right)^2},\ \sin\alpha=\frac{x_0}{A},\ \cos\alpha=\frac{\dot x_0}{\omega A},\ \alpha\in[0,2\pi)$$

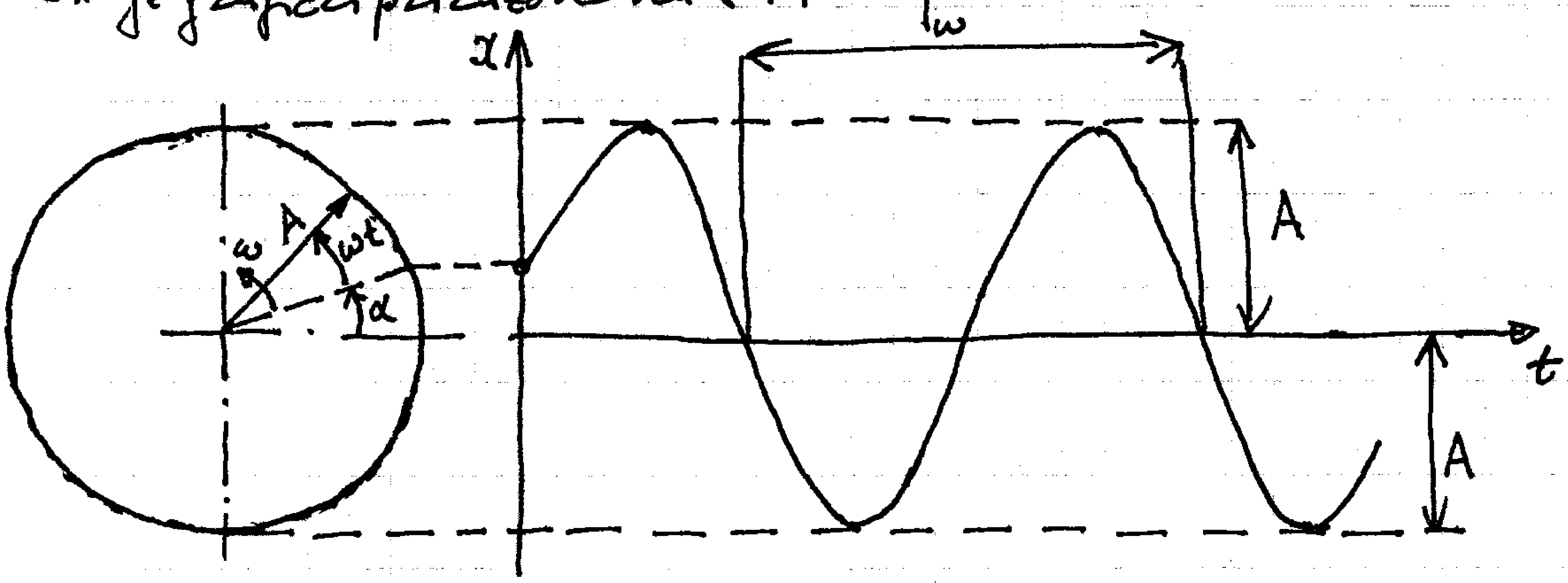
Konačna jednačina kretanja je

$$\boxed{x = x_0\cos\omega t + \frac{\dot x_0}{\omega}\sin\omega t} \qquad (7)$$

odnosno

$$\boxed{x=\sqrt{x_0^2+\left(\frac{\dot x_0}{\omega}\right)^2}\,\sin(\omega t+\alpha),} \qquad (8)$$

što je grafički prikazano na slici.



Dakle, kretanje je oscilatorno i izvodi se po periodičnom – prostom harmonijskom zakonu – sa osnovnim periodom ($x(t+T_\omega)=x(t), \forall t$)

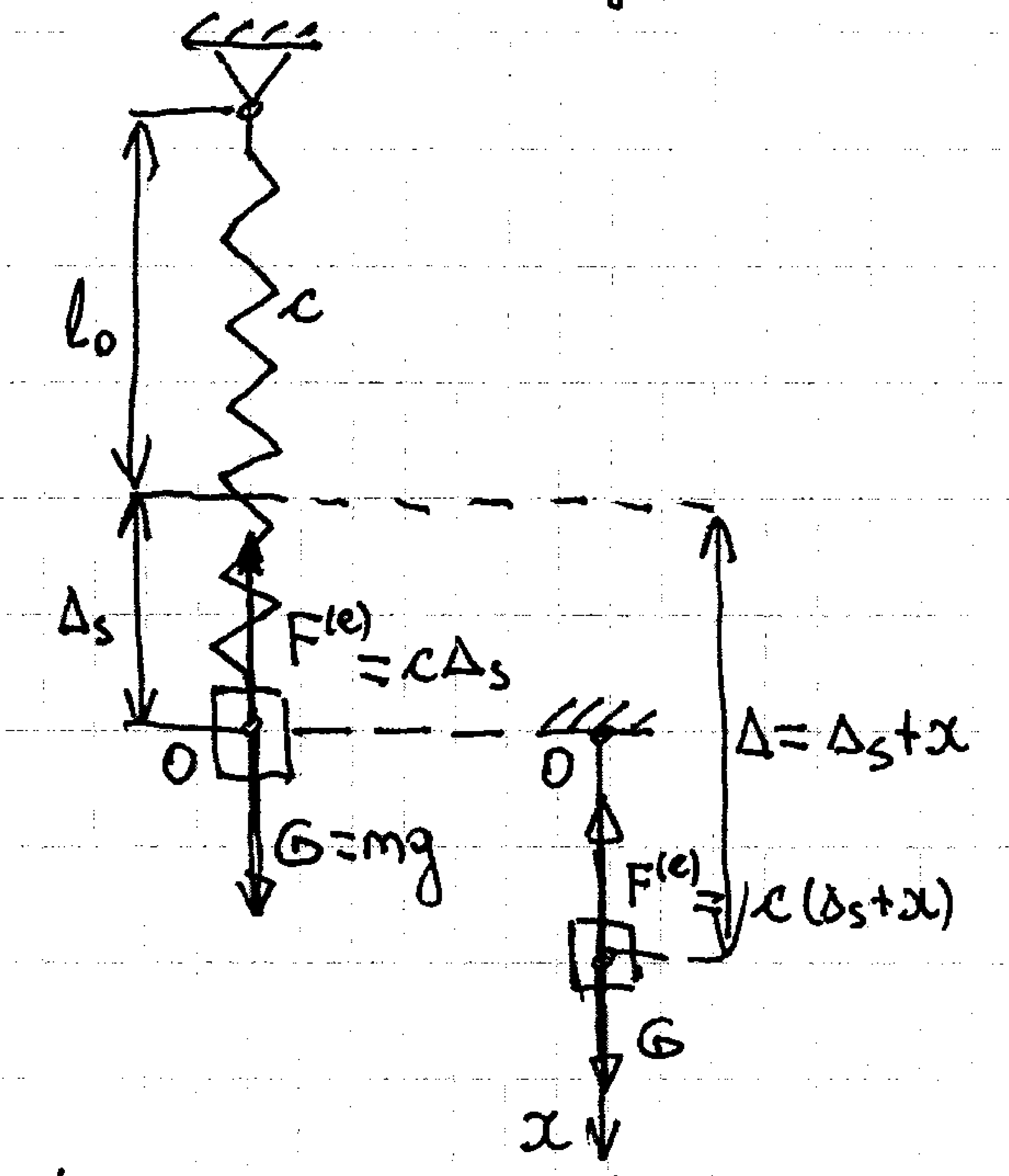
$$T_\omega = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{c}} \qquad (9)$$

koji se zove period slobodnih oscilacija. Broj perioda oscilovanja u jednoj sekundi $f=1/T_\omega$ zove se učestanost ili frekvencija oscilovanja. Veličina ω zove se kružna (ugaona) frekvencija (v. sliku), a najveće udaljenje tačke M od ravnotežnog položaja (centra oscilovanja) zove se amplituda oscilacija i ona je

$$A=|x_{max}(t)| = \sqrt{x_0^2+\left(\frac{\dot x_0}{\omega}\right)^2},$$

dok je $(\omega t+\alpha)$ faza oscilacija i α početna faza (ugao faznog pomjeranja). Prema tome, tri veličine: ω (ili T_ω), A i α u potpunosti određuju zakon slobodnih oscilacija. Amplituda i početna faza zavise od početnih uslova, dok je kružna frekvencija $\omega=\sqrt{c/m}$, a samim tim i period oscilacija $T_{(0)}$, nepromjenljiva karakteristika (fizička konstanta) datog sistema (mat. tačka + opruga).

4.1.1. Vertikalne oscilacije tereta obješenog o oprugu (uticaj konstantne sile na oscilatorno kretanje). Ekvivalentna krutost.



U ravnotežnom položaju tereta, usled dejstva sile teže, opruga će biti istegnuta za veličinu statičke deformacije Δ_s, pa je uslov ravnoteže

$$c\Delta_s = G$$

Ako se teret pomjeri iz ravnotežnog položaja u vertikalnom pravcu, ili mu se u tom pravcu saopšti početna brzina, doći će do oscilatornog kretanja duž vertikalne ose za čiji početak uzimamo tačku O koja se poklapa sa položajem ravnoteže tereta.

Diferencijalna jednačina pravolinijskog kretanja tereta je

$$m\ddot{x} = G - c(\Delta_s + x),$$

koja se, imajući u vidu uslov ravnoteže, svodi na oblik

$$\ddot{x}+\omega^2 x=0,\quad \omega^2=\frac{c}{m}$$

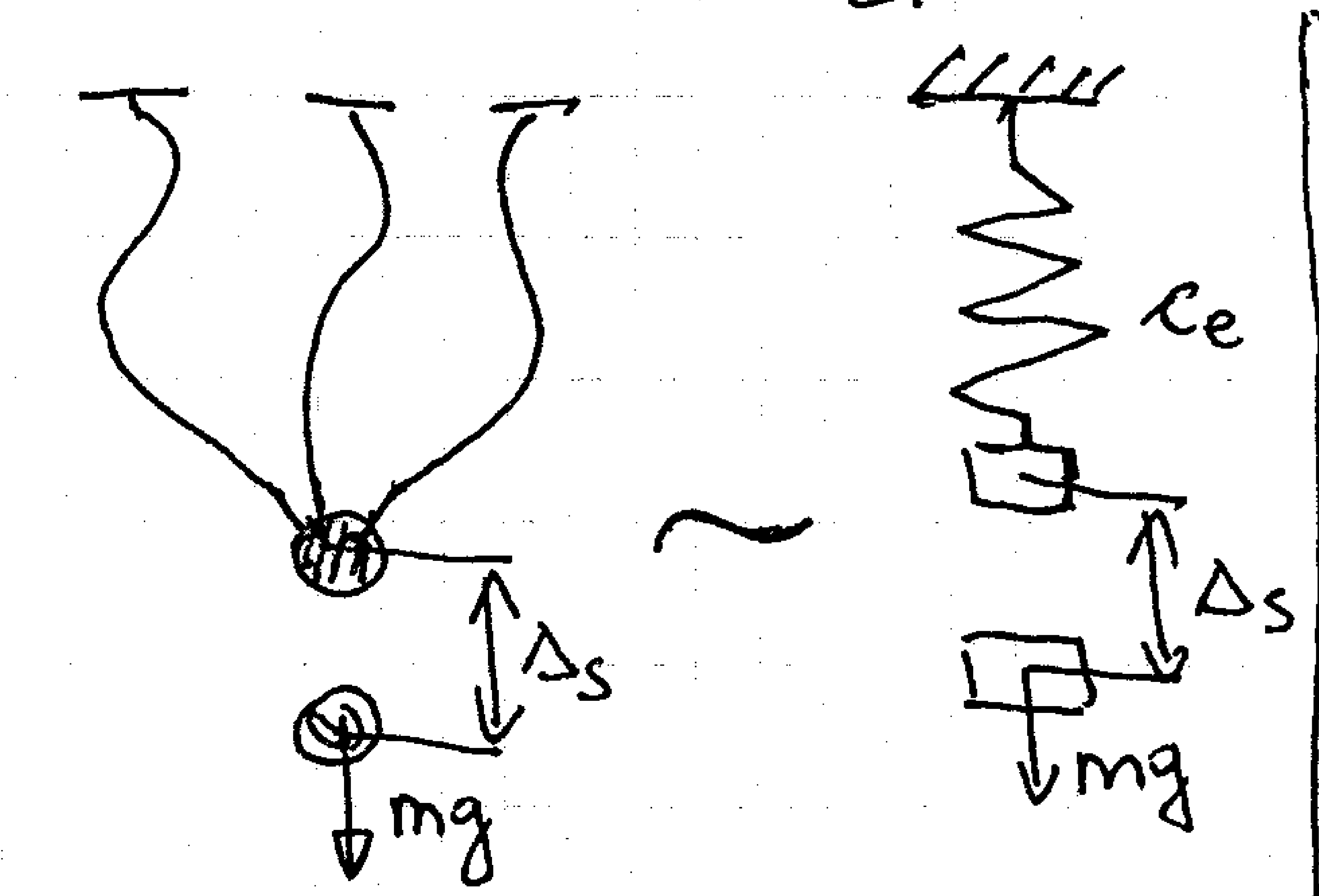
što se ne razlikuje od jednačine (1). Prema tome, konstantna sila $G=mg$ ne mijenja karakter oscilovanja koje nastaje usled dejstva elastične sile opruge, već samo pomjera centar oscilovanja (ravnotežni položaj) u smjeru dejstva sile za veličinu statičkog pomjeranja (deformacije opruge) Δ_s.

Kružna frekvencija koja suštinski karakteriše oscilatorno kretanje, može se izraziti na sledeći način:

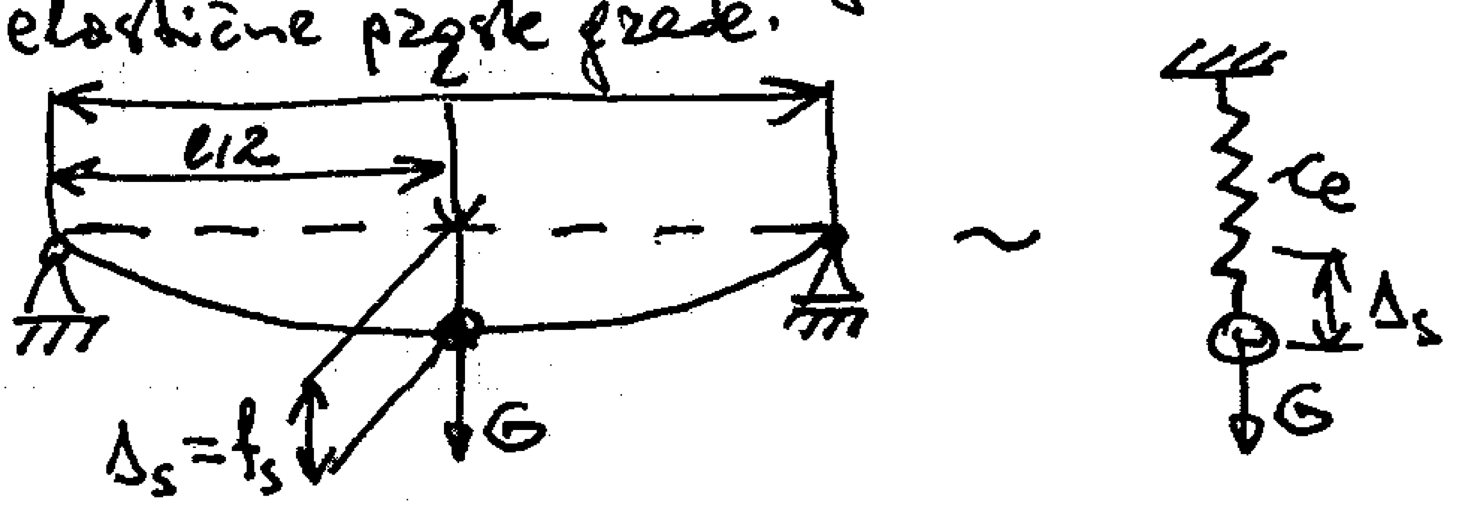
$$\omega=\sqrt{c/m} \overset{c\Delta_s=mg}{=\!=} \sqrt{g/\Delta_s},$$

što se koristi pri eksperimentalnom određivanju kružne frekvencije na osnovu izmjerenog statičkog pomjeranja Δ_s.

Odavde, očigledno je, da će koncentrisana masa, vezana za neku elastičnu konstrukciju zanemarljive mase, koja izvodi pravolinijske oscilacije oscilovati na isti način kao kada bi bila vezana za jednu elastičnu oprugu ekvivalentne krutosti c_e, određene iz uslova jednakosti statičkih pomjeranja.



