

11.11.2017

VII sedmica nastave  
- predavanja sa ilustrativnim primerima

## II DIO: Dinamika materijalnog sistema

### 1. Pojam materijalnog sistema. Klasifikacija sila.

U mehanici se pod materijalnim sistemom podrazumijeva skup materijalnih tačaka čija su kretanja međuzavisna.

mat. sistem  $\left\{ \begin{array}{l} \text{diskretan} - \text{konačan broj mat. tačaka na međusobno konačnim razstojanjima} \\ \text{neprekidna sredina (kontinuum)} - \text{beskonačno mnogo tačaka čija je ukupna masa konačna i neprekidno raspoređena.} \end{array} \right.$

Oblast prostora ispunjena neprekidno raspoređenom masom predstavlja materijalno tijelo.

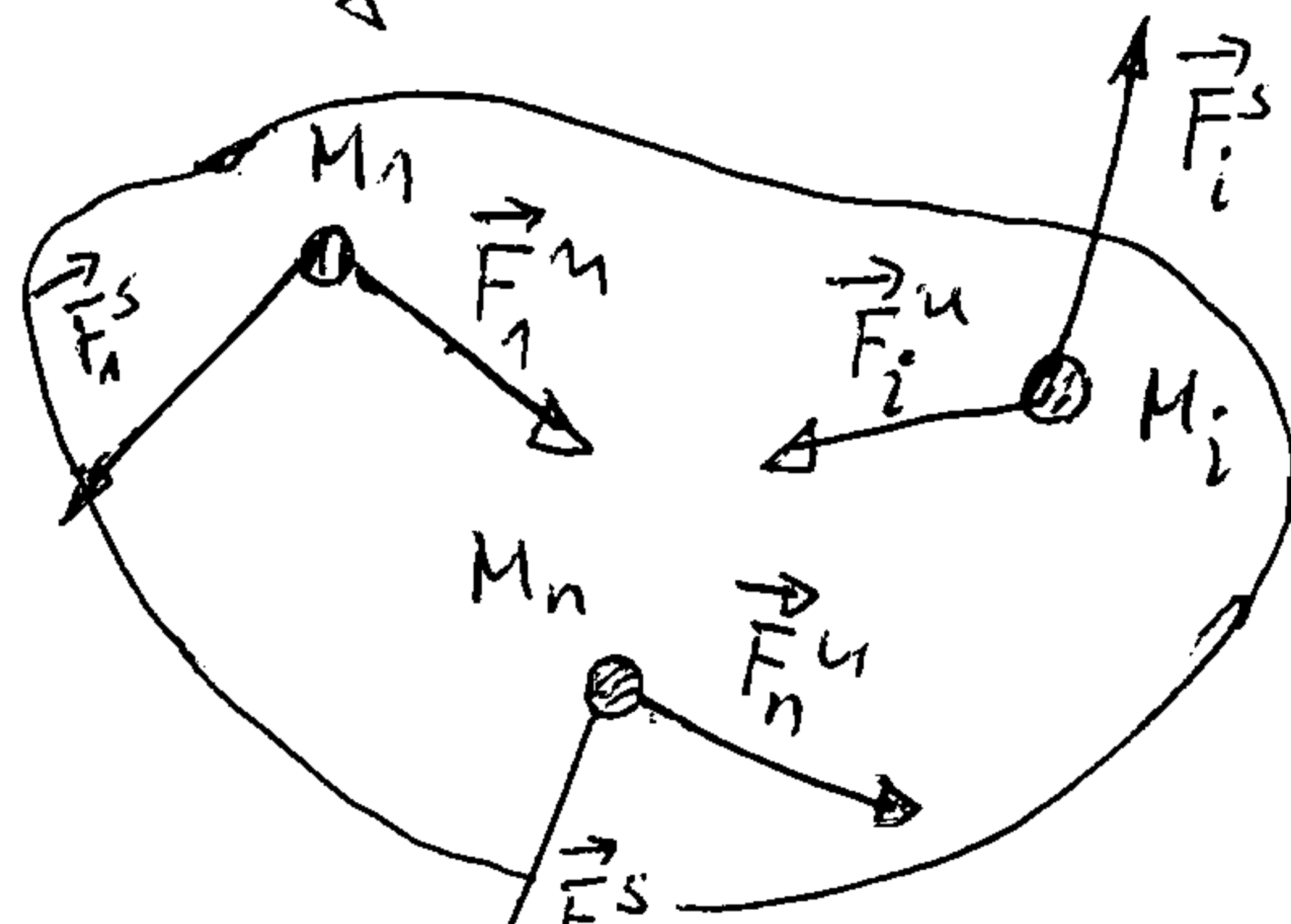
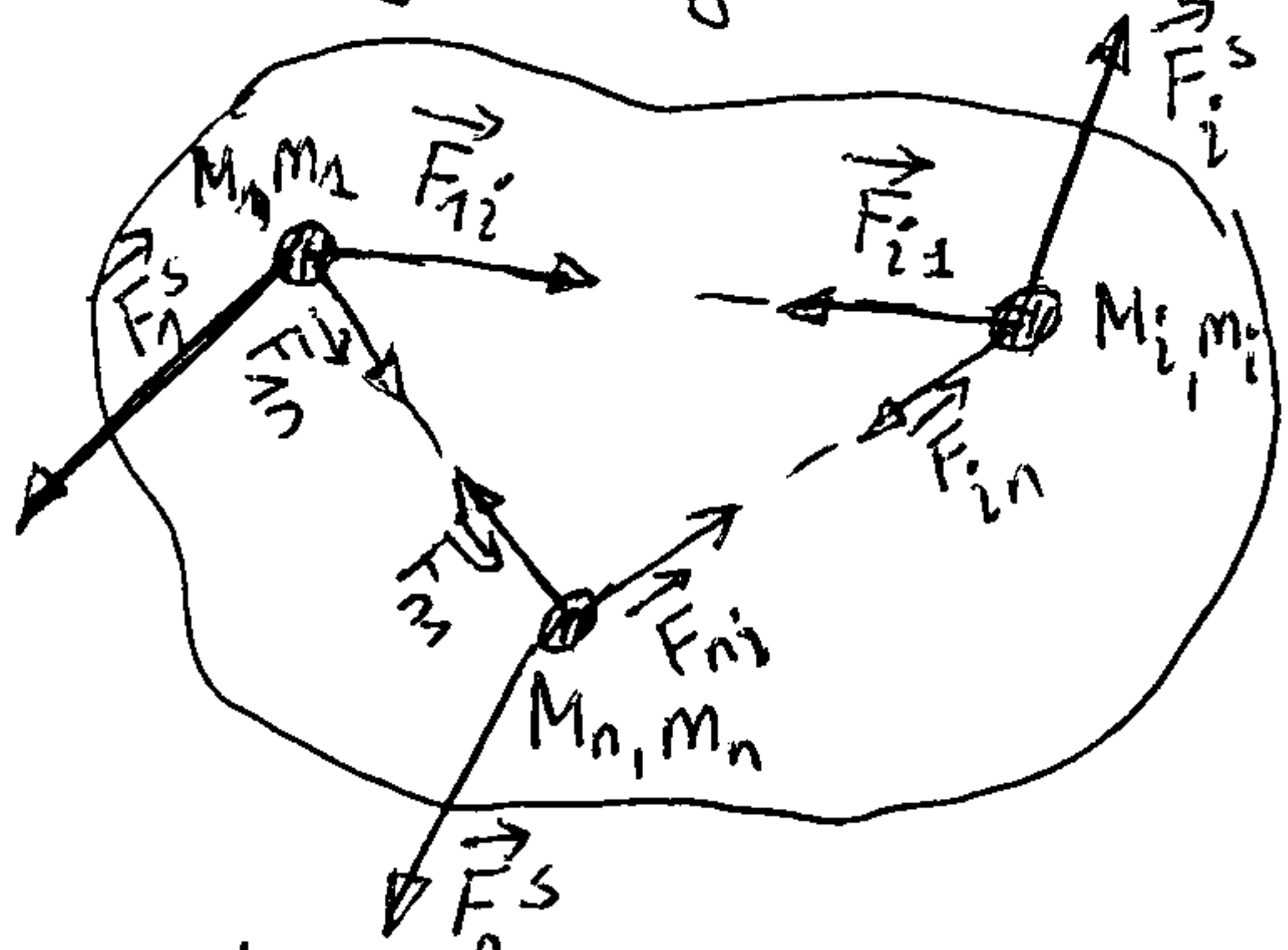
mat. tijelo  $\left\{ \begin{array}{l} \text{kruto} - \text{oblič i veličina tijela se zanemarljivo malo mijenjaju pod dejstvom sila;} \\ \text{deforzabilno} \left\{ \begin{array}{l} \text{čvrsto} - \text{ima stalan oblič koji se donekle mijenja pod dejstvom sila;} \\ \text{fluidno} - \text{zanima oblič tekućine u kojem se nalazi.} \end{array} \right. \end{array} \right.$