Pr. Vertikalne oscilacije koncentrisane mase (tereta težine G) vezanog za sredinu raspona elastične proste grede.



$$\Delta_s=f_s=\frac{Gl^3}{48EI} \qquad \Delta_s=\frac{G}{c_e}$$

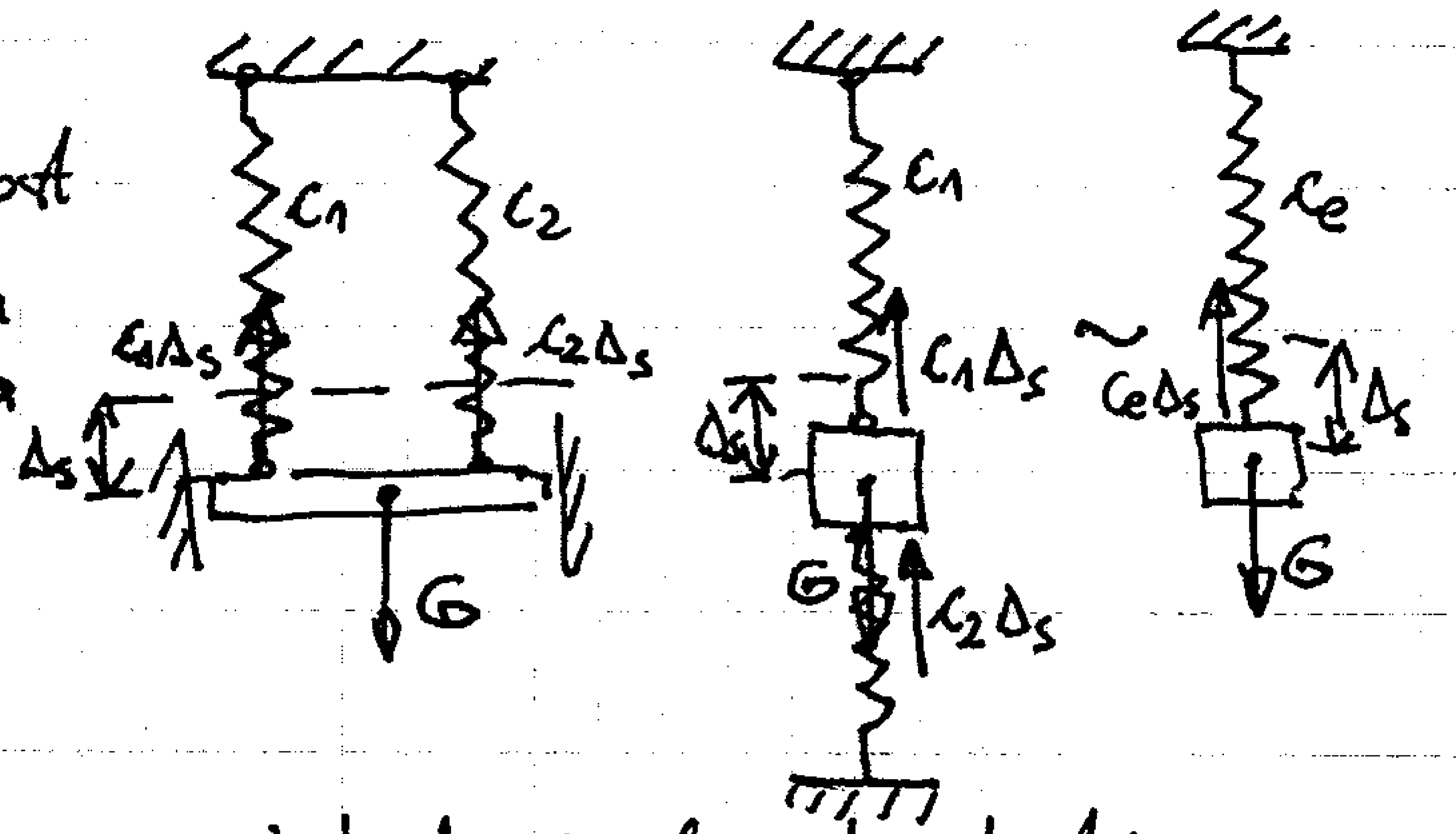
$$\rightarrow \boxed{c_e=\frac{48EI}{l^3}}$$

E – modul elastičnosti grede

I – moment inercije površine poprečnog presjeka grede u odnosu na osu oko koje se vrši savijanje.

4.1.2. Ekvivalentna krutost opružnog sistema

1) Paralelna veza

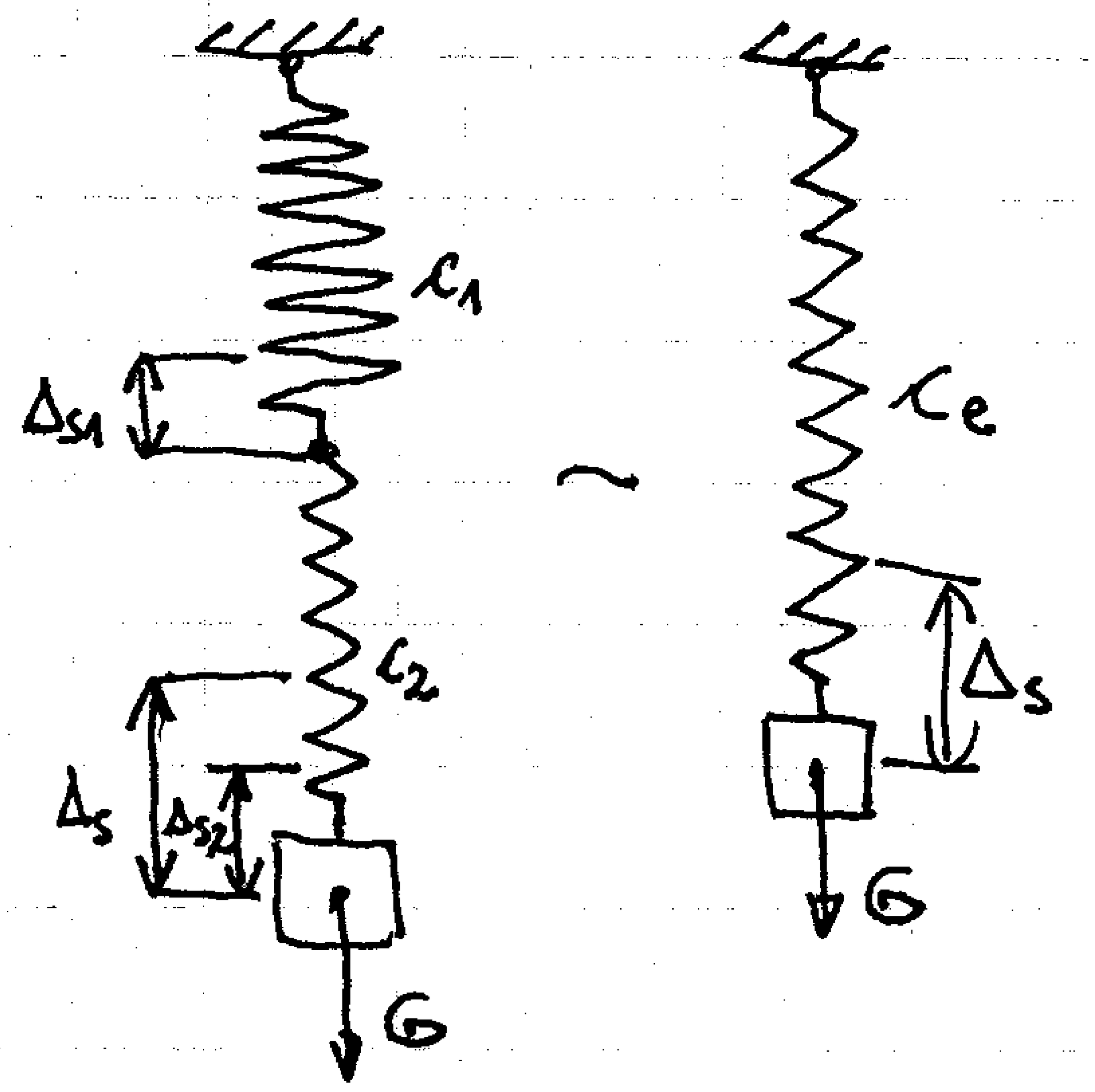


Paralelnu vezu karakteriše jednakost veličina deformacija opruga. Dva moguća načina ovakvog sprezanja prikazana su na slici.

$$\left.\begin{array}{l} G = c_1\Delta_s + c_2\Delta_s \\ G = c_e\Delta_s \end{array}\right\} \rightarrow \boxed{c_e = c_1 + c_2}$$

Ekvivalentna krutost paralelno vezanih opruga jednaka je zbiru krutosti pojedinih opruga.

2) Redna veza



Redna veza se dobija kada početak jedne opruge vežemo za kraj druge. Ukupno statičko izduženje jednako je zbiru statičkih izduženja pojedinih opruga, tj.

$$\Delta_s = \Delta_{s1} + \Delta_{s2}$$

a pošto obje opruge opterećuje ista sila G, biće

$$\Delta_{s1} = \frac{G}{c_1}, \quad \Delta_{s2} = \frac{G}{c_2},$$

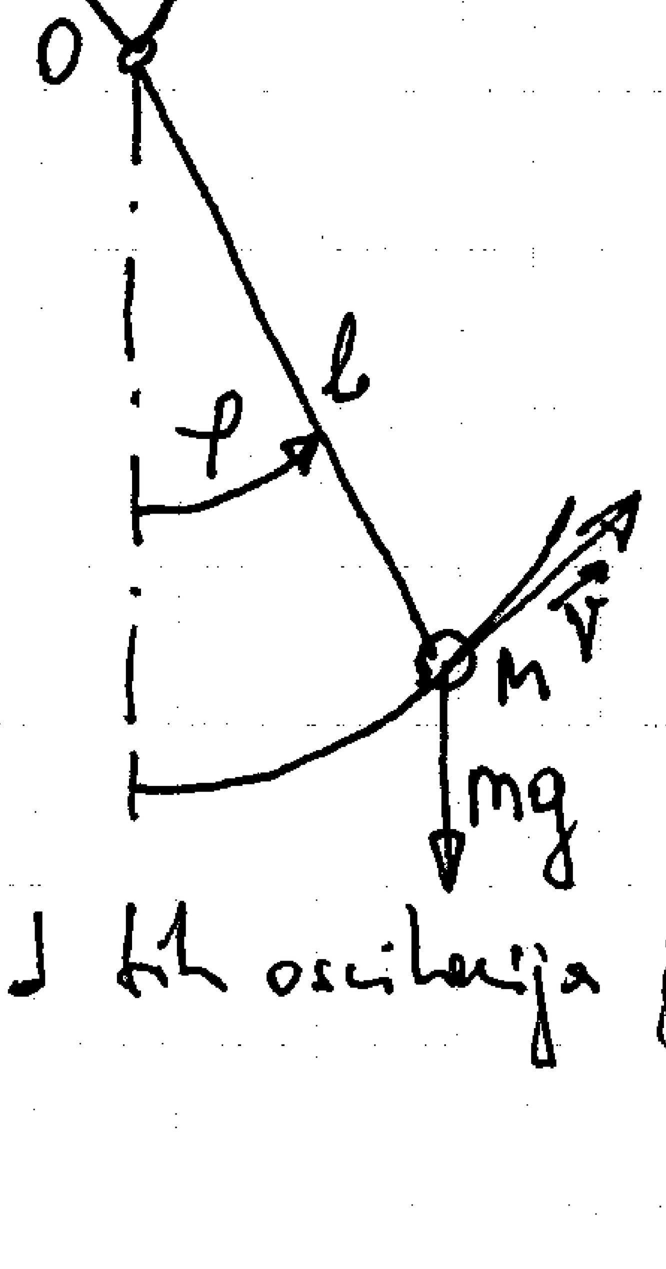
odnosno

$$\Delta_s = G\left(\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2}\right)$$

Za ekvivalentnu oprugu je $\Delta_s = \frac{G}{c_e}$, pa je $\boxed{\frac{1}{c_e} = \frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2}}$

Recipročna vrijednost ekvivalentne krutosti redno vezanih opruga jednaka je zbiru recipročnih vrijednosti krutosti pojedinih opruga.

4.1.3. Male oscilacije matematičkog klatna



Diferencijalna jednačina kretanja je (v. 2.3)

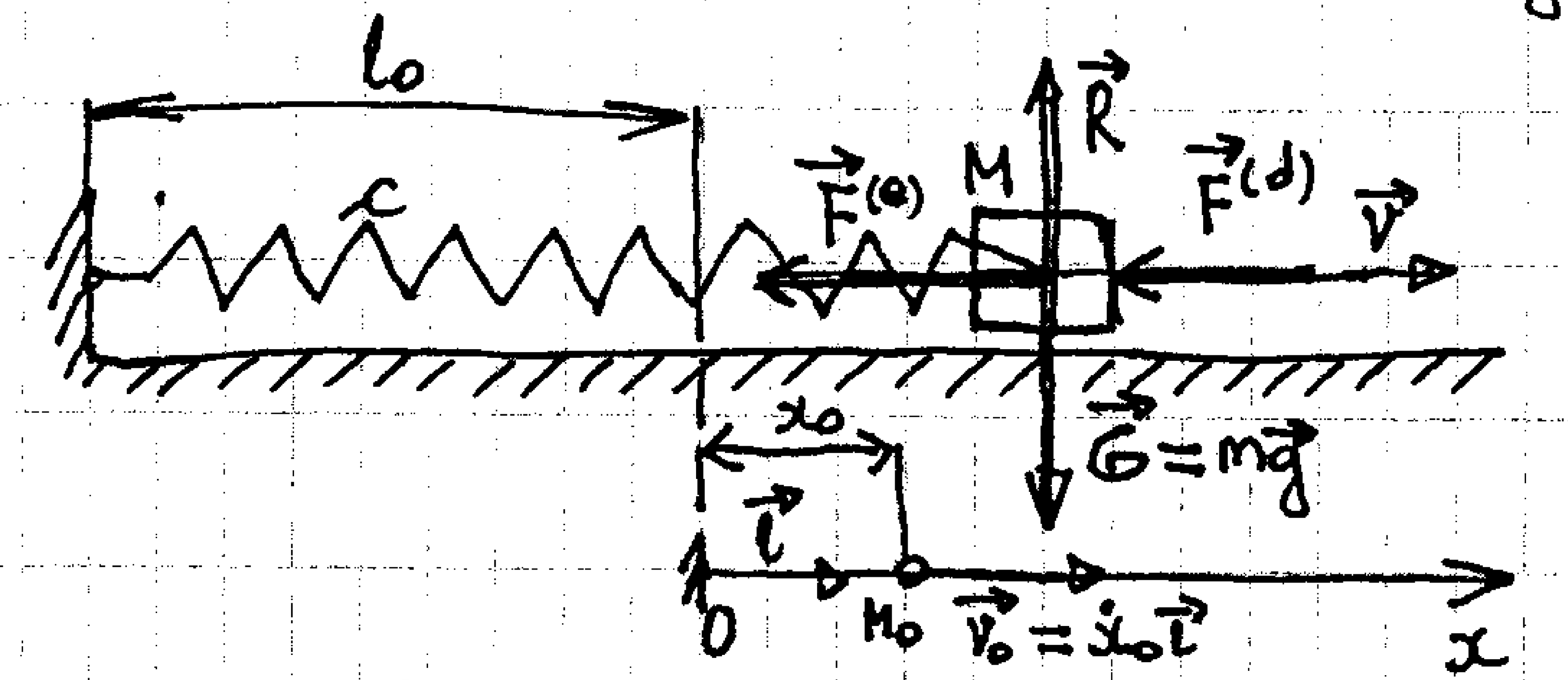
$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\sin\varphi = 0$$

i ona je, dakle, nelinearna dif. jednačina. Za mala kretanja u okolini ravnotežnog položaja $\varphi=0$ (ugao φ se mijenja u malim granicama) može se uzeti da je $\sin\varphi \approx \varphi$ i prethodna jednačina zamijeniti, sa zadovoljavajućim stepenom tačnosti, prostijom – linearnom dif. jednačinom

$$\ddot{\varphi} + \omega^2\varphi = 0, \quad \omega^2 = \frac{g}{l}$$

koja je istog oblika kao i dif. jednačina (1). Ova jednačina opisuje male oscilacije matematičkog klatna. Period tih oscilacija je $T_\omega = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$.