Diskretan sistem je neizmjenjiv (krut) ukoliko se međusobni položaji tačaka ne mijenjaju pod dejstvom sila.

mat. sistem  $\left\{ \begin{array}{l} \text{slobodan} - \text{kretanje tačaka (položaji brzine) ne podliježu nikakvim ograničenjima;} \\ \text{neslobodan (vezan)} - \text{položaji brzine tačaka ograničavaju izvojni uslovi (veze).} \end{array} \right.$

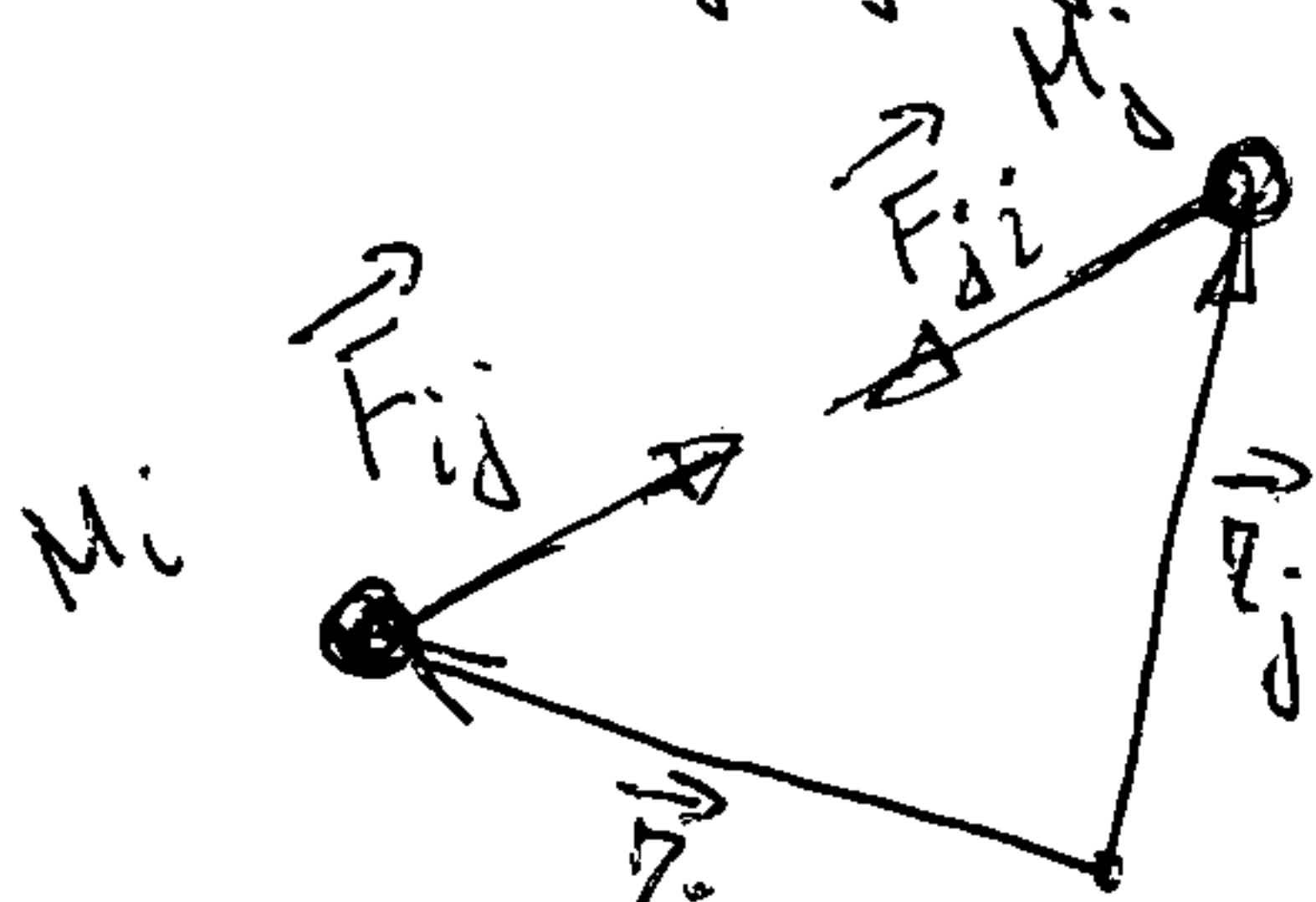
sile koje djeluju na tačke sistema

$\left\{ \begin{array}{l} \text{spoljšnje} - \text{potiču od materijalnih (tačaka) koja ne ulaze u dati sistem;} \\ \text{unutrašnje} - \text{one su rezultat međusobnog dejstva tačaka datog sistema.} \end{array} \right.$



sistem n tačaka  $M_i$  mase  $m_i$  ( $i=1, \dots, n$ )  
 $\vec{F}_i^s$  - rezultanta svih spoljšnjih sila koje djeluju na tačku  $M_i$ .

$\vec{F}_i^u = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \vec{F}_{ij}$  - rezultanta svih unutrašnjih sila koje djeluju na tačku  $M_i$ .



Saglasno trećem Njutnovom zakonu (akcije i reakcije) je

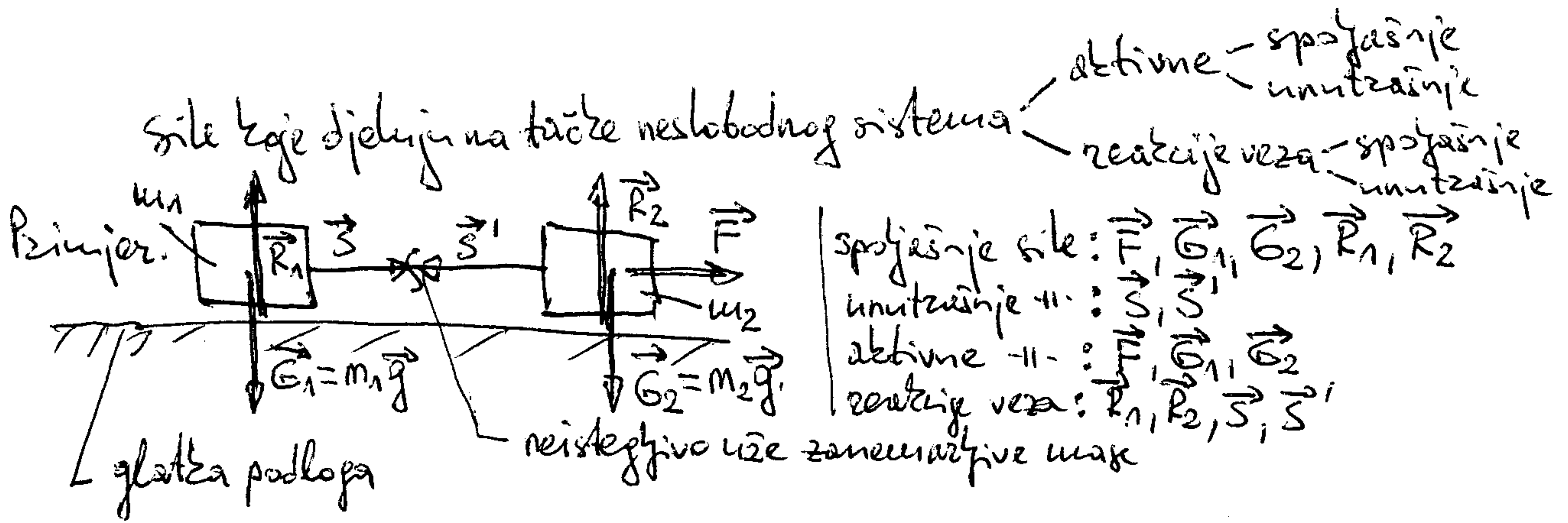
$$\vec{F}_{ij} + \vec{F}_{ji} = 0 \Rightarrow \vec{F}_2^u = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i^u = 0$$

$$\vec{M}_0^u = \sum_{i=1}^n \vec{M}_0^i = 0$$

$$\vec{M}_0^i + \vec{M}_0^j = \vec{r}_i \times \vec{F}_{ij} + \vec{r}_j \times \vec{F}_{ji} = (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \times \vec{F}_{ij} = 0$$