4.2. Uticaj sile otpora na slobodne oscilacije (Slobodne prigušene oscilacije)



Neka, u ranije razmatranom modelu opružnog oscilatora, na materijalnu tačku u pravcu kretanja, pored elastične sile $\vec{F}^{(e)}$, dejstvuje i sila viskoznog trenja

$$\vec{F}^{(d)} = -\beta\vec{v}, \ \beta - const > 0$$

$$m\vec{a} = \vec{F}^{(e)} + \vec{G} + \vec{F}^{(d)} + \vec{R} \longrightarrow m\ddot{x} = -cx - \beta\dot{x}$$

$$\longrightarrow \ddot{x} + 2n\dot{x} + \omega^2 x = 0, \ n = \frac{\beta}{2m}, \ \omega^2 = \frac{c}{m} \quad (1) - \text{dif. jed. kretanja}$$

$$\xrightarrow{x=e^{\lambda t}} \lambda^2 + 2n\lambda + \omega^2 = 0 \quad (2) - \text{karakteristična jednačina dif. jed. (1)}$$

$$\lambda_{1,2} = -n \pm \sqrt{n^2 - \omega^2} \quad (3) - \text{korijeni karakteristične jednačine}$$

Karakter kretanja je određen prirodom korijena $\lambda_{1,2}$ jednačine (3).

a) <u>$n < \omega$.</u> Slučaj malog prigušenja – kvaziperiodično oscilatorno kretanje

U ovom slučaju korijeni karakteristične jednačine su konjugovano kompleksni brojevi sa negativnim realnim dijelovima, tj

$$\lambda_{1,2} = -n \pm i p, \ p = \sqrt{\omega^2 - n^2} > 0$$

Opšte rješenje dif. jed. (1)

$$x = C_1' e^{\lambda_1 t} + C_2' e^{\lambda_2 t} = e^{-nt}(C_1' e^{ipt} + C_2' e^{-ipt})$$

može se transformisati na oblik

$$x = e^{-nt}(C_1 \cos pt + C_2 \sin pt), \quad (4)$$

odnosno,

$$x = R e^{-nt} \sin(pt + \alpha) \quad (5)$$

gdje su nove integracione konstante R i α uvedene posredstvom smjena

$$\begin{matrix} C_1 = R\sin\alpha \\ C_2 = R\cos\alpha \end{matrix} \longleftrightarrow R = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}, \ \sin\alpha = \frac{C_1}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}}, \ \cos\alpha = \frac{C_2}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}}$$

Za početne uslove: $t_0 = 0, x(t_0) = x_0, \dot{x}(t_0) = \dot{x}_0$, dobijamo

$$C_1 = x_0, \ C_2 = \frac{\dot{x}_0 + n x_0}{p}$$

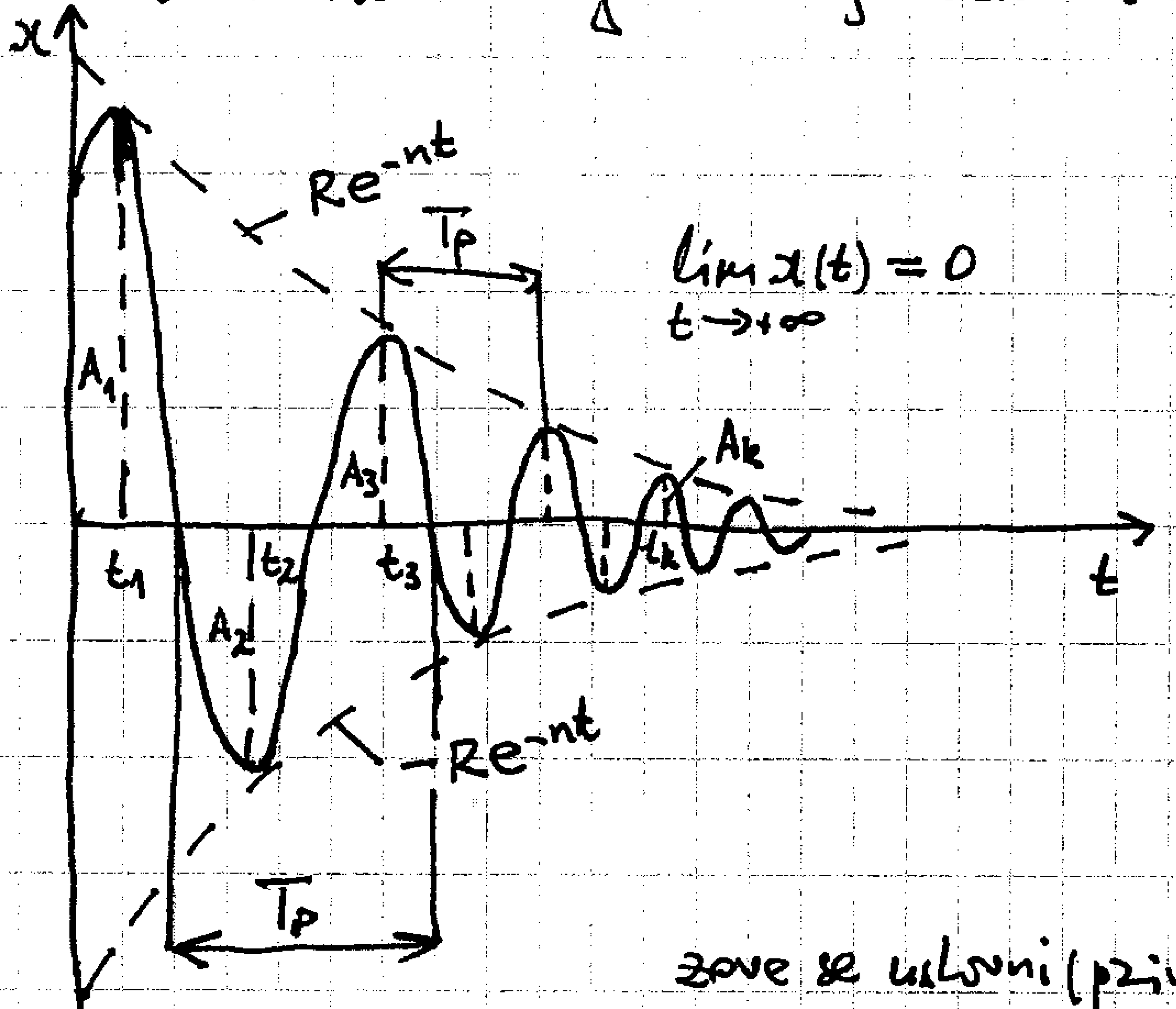
pa je konačna jednačina kretanja

$$x = e^{-nt}\left(x_0 \cos pt + \frac{\dot{x}_0 + n x_0}{p} \sin pt\right), \quad (6)$$

odnosno

$$x = R e^{-nt} \sin(pt + \alpha), \ R = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{\dot{x}_0 + n x_0}{p}\right)^2}, \ \sin\alpha = \frac{x_0}{R}, \ \cos\alpha = \frac{\dot{x}_0 + n x_0}{Rp} \quad (7)$$

(7) $\rightarrow$ $|x(t)| \le Re^{-nt}$, pa se grafik kretanja nalazi u oblasti koju ograničavaju krive $x = \pm Re^{-nt}$. Za slučaj kada je $x_0>0$ i $\dot{x}_0>0$ grafik kretanja je prikazan na slici. Vidi se da je kretanje oscilatornog karaktera, ali nije periodično jer se amplitude (maksimalna udaljenja tačke sa jedne ili druge strane od centra oscilovanja) smanjuju tokom kretanja. Zbog toga se ove oscilacije zovu <u>prigušene</u>.



Iako kretanje nije periodično, ovakve oscilacije ipak imaju svojstvo izvjesnog ponavljanja. Tako će trenuci prolaska tačke kroz centar oscilovanja, s desne ili lijeve strane, periodički ponavljaju poslije vremenskog intervala T_p koji je jednak periodu funkcije $\sin(pt+\alpha)$. Iz tog razloga veličina

$$T_p = \frac{2\pi}{p} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega^2-n^2}} \qquad (8)$$

zove se uslovni (prividni) period oscilacija.

$$(8) \longrightarrow T_p = \frac{2\pi}{\omega}\,\frac{1}{\sqrt{1-\psi^2}}, \quad \psi = \frac{n}{\omega} \text{ - bezdimenzijski koeficijent prigušenja } (0<\psi<1)$$

$\frac{2\pi}{\omega} = T_\omega$ - period odgovarajućih neprigušenih oscilacija

$$\longrightarrow \frac{T_p}{T_\omega} = \frac{1}{\sqrt{1-\psi^2}} \longrightarrow \text{viskozni otpor povećava period oscilovanja}$$

Za vrlo mali otpor ($\psi \ll 1$) je $T_p \approx T_\omega$, tj veoma mali otpor praktično ne utiče na period.

Trenuci dostizanja amplituda odredjuju se iz jednačine

$$\dot{x}(t) = Re^{-nt}\left[p\cos(pt+\alpha) - n\sin(pt+\alpha)\right] = 0,$$

odakle slijedi

$$t_k = \frac{1}{p}\left[\operatorname{arctg}\frac{p}{n} - \alpha + (k-1)\pi\right], \quad k = 1,2,3,\dots;$$

pa su amplitude $A_k = |x(t_k)|$.

Očigledno je

$$t_{k+1} = t_k + \frac{\pi}{p} = t_k + \frac{T_p}{2},$$

tj. vremenski razmak između dvije susjedne amplitude jednak je polovini perioda prigušenih oscilacija.

Kao mjera brzine prigušivanja oscilacija uzima se odnos dvije uzastopne amplitude — <u>dekrement prigušenog oscilacije</u>, tj.

$$d = \frac{A_k}{A_{k+1}} = \frac{|x(t_k)|}{|x(t_{k+1})|} \overset{(7)}{=} e^{\frac{n\pi}{p}} = e^{\frac{nT_p}{2}}, \qquad (9)$$

odnosno logaritamski dekrement

$$\mathcal{D} = \ln d \overset{(9)}{=} \frac{n\pi}{p} \qquad (10)$$

Iz (9) slijedi da amplitude opadaju po zakonu geometrijske progresije.

Uzmimo, na primjer, da je bezdimenzijski koeficijent prigušenja $\psi = 0,2$. Tada je

$$\frac{T_p}{T_\omega} = \frac{1}{\sqrt{1-\psi^2}} = 1,02$$

i

$$\frac{n\pi}{p} = \frac{n\pi}{\sqrt{\omega^2-n^2}} = \frac{\psi}{\sqrt{1-\psi^2}}\pi = 0,61$$

pa je
$$d = e^{0,61} = 1,85$$

Deveta po redu amplituda, koju tačka dostiže po isteku vremenskog intervala od četiri perioda oscilovanja ($4T_p$) od trenutka prve amplitude, jednaka je $A_9 = d^{-8} A_1$, odnosno

$$A_9 = 0,007\,A_1,$$

tj. iznosi svega 0,7% od prve amplitude.

Prema tome, možemo zaključiti da mali otpor veoma malo utiče na promjenu perioda slobodnih oscilacija, ali veoma intezivno prigušuje oscilatorno kretanje, tako da se po isteku vremena od nekoliko perioda može praktično smatrati da je kretanje prestalo.

b) $n > \omega$ Slučaj velikog otpora – aperiodično kretanje

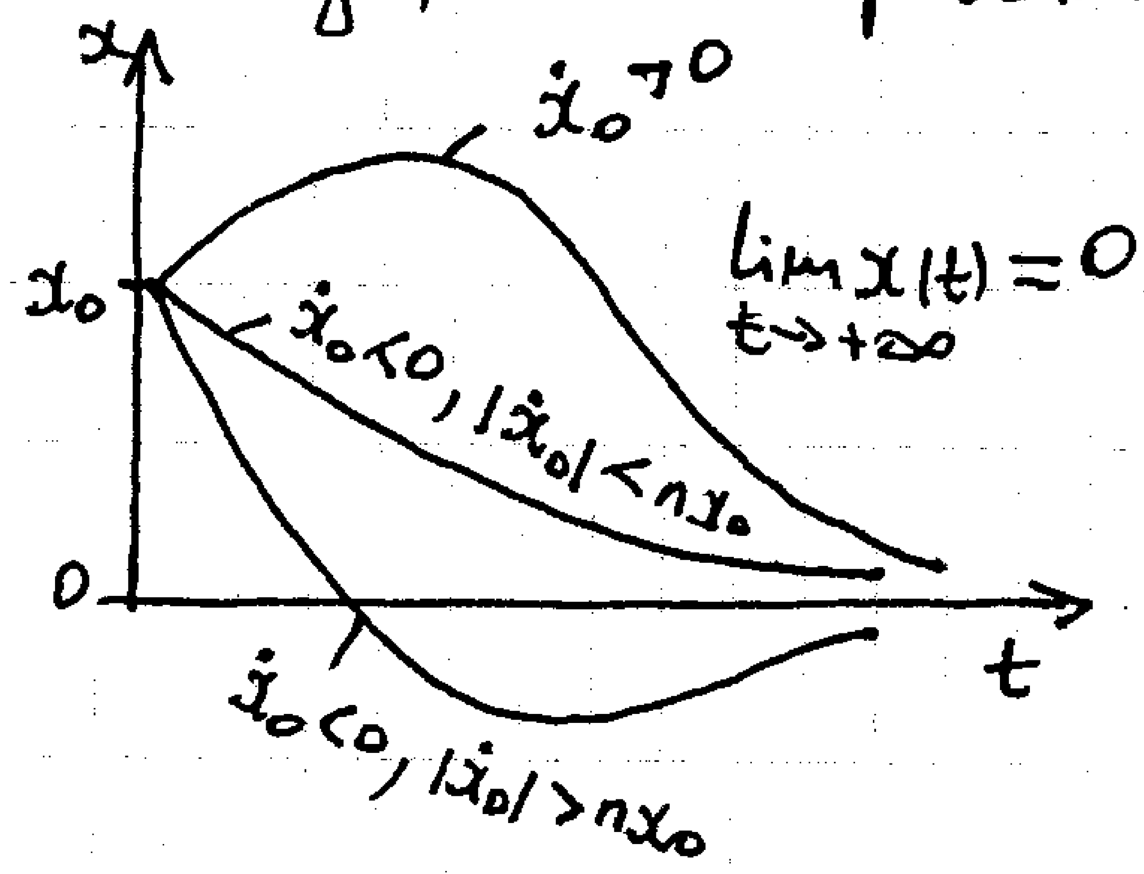
U ovom slučaju korijeni karakteristične jednačine (3) su realni, različiti i negativni

$$\lambda_{1,2} = -n \pm r, \quad r = \sqrt{n^2-\omega^2} > 0$$

pa opšte rješenje diferencijalne jednačine kretanja ima oblik

$$x = e^{-nt}\left(C_1 e^{rt} + C_2 e^{-rt}\right) \qquad (11)$$

Konstante integraljenja C_1 i C_2 određuju se iz početnih uslova. Grafički prikaz kretanja, zavisno od početnih uslova, ~~prikaz~~ dat je na slici. Očigledno je da je kretanje neoscilatorno i potpuno neperiodično (aperiodično)



c) $n = \omega$ Granični slučaj (kritično prigušenje)

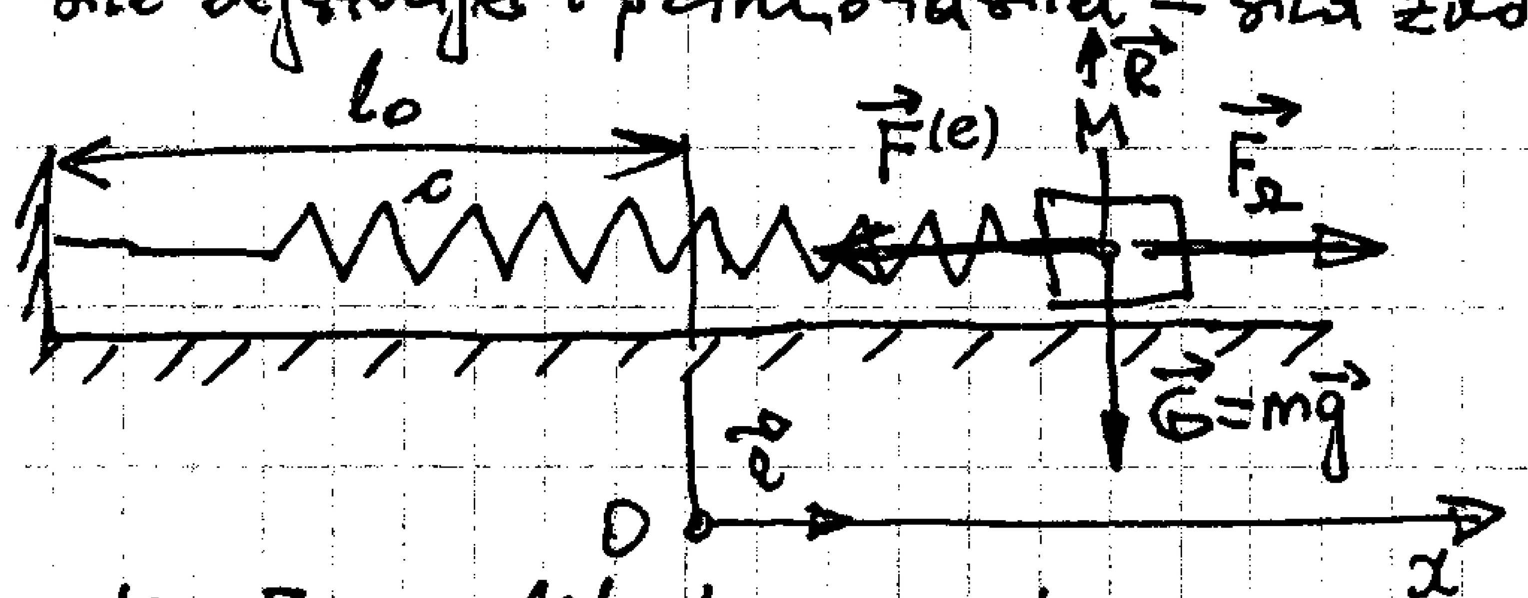
U ovom slučaju korijeni karakteristične jednačine (3) su realni, negativni i jednaki, tj. $\lambda_{1,2} = -n$, pa je, u skladu sa teorijom linearnih diferencijalnih jednačina, opšte rješenje

$$x = (C_1 t + C_2)e^{-nt} \qquad (12)$$

Grafici kretanja su sličnog oblika kao u slučaju velikog prigušenja, te je i u ovom slučaju kretanje neoscilatorno i aperiodično.

4.3. Prinudne neprigušene oscilacije

Prinudne neprigušene oscilacije nastaju kada na materijalnu tačku pored elastične sile dejstvuje i prinudna sila – sila zadana kao eksplicitna funkcija vremena.



Razmotrićemo važan slučaj kada su prinudne oscilacije izazvane dejstvom periodične prinudne sile koja je harmonijska funkcija vremena

$$\vec F_\Omega = F_0 \sin \Omega t\, \vec i,$$

gdje F_0 amplituda prinudne (poremećajne) sile, a Ω kružna frekvencija.

$$m\vec a = \vec F^{(e)} + \vec F_\Omega + \vec G + \vec R \;\rightarrow\; m\ddot x = -cx + F_0 \sin \Omega t$$

$$\rightarrow \qquad \ddot x + \omega^2 x = h \sin \Omega t, \quad \omega^2 = \frac{c}{m}, \; h = \frac{F_0}{m} \qquad (1)$$

Jednačina (1), koja predstavlja diferencijalnu jednačinu prinudnih neprigušenih oscilacija, je linearna nehomogena dif. jednačina drugog reda. Njeno opšte rješenje je

$$x = x_h + x_p \qquad (2)$$

gdje je

$$x_h = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t \qquad (3)$$

opšte rješenje homogene jednačine $\ddot x + \omega^2 x = 0$, a x_p partikularno rješenje jednačine (1). Partikularno rješenje tražimo u obliku

$$x_p = C \sin \Omega t \qquad (4)$$

gdje je C konstanta koja se bira tako da funkcija (4) zadovoljava jednačinu (1).

$$(4) \text{ u } (1) \longrightarrow C(\omega^2 - \Omega^2) \sin \Omega t = h \sin \Omega t$$

$$\longrightarrow \quad C = \frac{h}{\omega^2 - \Omega^2}, \quad \omega \neq \Omega \qquad (5)$$

$$\longrightarrow \quad x_p = \frac{h}{\omega^2 - \Omega^2} \sin \Omega t \qquad (6)$$

$$(2) \xrightarrow{(3),(6)} \quad x = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t + \frac{h}{\omega^2 - \Omega^2} \sin \Omega t \qquad (7) \text{ - opšte rješenje jed. } (1)$$

Iz početnih uslova: $t_0 = 0$, $x(t_0) = x_0$, $\dot x(t_0) = \dot x_0$, nalazi se

$$C_1 = x_0, \quad C_2 = \frac{\dot x_0}{\omega} - \frac{\Omega}{\omega} \frac{h}{\omega^2 - \Omega^2}$$

pa je

$$x = x_0 \cos \omega t + \frac{\dot x_0}{\omega} \sin \omega t - \frac{\Omega}{\omega} \frac{h}{\omega^2 - \Omega^2} \sin \omega t + \frac{h}{\omega^2 - \Omega^2} \sin \Omega t \qquad (8)$$

jednačina kretanja materijalne tačke.

Prva dva sabirka na desnoj strani jednačine (8) određuju slobodne neprigušene oscilacije, izazvane početnim uslovima, koje bi vršila materijalna tačka i u odsustvu prinudne sile. Treći član izraza (8) je mješovitog tipa i određuje harmonijske oscilacije čija je kružna frekvencija jednaka kružnoj frekvenciji slobodnih oscilacija, ali su izazvane dejstvom prinudne sile i ne zavise od početnih uslova. Četvrti član

$$x_p = \frac{h}{\omega^2 - \Omega^2} \sin \Omega t \qquad (6)$$

određuje oscilacije koje su isključivo posledica dejstva prinudne sile i one se zovu prinudne oscilacije.

Prinudne oscilacije (6) ne zavise od početnih uslova, imaju istu kružnu frekvenciju Ω kao i prinudna sila, a amplituda im je

$$P = \frac{h}{|\omega^2 - \Omega^2|} \qquad (9)$$

Izraz (6) se može napisati u obliku

$$x_p = \begin{cases} P\sin\Omega t, & \Omega < \omega \\ -P\sin\Omega t = P\sin(\Omega t + \pi), & \Omega > \omega \end{cases}$$

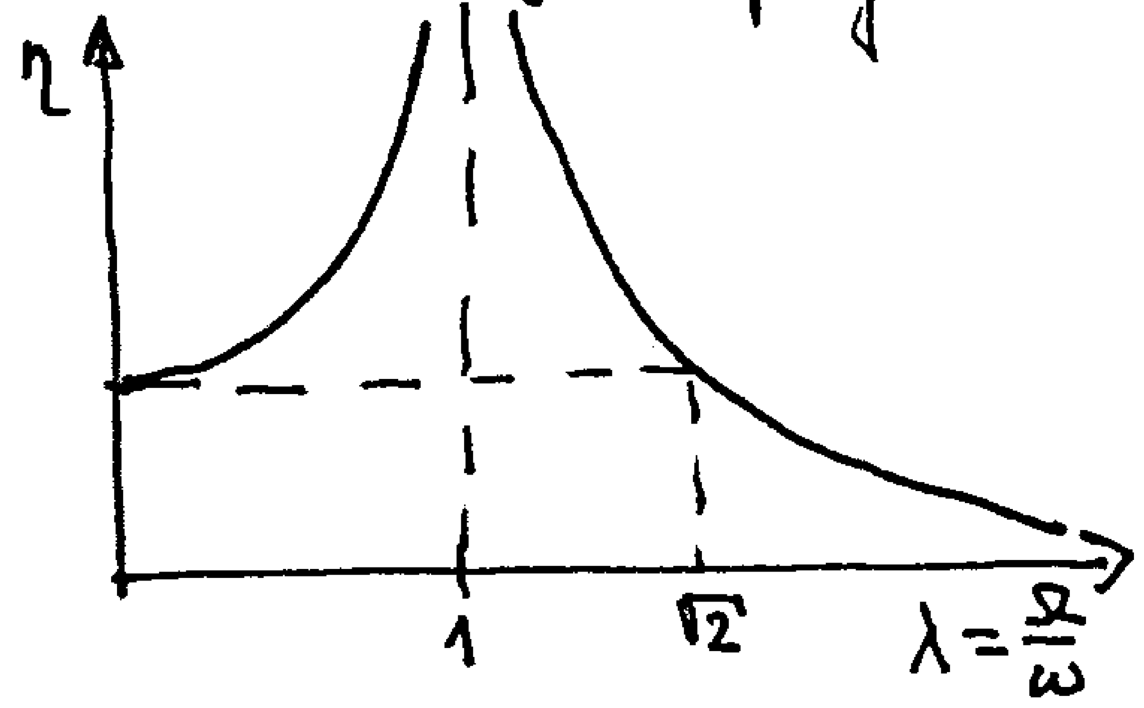
što znači da ako je $\Omega < \omega$ pomjeranje x_p i prinudna sila su istog znaka (odnosno u istoj su fazi); ako je $\Omega > \omega$ to će smjer pomjeranja tačke i smjer sile biti suprotni (odnosno one su u antifazi – razlikuju se u fazi za π).

Interesantno je pratiti tok promjene amplitude prinudnih oscilacija sa promjenom kružne frekvencije prinudne sile.

$$(9) \rightarrow P = \frac{h/\omega^2}{|1-(\Omega/\omega)^2|} = \frac{x_s}{|1-\lambda^2|}$$

gdje je $\lambda = \Omega/\omega$ koeficijent poremećaja, a $x_s = h/\omega^2 \overset{(1)}{=} F_0/c = \Delta_s$ – statičko izduženje opruge pod dejstvom konstantne sile F_0 (statičko pomjeranje ili "statička amplituda"). Odnos amplitude prinudnih oscilacija i statičke amplitude naziva se koeficijent dinamičnosti ili dinamički faktor pojačavanja.

$$\eta = \frac{P}{x_s} = \frac{1}{|1-\lambda^2|} \qquad (10)$$



$\eta(\lambda = 0) = 1 \ (P = x_s)$

$0 < \lambda < 1 \rightarrow \quad \eta > 1 \ (P > x_s)$

$1 < \lambda \leq \sqrt{2} \rightarrow \quad \eta \geq 1 \ (P \geq x_s)$

$\sqrt{2} < \lambda \quad \rightarrow \quad \eta < 1 \ (P < x_s); \ \lim_{\lambda\to\infty} \eta(\lambda) = 0$

Kada je $\lambda = 1$ ($\Omega = \omega$) amplituda prinudnih oscilacija raste neograničeno. Ova pojava se naziva <u>rezonancija</u>.

4.3.1. Rezonancija

Rezonancija nastaje kada je kružna frekvencija slobodnih oscilacija ω jednaka kružnoj frekvenciji prinudne sile Ω. U tom slučaju partikularno rješenje (6) koje određuje prinudnu oscilaciju, gubi smisao pa se ono traži u drugom obliku

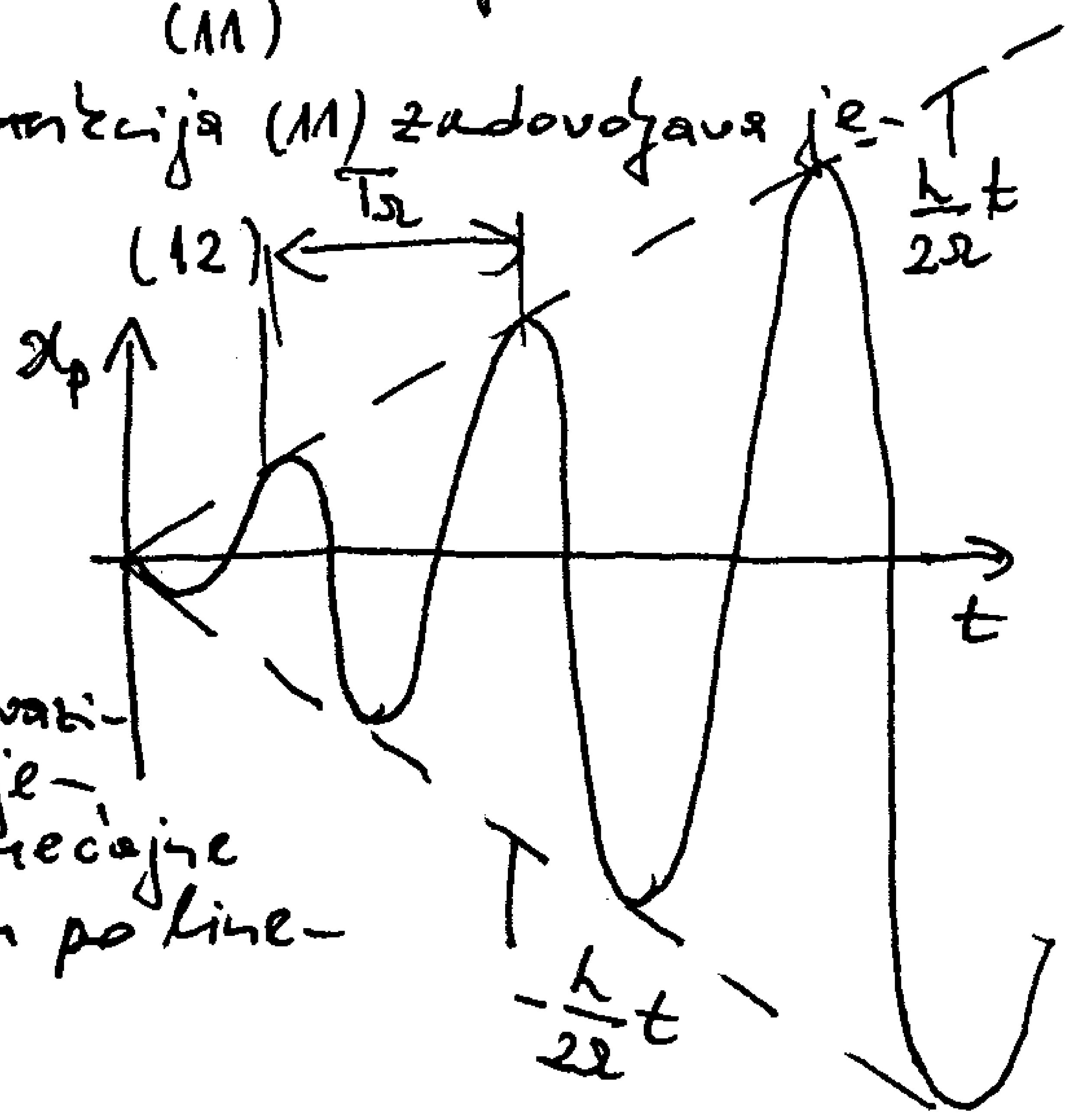
$$x_p = Ct\cos\Omega t \qquad (11)$$

gdje je C konstanta koju treba odrediti tako da ~~fu~~nkcija (11) zadovoljava jednačinu

$$\ddot{x} + \Omega^2 x = h\sin\Omega t \qquad (12)$$

(11) u $(12) \rightarrow C = \frac{-h}{2\Omega}$

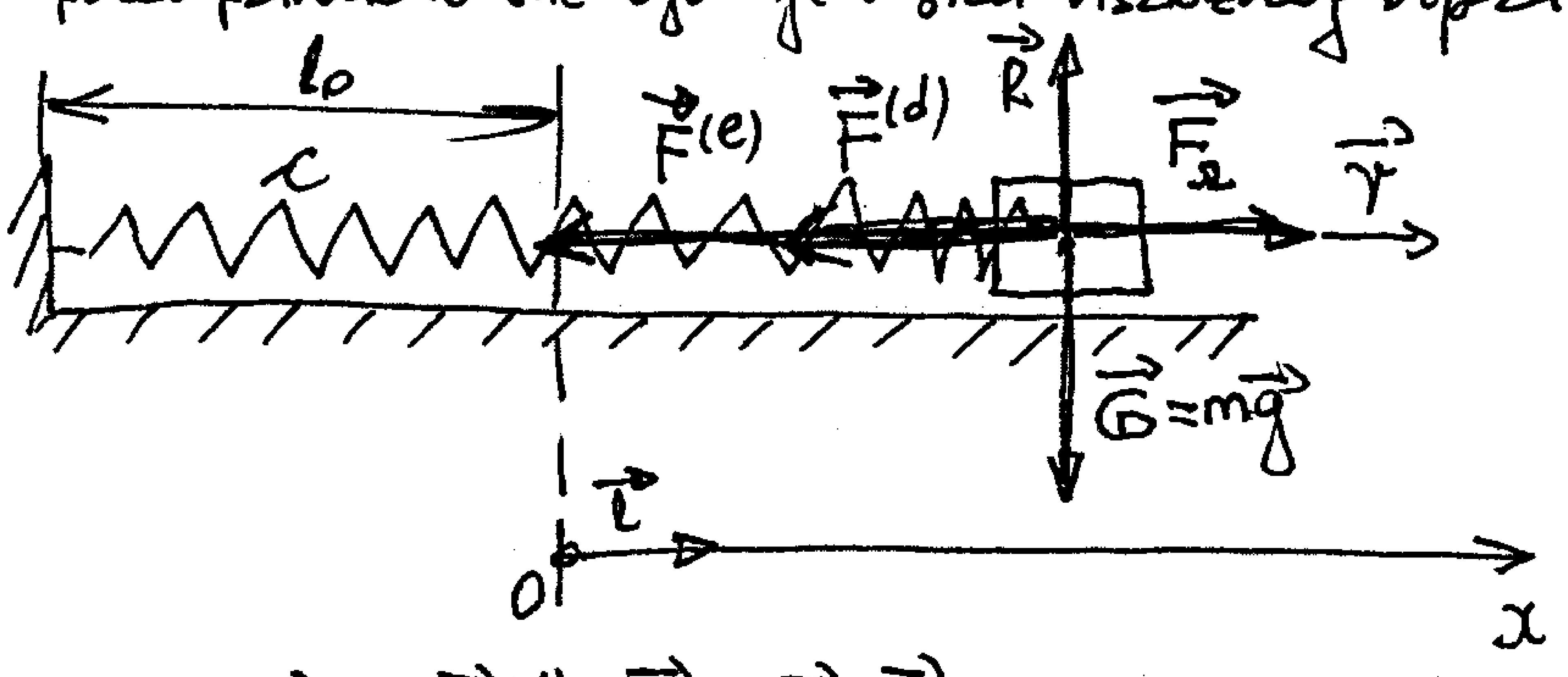
$$\rightarrow \quad x_p = -\frac{h}{2\Omega}t\cos\Omega t = \frac{h}{2\Omega}t\sin\left(\Omega t - \frac{\pi}{2}\right)$$



Prinudna oscilacija u slučaju rezonancije, predstavlja kvaziperiodično oscilatorno kretanje sa uslovnim periodom jednakim $T_\Omega = 2\pi/\Omega$) fazom koja zaostaje za fazom poremećajne sile za $\frac{\pi}{2}$ i amplitudama koje u toku vremena rastu po linearnom zakonu.