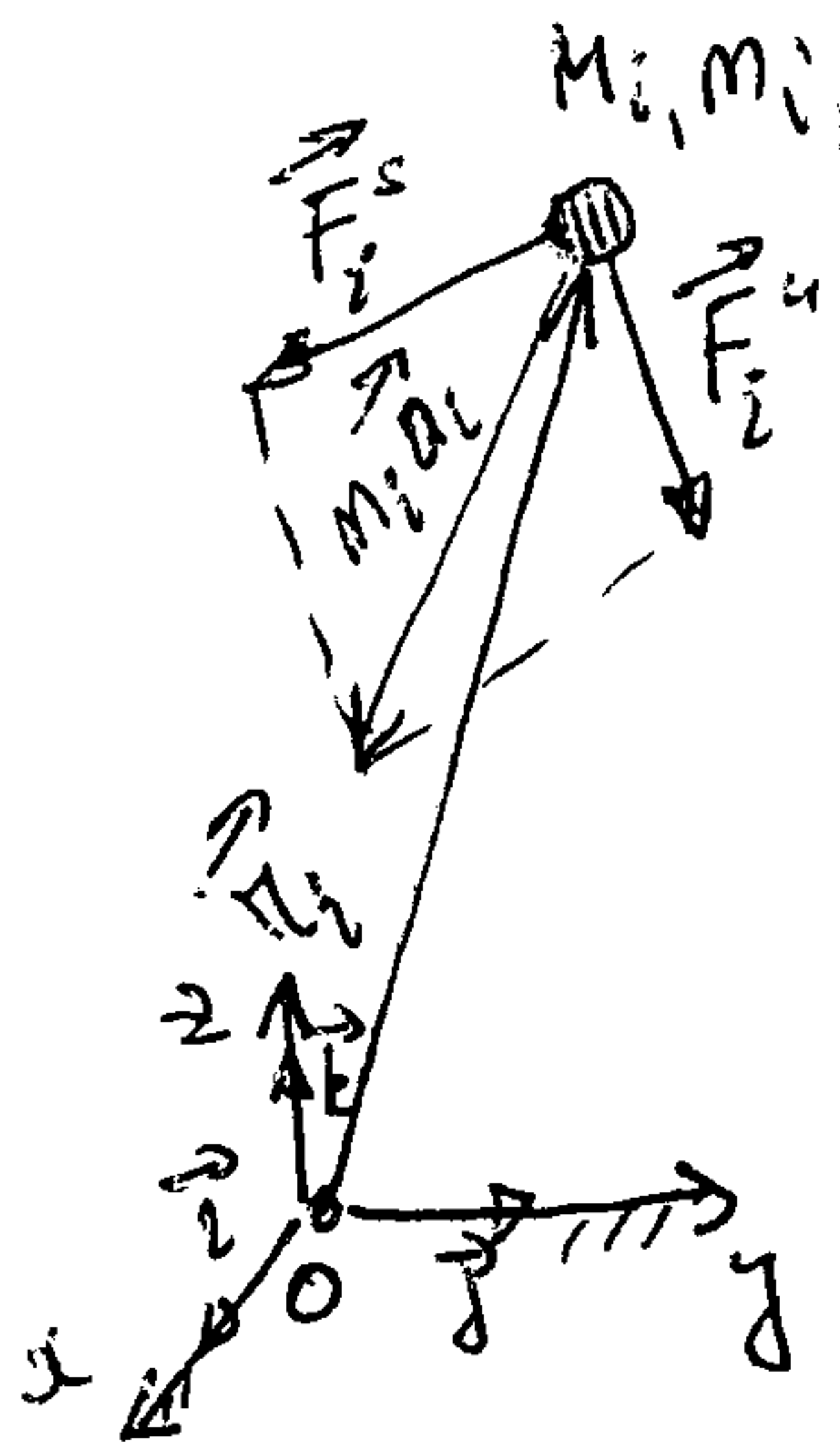
Dakle, unutrašnje sile imaju sljedeće osobine:

- 1) Glavni vektor unutrašnjih sila materijalnog sistema jednak je nuli;
- 2) Glavni moment jednak je nuli.



## 2. Diferencijalne jednačine kretanja tačaka sistema

$$\vec{a}_i = \ddot{\vec{r}}_i = \ddot{x}_i \vec{i} + \ddot{y}_i \vec{j} + \ddot{z}_i \vec{k} \quad \text{— ubrzanje tačke } M_i \text{ u odnosu na inercijalni koordinatni sistem } Oxyz$$



Na osnovu osnovne jednačine dinamike materijalne tačke ( $m\vec{a} = \vec{F}$ ), dobijemo

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i^s + \vec{F}_i^u \quad (i=1, \dots, n) \quad (1)$$