4.4. Uticaj sile otpora na prinudne oscilacije (Prinudne prigušene oscilacije)

Neka na materijalnu tačku, mase m, koja je vezana za elastičnu oprugu krutosti c pored prinudne sile djeluje i sila viskoznog otpora.



$$\vec{F}^{(e)} = -cx\vec{i}$$
$$\vec{F}_\Omega = F_0 \sin \Omega t \, \vec{i}$$
$$\vec{F}^{(d)} = -\beta \vec{v} = -\beta \dot{x} \vec{i}$$

$$m\vec{a} = \vec{F}^{(e)} + \vec{F}^{(d)} + \vec{F}_\Omega + \vec{G} + \vec{R} \rightarrow m\ddot{x} = -cx - \beta\dot{x} + F_0 \sin \Omega t$$

$$\rightarrow \ddot{x} + 2n\dot{x} + \omega^2 x = h \sin \Omega t, \quad n = \frac{\beta}{2m}, \quad \omega^2 = \frac{c}{m}, \quad h = \frac{F_0}{m} \qquad (1)$$ - dif. jed. kretanja

$$x = x_h + x_p$$

$$x_h = \begin{cases} R e^{-nt} \sin(\sqrt{\omega^2 - n^2}\, t + \alpha), & n < \omega \\ e^{-nt}\left(C_1 e^{\sqrt{n^2-\omega^2}\, t} + C_2 e^{-\sqrt{n^2-\omega^2}\, t}\right), & n > \omega \\ (C_1 + C_2 t) e^{-nt}, & n = \omega \end{cases} \qquad (2)$$ - opšte rješenje homogene jednačine

Partikularno rješenje jednačine (1) tražimo u obliku

$$x_p = P \sin(\Omega t - \gamma) \qquad (3)$$

$$(2) \text{ u } (1) \rightarrow P(\omega^2 - \Omega^2)\sin(\Omega t - \gamma) + 2nP\Omega \cos(\Omega t - \gamma) = h \sin(\Omega t - \gamma + \gamma)$$
$$= h\cos\gamma \sin(\Omega t - \gamma) + h \sin\gamma \cos(\Omega t - \gamma)$$

$$\rightarrow \left.\begin{aligned} P(\omega^2 - \Omega^2) &= h\cos\gamma \\ 2nP\Omega &= h \sin\gamma \end{aligned}\right\} \rightarrow P = \frac{h}{\sqrt{(\omega^2 - \Omega^2)^2 + 4n^2\Omega^2}}, \quad tg\gamma = \frac{2n\Omega}{\omega^2 - \Omega^2} \qquad (4)$$

Prema tome, partikularno rješenje koje, inače, određuje prinudne oscilacije je

$$x_p = \frac{h}{\sqrt{(\omega^2 - \Omega^2)^2 + 4n^2\Omega^2}} \sin(\Omega t - \gamma) \qquad (5)$$

gdje je γ određeno formulom (4).

Kretanje koje odgovara opštem rješenju x_h odgovarajuće homogene dif. jednačine, kao što je pokazano u 4.2., praktično brzo iščezava tako da po isteku određenog vremenskog intervala t_u (vrijeme ustaljivanja) možemo smatrati da je $x_h(t) \approx 0$, odnosno da se kretanje svodi samo na prinudne oscilacije određene jednačinom (5) ($x(t) \approx x_p(t)$, $t > t_u$).

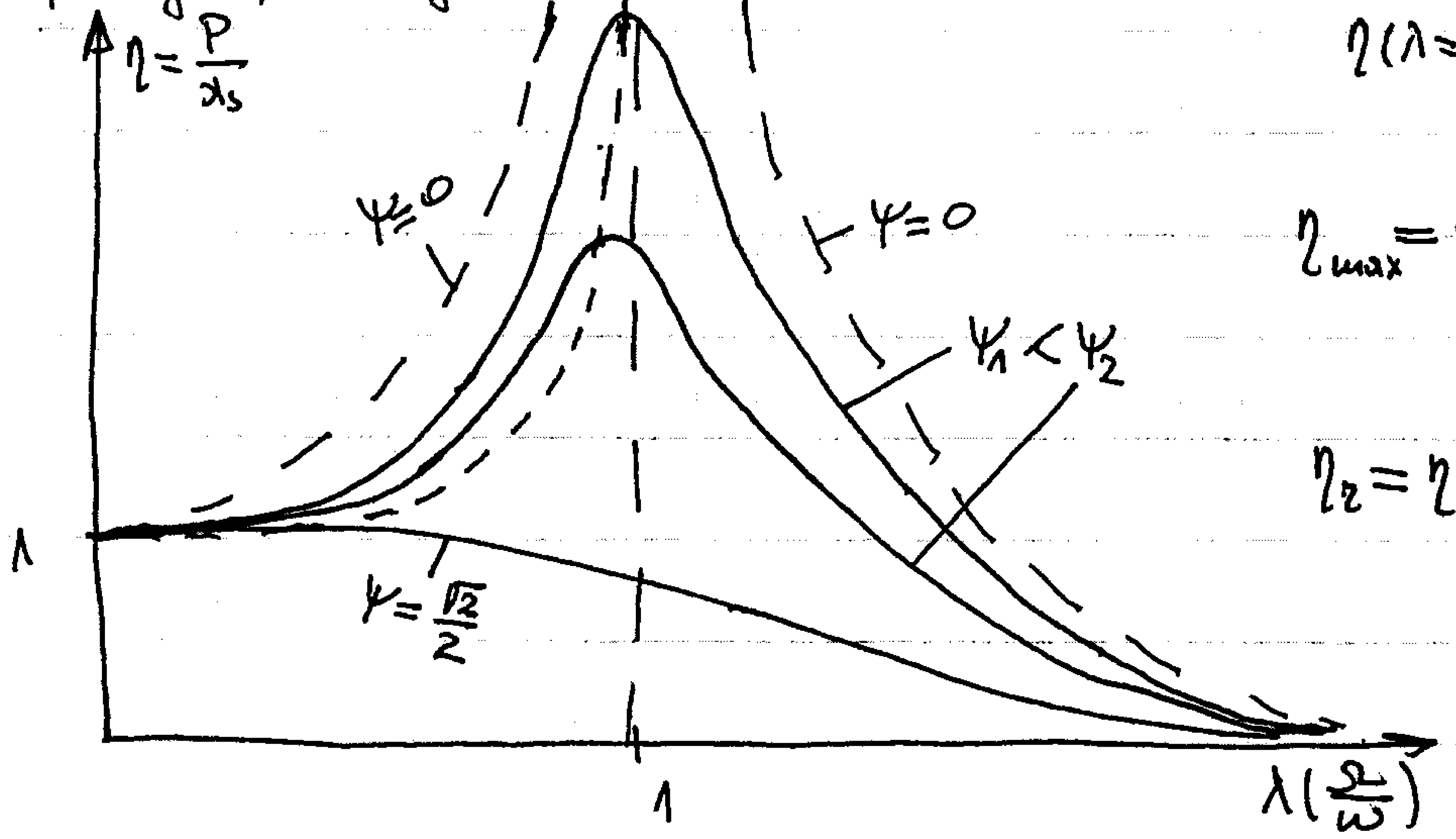
Amplituda prinudnih oscilacija može se napisati u obliku

$$P = \frac{h}{\omega^2 \sqrt{(1-\lambda^2)^2 + 4\lambda^2\psi^2}}, \quad \lambda = \frac{\Omega}{\omega}, \quad \psi = \frac{n}{\omega}$$

odakle, imajući u vidu da je $\frac{h}{\omega^2} = \frac{F_0}{c} = x_s$ - statičko pomjeranje, nalazimo dinamički faktor pojačavanja

$$\eta = \frac{P}{x_s} = \frac{1}{\sqrt{(1-\lambda^2)^2+4\lambda^2\psi^2}}$$

Zavisnost koeficijenta η od koeficijenta poremećaja, za neke vrijednosti koeficijenta prigušenja ψ, data je na slici.



$$\eta(\lambda=0)=1$$

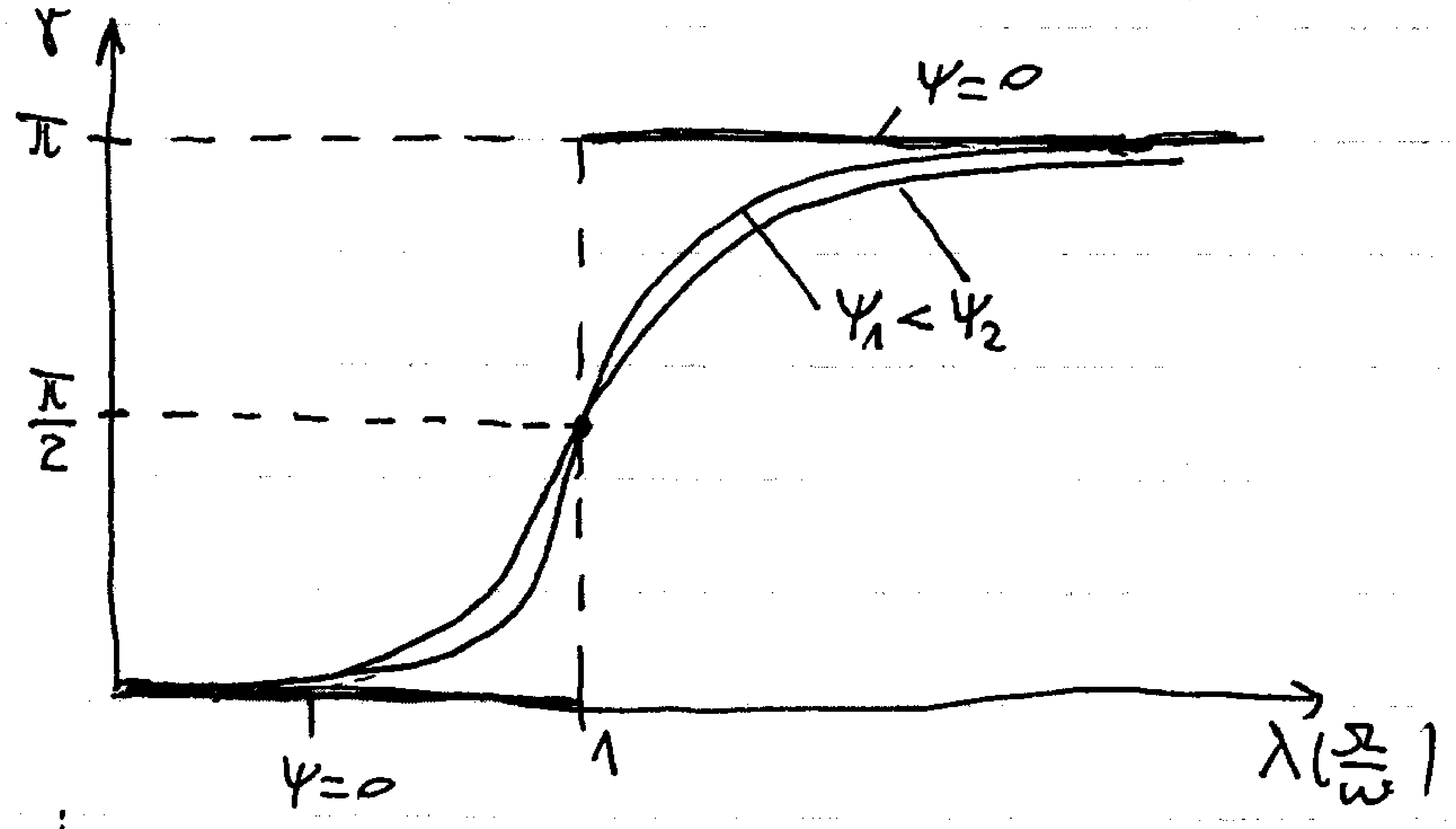
$$\eta_{max} = \begin{cases} \eta\left(\lambda=\sqrt{1-2\psi^2}\right) = \dfrac{1}{2\psi\sqrt{1-\psi^2}}, & \psi<\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \eta(\lambda=0)=1, & \psi \geq \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

$$\eta_r = \eta(\lambda=1) = \frac{1}{2\psi}, \quad \lim_{\lambda\to\infty}\eta(\lambda,\psi)=0$$

$$P = \eta x_s$$

Takođe, ugao fazne razlike γ prinudnih oscilacija u odnosu na prinudnu silu, određen izrazom (4), možemo izraziti u funkciji koeficijenata λ i ψ.

$$\gamma = \operatorname{arctg}\frac{2\lambda\psi}{1-\lambda^2}$$



$$\gamma(\lambda=0)=0$$

$$\gamma(\lambda=1)=\frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{\lambda\to\infty}\gamma(\lambda,\psi)=\pi$$

Iz ovih dijagrama, ili odgovarajućih izraza, može se zaključiti:

1) Ako je λ vrlo malo ($\lambda \ll 1$, $\Omega \ll \omega$), onda je $P \approx x_s$ i $\gamma \approx 0$ – oscilacije se vrše sa amplitudom koja je jednaka statičkom pomjeranju x_s i sa faznom razlikom $\gamma=0$.

2) Ako je $\lambda \gg 1$ ($\Omega \gg \omega$), onda je $P\approx 0$, tj. prinudne oscilacije u ovom slučaju praktično ne postoje.

3) Kada je veličina ψ mala i kada je λ blizu jedinici, amplitude imaju velike vrijednosti. U slučaju rezonancije ($\lambda=1$) biće

$$P_r = \frac{x_s}{2\psi}, \quad \gamma=\frac{\pi}{2}$$

tj. amplituda prinudne oscilacije je konačna, ali pri malom otporu veoma velika, a fazna razlika je $\gamma=\frac{\pi}{2}$.

Iz prethodnih razmatranja proističe da prinudne oscilacije posjeduju određena važna svojstva koja se razlikuju od sličnih karakteristika slobodnih oscilacija. Ta svojstva su slijedeća:

a) Amplituda prinudnih oscilacija ne zavisi od početnih uslova kretanja.

b) Prinudne oscilacije se ne amortizuju (prigušuju) tokom vremena pri postojanju otpora.

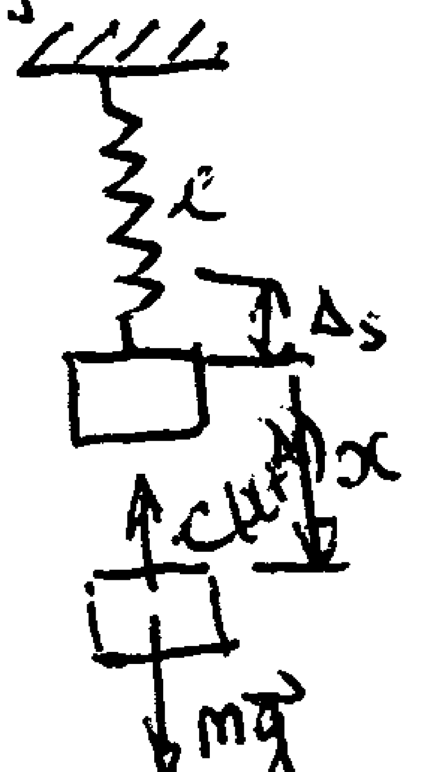
c) Frekvencija prinudnih oscilacija jednaka je frekvenciji prinudne sile.

d) Pri maloj prinudnoj sili (F_0 - malo) mogu da nastanu velike prinudne oscilacije, ako je otpor mali, i ako je frekvencija prinudne sile jednaka ili bliska frekvenciji slobodnih oscilacija.

e) Pri vrlo velikoj prinudnoj sili, prinudne oscilacije mogu da budu vrlo male, ako je frekvencija Ω mnogo veća od frekvencije ω.

Oscilacije

1. Teret mase $m = 16$ kg, obješen o oprugu krutosti $c = 4$ N/m, otkloni se naniže iz ravnotežnog položaja na rastojanje 8 cm i saopšti mu se početna brzina v_0 u vertikalnom pravcu. Kolika treba da bude početna brzina v_0 da bi harmonijske oscilacije tereta imale amplitudu $A = 10$ cm.



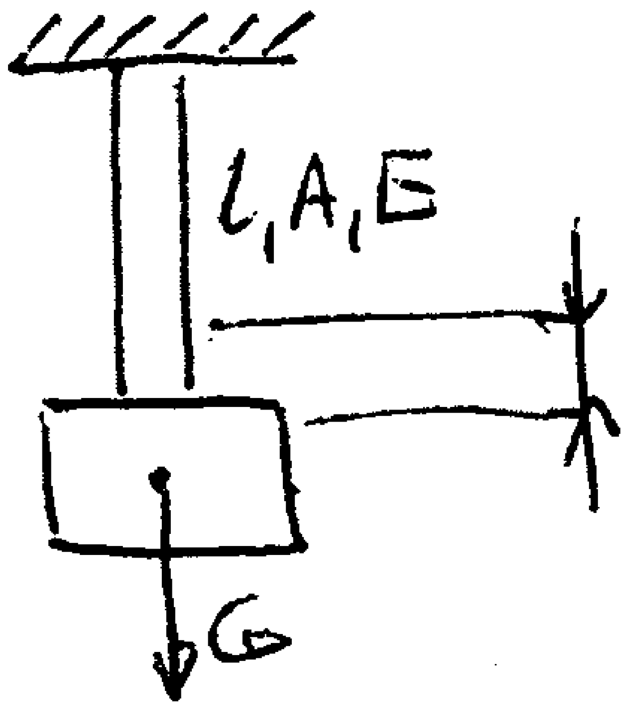
$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0, \quad \omega^2 = \frac{c}{m} \rightarrow \omega = \frac{1}{2}\ s^{-1}$$

$$x = A\sin(\omega t + \alpha)$$

$$A = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{\dot{x}_0}{\omega}\right)^2}, \quad x_0 = 8\ cm, \quad \omega = \frac{1}{2}\ rad/s; \quad A = 10\ cm \rightarrow \dot{x}_0 = \pm 3\ \frac{cm}{s}$$

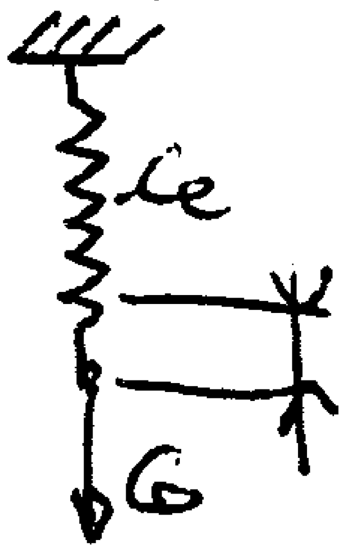
$v_0 = 3\ \frac{cm}{s}$ ili $v_0 = 3\ \frac{cm}{s}$

2. Za slobodni kraj elastičnog štapa dužine l, poprečnog presjeka A i modula elastičnosti E, učvršćen je teret težine G. Odrediti sopstvenu kružnu frekvenciju vertikalnih oscilacija tereta, ako se masa štapa može zanemariti.



$$\Delta_s = \frac{G \cdot l}{AE}$$

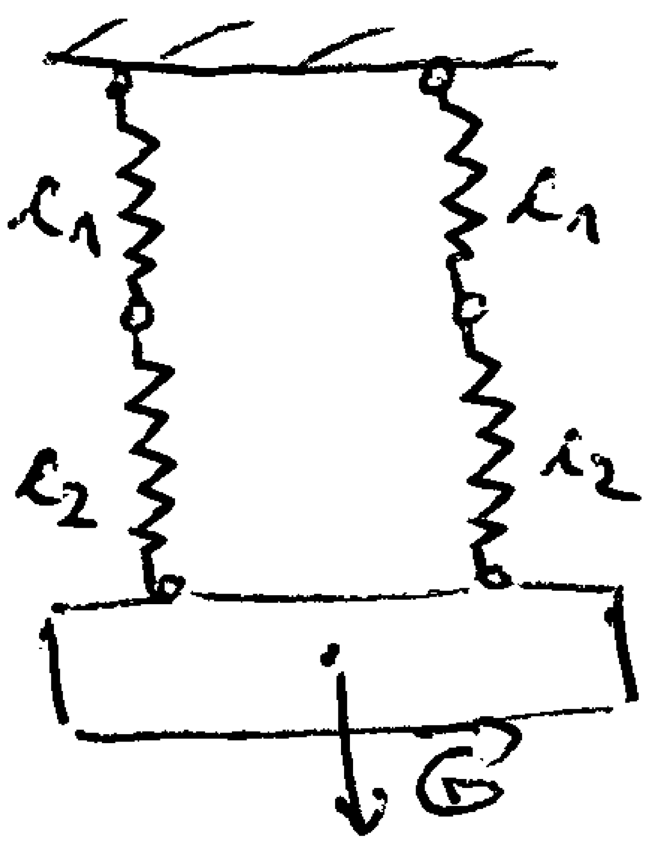
~



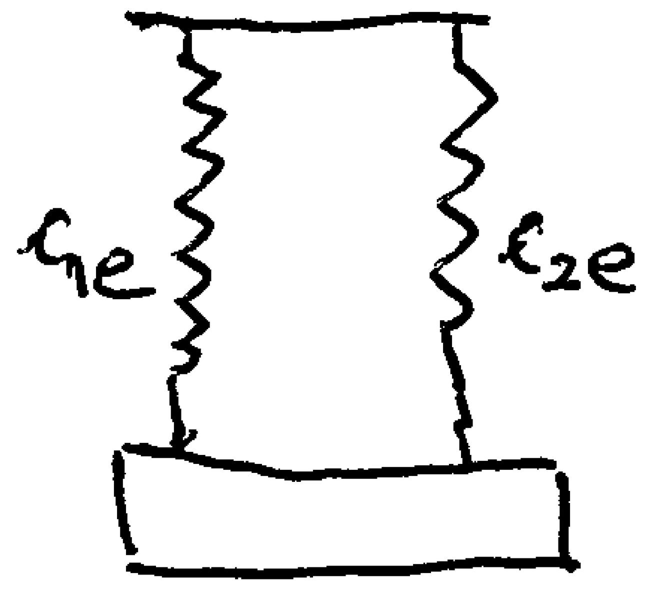
$$\Delta_s = \frac{G}{c_e}$$

$$\rightarrow c_e = \frac{AE}{l}, \quad \omega = \sqrt{\frac{c_e}{m}} = \sqrt{\frac{AEg}{lG}}$$

3. Odrediti period slobodnih vertikalnih oscilacija sistema prikazanog na slici.



~



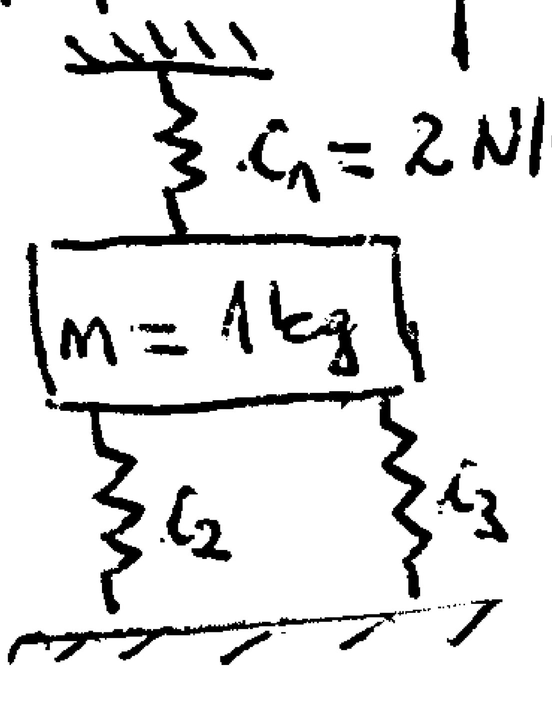
~

$$c_e = c_{1e} + c_{2e} = \frac{2c_1c_2}{c_1 + c_2}$$

$$c_{1e} = c_{2e}; \quad \frac{1}{c_{1e}} = \frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} \rightarrow c_{1e} = \frac{c_1c_2}{c_1 + c_2}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{c_e \cdot g}{G}}, \quad T_\omega = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{(c_1 + c_2)G}{2c_1c_2 g}}$$

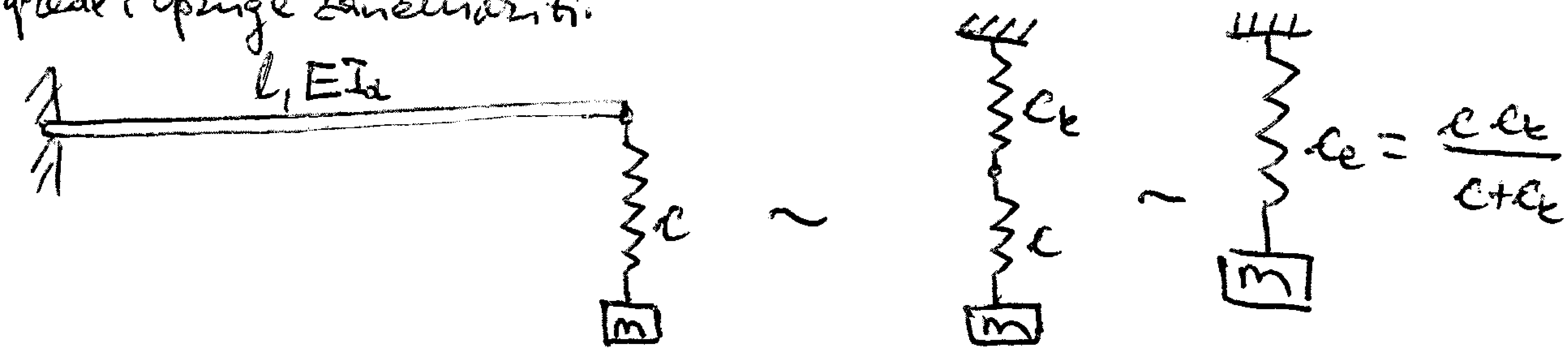
4. Odrediti frekvenciju f slobodnih vertikalnih oscilacija sistema prikazanog na slici.

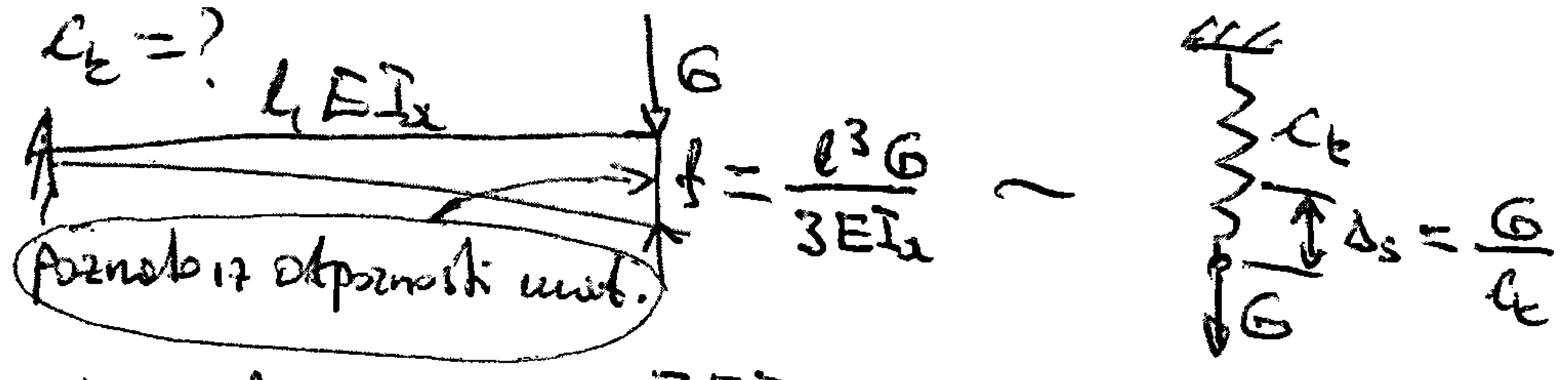


$c_2 = c_3 = 7$ N/cm

R: $f = \frac{1}{T_\omega} = \frac{20}{\pi}\ s^{-1}$ (Hz - Herca)

5. Odrediti period slobodnih vertikalnih oscilacija tereta mase $m = 500\,kg$ vezanog posredstvom opruge krutosti $c = 10^4\,N/m$ za kraj elastične konzole dužine $l = 2\,m$ i krutosti na savijanje $EI_x = 3{,}6\cdot 10^4\,Nm^2$. Mase grede i opruge zanemariti.

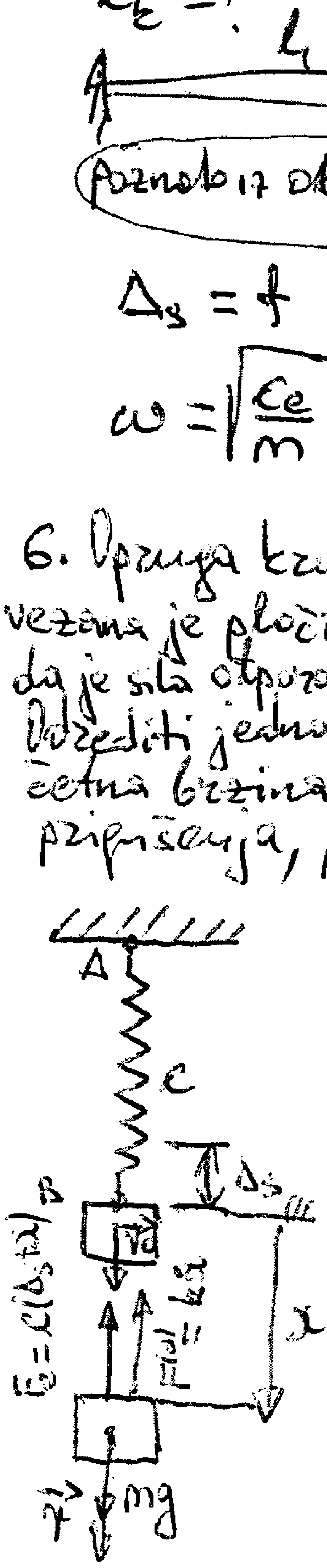




$$\Delta_s = f \rightarrow c_t = \frac{3EI_x}{l^3} = 1{,}35\cdot 10^4\,\frac{N}{m}; \quad c_e = 5745\,\frac{N}{m}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{c_e}{m}} = 3{,}39\ rad/s; \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = 1{,}85\ s$$

6. Opruga krutosti $c = 10\,N/m$ krajem A je vezana za tavanicu, a za njen kraj B vezana je pločica mase $m = 0{,}05\,kg$. Pločica se kreće između polova magneta tako da je sila otpora proporcionalna brzini sa koeficijentom proporcionalnosti $k = 0{,}4\,Ns/m$. Odrediti jednačinu kretanja pločice ako joj je u ravnotežnom položaju saopštena početna brzina $v_0 = 27\,cm/s$. Odrediti prividni period oscilovanja, dekrement prigušenja, prvu i četvrtu amplitudu.



$$mg = c\Delta_s; \quad m\ddot{x} = -c(\Delta_s + x) + mg - k\dot{x} \rightarrow m\ddot{x} + k\dot{x} + cx = 0$$

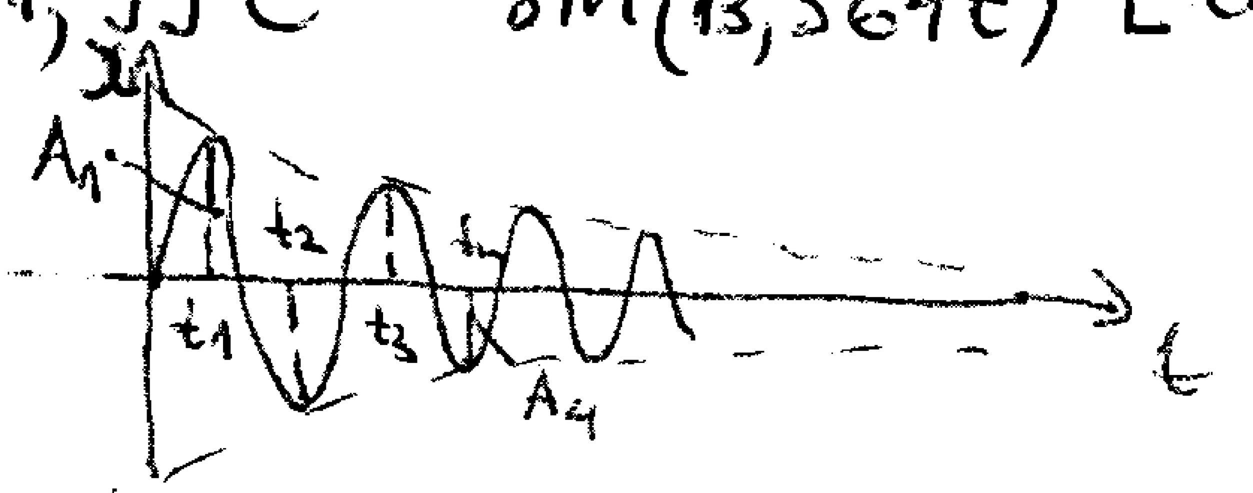
$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + \omega^2 x = 0, \quad n = \frac{k}{2m} = 4\,s^{-1}; \quad \omega^2 = \frac{c}{m} = 200 \rightarrow \omega = 14{,}142$$

$$n < \omega$$

$$p = \sqrt{\omega^2 - n^2} = 13{,}564; \quad T_p = \frac{2\pi}{p} = 0{,}46\ s$$

$$x = e^{-nt}\left(x_0 \cos pt + \frac{\dot{x}_0 + n x_0}{p} \sin pt\right)$$

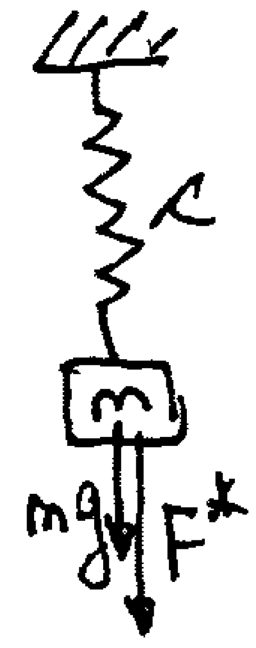
$$\xrightarrow{x_0 = 0,\ \dot{x}_0 = v_0} x = 1{,}99\,e^{-4t} \sin(13{,}564t)\ [cm]$$



$$d = e^{\frac{n\pi}{p}} = 2{,}525$$

$$\dot{x}(t) = 0 \rightarrow t_1 = 0{,}0947; \quad A_1 = x(t_1) = 1{,}3\ cm; \quad \frac{A_1}{A_4} = d^3 \rightarrow A_4 = 0{,}08\ cm$$

7. Teret, mase $m=10\,kg$, zakačen za oprugu, izvodi vertikalne oscilacije pod dejstvom prinudne sile $F^*=10\sin(20t+1)$ [N]. Zanemarujući otpor, odrediti vrijednost dinamičkog faktora pojačavanja η_d i amplitudu prinudnih oscilacija ako je krutost opruge $c=1\,kN/m$.

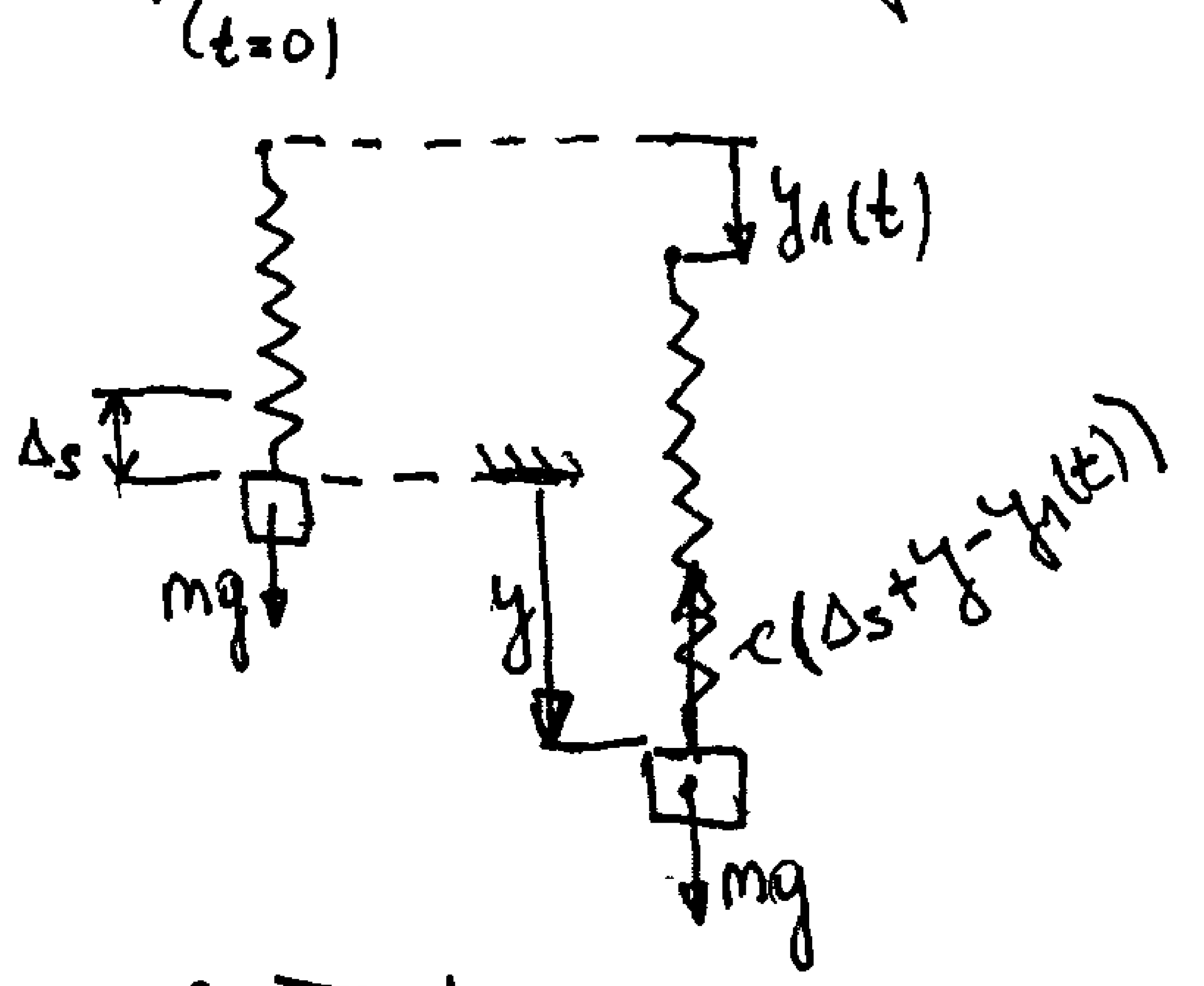


$$\eta_d=\frac{1}{|1-\lambda^2|},\ \lambda=\frac{\Omega}{\omega},\ \Omega=20\,s^{-1},\ \omega=\sqrt{\frac{c}{m}}=10\,s^{-1}\to\lambda=2\to\eta_d=\frac{1}{3}$$

$P=\eta_d P_{st}$ ($P_{st}=x_{st}$ – statičko pomjeranje ("amplituda"))

$$cP_{st}=F_0^{=10N}\to P_{st}=1\,cm\to P=0,33\,cm.$$

8. Teret, mase $m=400\,g$, vezan je za donji kraj opruge krutosti $c=39,2\,N/cm$ čiji gornji kraj izvodi vertikalne oscilacije po zakonu $y_1=b\sin\Omega t$. Odrediti prinudnu oscilaciju tereta, ako je $b=2\,cm$ i $\Omega=7\,s^{-1}$.

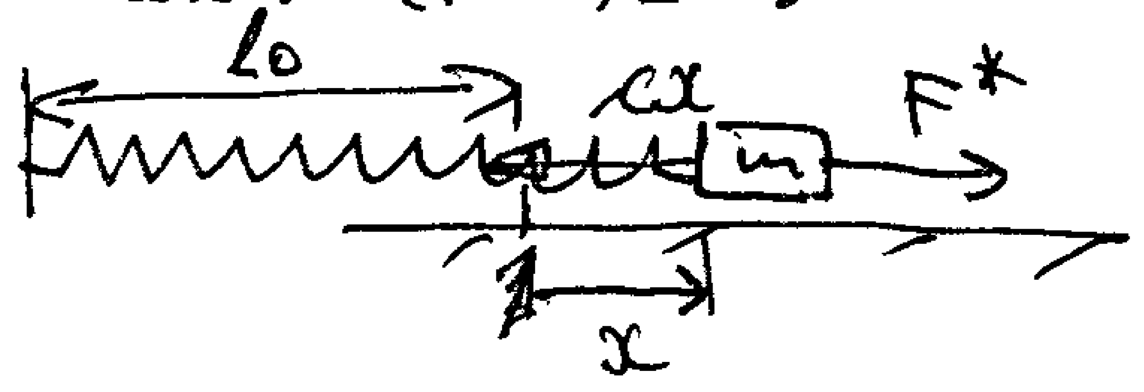


$$\left.\begin{aligned}m\ddot y&=mg-c(\Delta_s+y-y_1(t))\\ mg&=c\Delta_s\end{aligned}\right\}\to m\ddot y+cy=cb\sin\Omega t$$

$$\ddot y+\omega^2y=h\sin\Omega t,\ \omega^2=\frac{c}{m}=9800,\ h=\frac{cb}{m}$$

$$y_{(p)}=\frac{h}{\omega^2-\Omega^2}\sin\Omega t=0,02\sin(7t)\ [m]$$

9. Tijelo, vezano za oprugu krutosti $c=16\,kN/m$, kreće se translatorno pravolinijski po glatkoj horizontalnoj ravni pod dejstvom prinudne sile $F^*=32\sin(10t)$ [N]. Odrediti zakon prinudnih rezonantnih oscilacija.

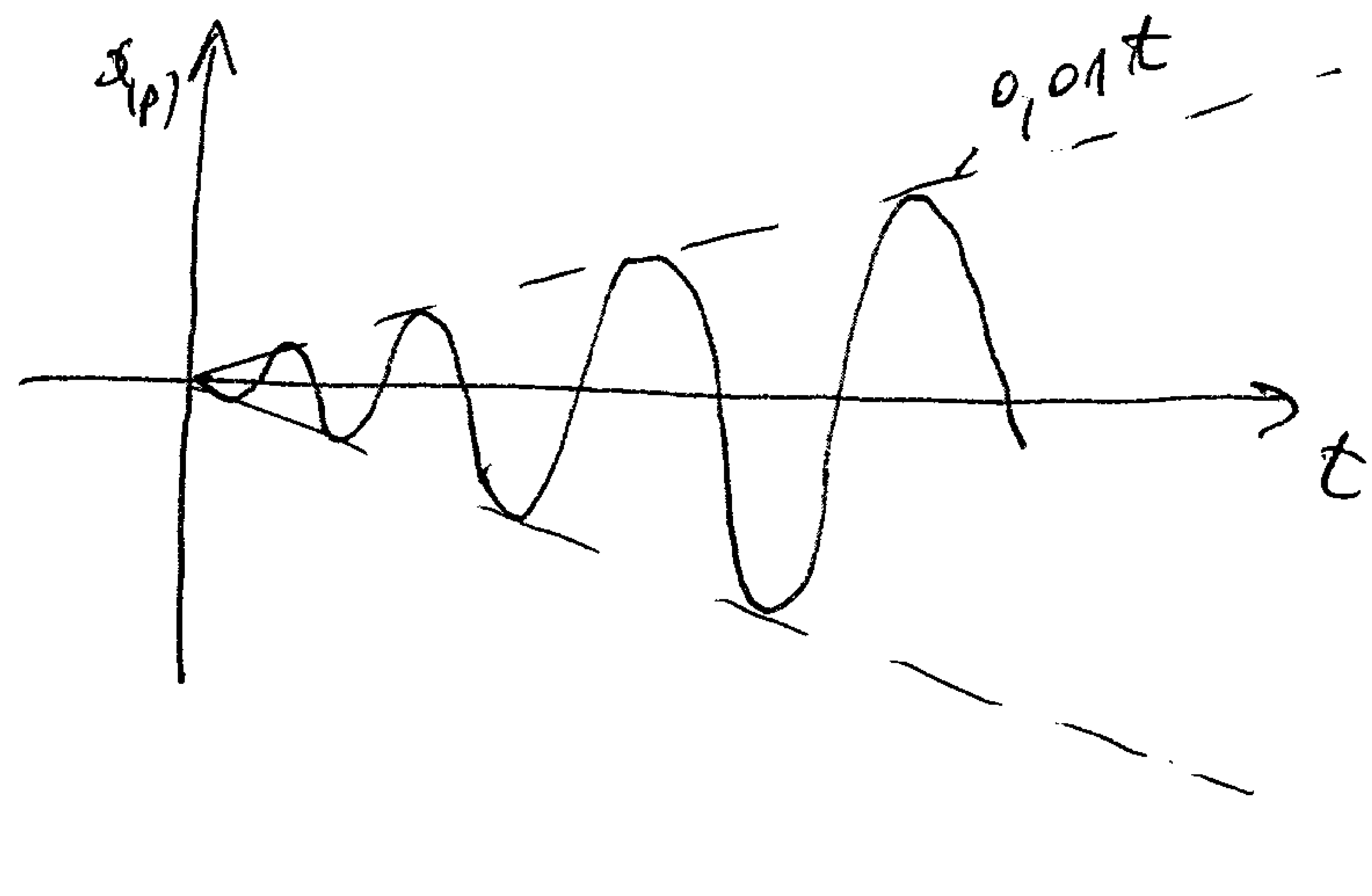


$$m\ddot x=-cx+F^*$$

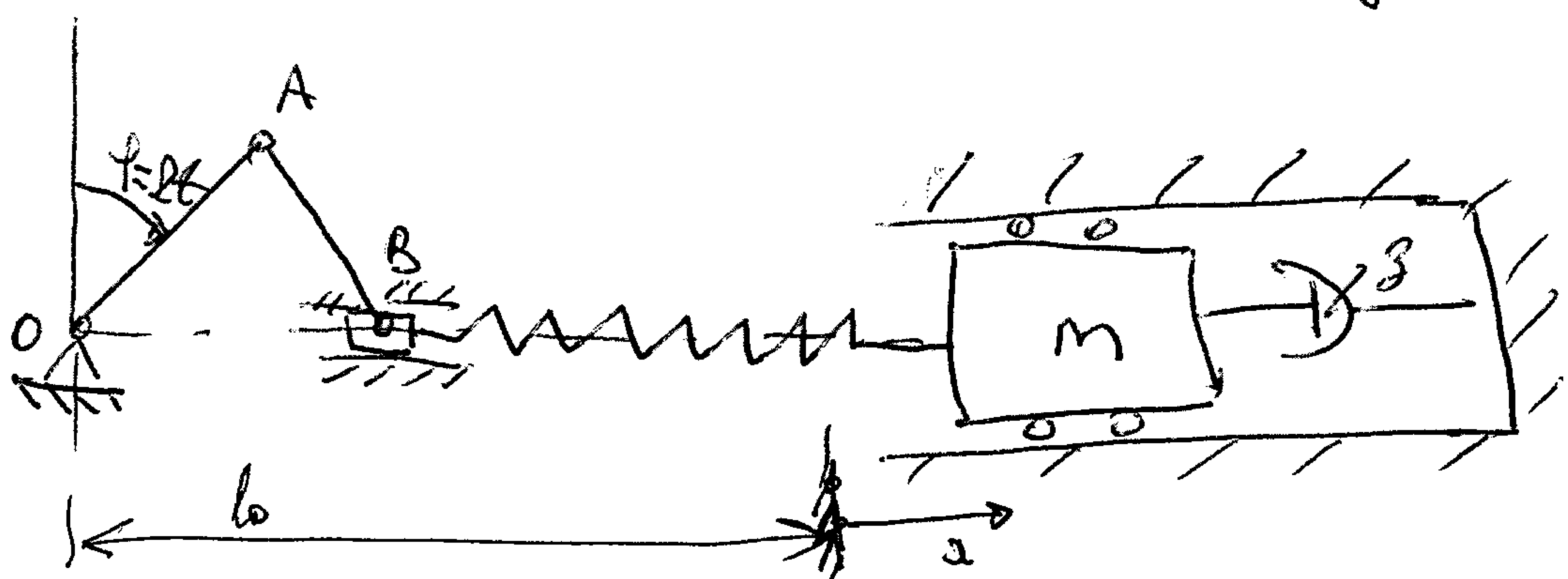
$$\ddot x+\omega^2x=h\sin\Omega t;\ \omega^2=\frac{c}{m},\ h=\frac{F_0}{m},\ F_0=32N,\ \Omega=10s^{-1}$$

rezonancija: $\omega=\Omega$, $x_{(p)}=\frac{h}{2\Omega}t\sin(\Omega t-\frac{\pi}{2})$

$$\omega=\Omega\to m=\frac{c}{\Omega^2}\to h=\frac{F_0\Omega^2}{c}=0,2m\to x_{(p)}=0,01t\sin(10t-\frac{\pi}{2})$$



10. Za klizač B klipnog mehanizma vezan je lijevi kraj horizontalne opruge krutosti $c = 250$ N/m, a za desni kraj opruge translatorno pokretno tijelo mase $m = 10$ kg. Za tijelo je vezan viskozni prigušivač sa koeficijentom otpora $\beta = 80$ Ns/m. Krivaja OA, dužine $l = 0{,}12$ m, obrće se konstantnom ugaonom brzinom $\Omega = 5$ rad/s; $\overline{OA} = \overline{OB}$; za $t=0$ opruga je nedeformisana. Odrediti amplitudu prinudnih oscilacija tijela.



$$m\ddot{x} = -c(x - 2l\sin\Omega t) - \beta\dot{x}$$

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + \omega^2 x = h\sin\Omega t, \quad n = \frac{\beta}{2m}, \quad \omega^2 = \frac{c}{m}, \quad h = \frac{2lc}{m}$$

$$n = 4\,s^{-1}, \quad \omega^2 = 25\,s^{-2}, \quad h = 6$$

$$P = \frac{h}{\sqrt{(\omega^2 - \Omega^2)^2 + 4n^2\Omega^2}} = \frac{6}{2\cdot 4\cdot 5} = 0{,}15\ m$$

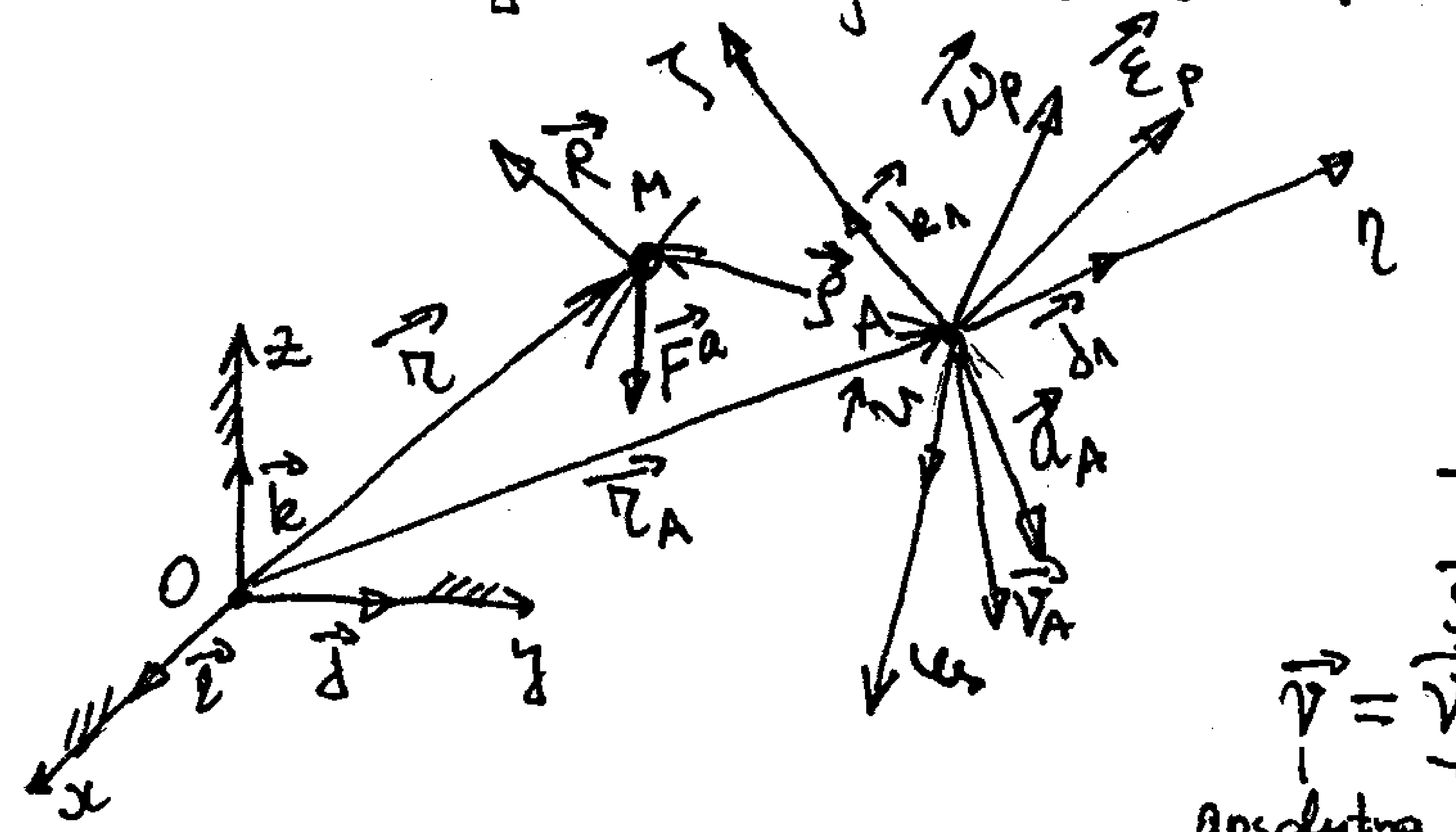
5. Dinamika relativnog kretanja materijalne tačke

5.1. Osnovna jednačina dinamike relativnog kretanja

U dosadašnjim razmatranjima proučavano je kretanje materijalne tačke u odnosu na nepokretni (inercijalni) koordinatni sistem. Međutim, mnoštvo je kretanja koja se mogu posmatrati u odnosu na pokretne koordinatne sisteme koji se ne kreću translatorno konstantnom brzinom u odnosu na nepokretni referentni sistem. Takvi koordinatni sistemi nazivaju se neinercijalni i u odnosu na njih ne važi drugi Njutnov zakon (prvi i), kao ni opšti zakoni izvedeni iz njega.

U kinematici složenog kretanja tačke korišćeni su pojmovi:

- apsolutno kretanje – kretanje u odnosu na nepokretni koordinatni sistem $Oxyz$;
- prenosno kretanje – kretanje pokretnog koordinatnog sistema $A\xi\eta\zeta$ (ili, što je isto, tijela-nosača čvrsto vezanog za njim) u odnosu na nepokretni sistem;
- relativno kretanje – kretanje tačke u odnosu na pokretni koor. sistem $A\xi\eta\zeta$.



$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

$$\vec{\rho} = \xi\vec{i}_1 + \eta\vec{j}_1 + \zeta\vec{k}_1$$

$$\vec{r} = \vec{r}_A + \vec{\rho}$$

$\vec{r} = \vec{r}(t)$ – jed. apsolutnog kretanja

$\vec{\rho} = \vec{\rho}(t)$ – jed. relativnog -||-

$$\vec{v} = \vec{v}_p + \vec{v}_r$$

apsolutna prenosna relativna brzina tačke

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k}, \quad \vec{v}_p = \vec{v}_A + \vec{\omega}_p \times \vec{\rho}, \quad \vec{v}_r = \left(\frac{d\vec{\rho}}{dt}\right)_r = \dot{\xi}\vec{i}_1 + \dot{\eta}\vec{j}_1 + \dot{\zeta}\vec{k}_1$$

$$\vec{a} = \vec{a}_r + \vec{a}_p + \vec{a}_c \qquad (1)$$

$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k}$ – apsolutno ubrzanje tačke

$\vec{a}_r = \left(\frac{d^2\vec{\rho}}{dt^2}\right)_r = \ddot{\xi}\vec{i}_1 + \ddot{\eta}\vec{j}_1 + \ddot{\zeta}\vec{k}_1$ – relativno -||-

$\vec{a}_p = \vec{a}_A + \vec{\omega}_p \times (\vec{\omega}_p \times \vec{\rho}) + \vec{\varepsilon}_p \times \vec{\rho}$ – prenosno ubrzanje

$\vec{a}_c = 2\vec{\omega}_p \times \vec{v}_r$ – Koriolisovo ubrzanje

Naš zadatak je da odredimo relativno kretanje tačke, mase m, ako je poznato prenosno kretanje, rezultanta $\vec{F}^a$ aktivnih sila i rezultanta $\vec{R}$ reakcija veza.

Prema osnovnoj jednačini dinamike, koja važi u nepokretnom koordinatnom sistemu, biće

$$m\vec{a} = \vec{F}^a + \vec{R} \qquad (2)$$

Zamjenom apsolutnog ubrzanja (1) u (2) dobijamo

$$m\vec{a}_r = \vec{F}^a + \vec{R} + (-m\vec{a}_p) + (-m\vec{a}_c)$$

Vektor

$$\vec{F}_p^{in} = -m\vec{a}_p$$

zove se prenosna inercijalna sila, a vektor

$$\vec{F}_c^{in} = -m\vec{a}_c$$

je Koriolisova inercijalna sila.

Sada je

$$m\vec{a}_r = \vec{F}^a + \vec{R} + \vec{F}_p^{in} + \vec{F}_c^{in} \qquad (3)$$

Jednačina (3) je osnovna jednačina dinamike relativnog kretanja materijalne tačke. Projiciranjem ove vektorske jednačine na ose pokretnog koordinatnog sistema dobijamo diferencijalne jednačine relativnog kretanja u skalarnom obliku

$$\left.\begin{aligned} m\ddot{\xi} &= F_\xi^a + R_\xi + F_{p\xi}^{in} + F_{c\xi}^{in} \\ m\ddot{\eta} &= F_\eta^a + R_\eta + F_{p\eta}^{in} + F_{c\eta}^{in} \\ m\ddot{\zeta} &= F_\zeta^a + R_\zeta + F_{p\zeta}^{in} + F_{c\zeta}^{in} \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

Dakle, diferencijalne jednačine relativnog kretanja pišemo u istom obliku kao i diferencijalne jednačine u odnosu na nepokretni koordinatni sistem, ali aktivnim silama i reakcijama veza treba dodati prenosnu i Koriolisovu silu inercije. Drugim riječima: u odnosu na pokretni koordinatni sistem materijalna tačka se kreće na isti način kao kada bi ose tog sistema bile nepokretne a na tačku osim stvarnih sila (aktivnih i reakcija) djeluju još i sile $\vec{F}_p^{in}$ i $\vec{F}_c^{in}$. Dodavanjem sila $\vec{F}_p^{in}$ i $\vec{F}_c^{in}$ uzima se u obzir uticaj prenosnog kretanja na relativno kretanje.

Specijalni slučajevi:

1) Prenosno kretanje je translacija ($\vec{\omega}_p = 0$)

$$\vec{F}_c^{in} = -m\vec{a}_c = -2m\underbrace{\vec{\omega}_p}_{=0} \times \vec{v}_r = 0, \quad \vec{F}_p^{in} = -m\vec{a}_p = -m\vec{a}_A$$

$$\rightarrow \quad m\vec{a}_r = \vec{F}^a + \vec{R} + \vec{F}_p^{in}$$

2) Pokretni koordinatni sistem se kreće translatorno, pravolinijski i ravnomjerno.

U ovom slučaju je $\vec{a}_c = \vec{a}_p = 0$ pa je i $\vec{F}_p^{in} = \vec{F}_c^{in} = 0$

$$\rightarrow \quad m\vec{a}_r = \vec{F}^a + \vec{R}$$

Ova jednačina se u potpunosti poklapa sa jednačinom apsolutnog kretanja (2), pa, prema tome, u pokretnom koordinatnom sistemu koji se kreće u odnosu na nepokretni koordinatni sistem, translatorno i konstantnom brzinom, osnovna jednačina dinamike (drugi Njutnov zakon) ima isti oblik kao i u nepokretnom sistemu (tj. takav koordinatni sistem je inercijalni). Slijedi Sve mehaničke pojave (i zakoni) imaju isti oblik u inercijalnim koordinatnim sistemima – Galilejev princip relativnosti klasične mehanike.

3) Relativna ravnoteža.

Ako tačka miruje u odnosu na pokretni koordinatni sistem, onda je za nju $\vec{v}_r = 0$, $\vec{a}_r = 0$ pa je i $\vec{F}_c^{in} = 0$, a jednačina (3) se svodi na oblik

$$\vec{F}^a + \vec{R} + \vec{F}_p^{in} = 0 \qquad (5)$$

koji predstavlja jednačinu relativne ravnoteže tačke.

5.2. Zakon o promjeni kinetičke energije pri relativnom kretanju

Ranije formulisani opšti zakoni dinamike (zakon o promjeni količine kretanja, momenta količine kretanja i kinetičke energije) predstavljaju posledice (tj. izvode se iz) osnovne jednačine dinamike, koja održava drugi Njutnov zakon. Imajući to u vidu, kao i oblik osnovne jednačine dinamike relativnog kretanja, slijedi da se svi opšti zakoni mogu primijeniti i na relativno kretanje, ali se moraju uzeti u obzir učešće prenosne i Koriolisove inercijalne sile.

Specijalno, prilikom rješavanja zadataka često se primjenjuje zakon o promjeni kinetičke energije pri relativnom kretanju.

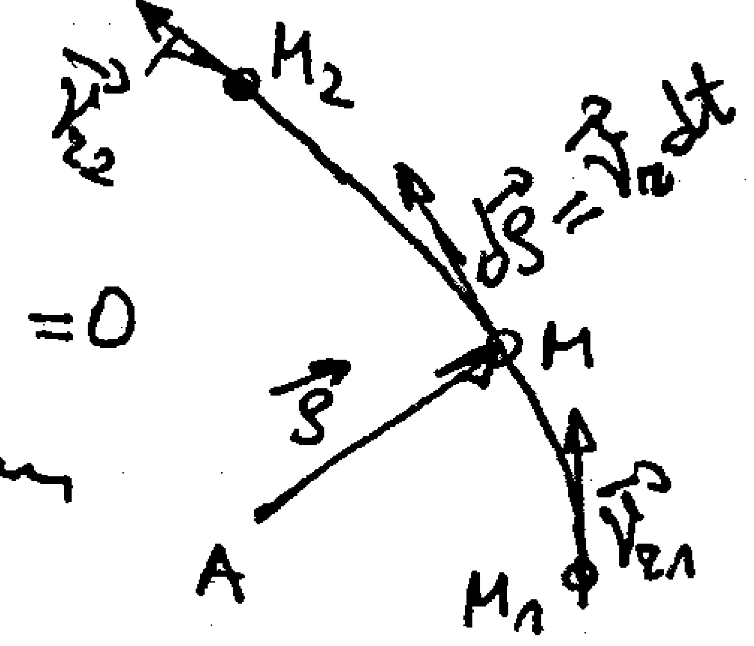
$$m\vec{a} = \vec{F}^a + \vec{R} \longrightarrow dE_k = \hat{d}A(\vec{F}^a) + \hat{d}A(\vec{R}), \quad E_k = \frac{1}{2}mv^2$$

Analogno,

$$m\vec{a}_r = \vec{F}^a + \vec{R} + \vec{F}_p^{in} + \vec{F}_c^{in} \longrightarrow dE_{kr} = \hat{d}A(\vec{F}^a) + \hat{d}A(\vec{R}) + \hat{d}A(\vec{F}_p^{in}) + \hat{d}A(\vec{F}_c^{in})$$

$$E_{kr} = \frac{1}{2}mv_r^2,$$

$$\hat{d}A(\vec{F}_c^{in}) = \vec{F}_c^{in} \cdot d\vec{s} = -2m\overbrace{(\vec{\omega}_p \times \vec{v}_r)}^{\perp \vec{v}_r} \cdot \vec{v}_r\, dt = 0$$



$\vec{F}_c^{in} \perp d\vec{s}$

→ Rad Koriolisove inercijalne sile na relativnom pomjeranju je jednak nuli

$$\rightarrow dE_{kr} = \hat{d}A(\vec{F}^a) + \hat{d}A(\vec{F}_p^{in}) + \hat{d}A(\vec{R})$$ – diferencijalni oblik zakona o promjeni kinetičke energije relativnog kretanja.

$$\frac{1}{2}mv_{r2}^2 - \frac{1}{2}mv_{r1}^2 = A_{(1,2)}(\vec{F}^a) + A_{(1,2)}(\vec{F}_p^{in}) + A_{(1,2)}(\vec{R})$$ – integralni oblik zakona

N: Rad reakcije $\vec{R}$ biće jednak nuli ako je veza idealna i nepokretna (stacionarna) u odnosu na pokretni koordinatni sistem ($\vec{R} \perp d\vec{s}$).