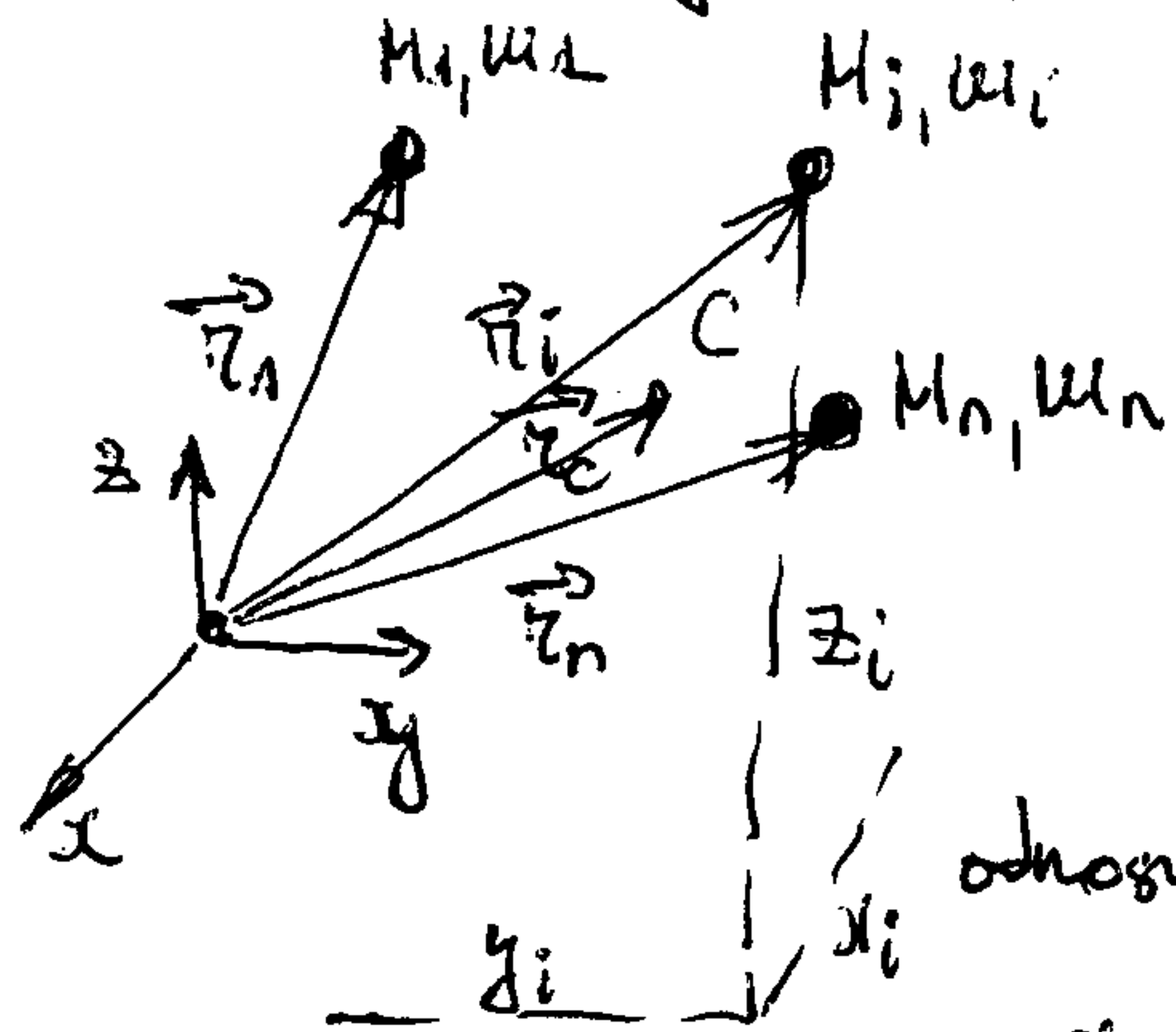
odnosno

$$\left. \begin{aligned} m_i \ddot{x}_i &= F_{ix}^s + F_{ix}^u \\ m_i \ddot{y}_i &= F_{iy}^s + F_{iy}^u \\ m_i \ddot{z}_i &= F_{iz}^s + F_{iz}^u \end{aligned} \right\} \quad (i=1, \dots, n) \quad (1')$$

$n$  vektorskih jednačina (1), odnosno  $3n$  ekvivalentnih skalarних jednačina (1'), predstavljaju diferencijalne jednačine kretanja materijalnih tačaka sistema. Dakle, u principu, poznavanje kretanja sistema svodi se na formiranje, analizu i rešavanje diferencijalnih jednačina (1), odnosno (1'). Međutim, to je praktično ostvarljivo samo za sisteme koji sadrže mali broj materijalnih tačaka i koji, ukoliko je sistem neslobodan, imaju relativno jednostavne veze. U cilju prevaziđenja ovog problema uvode se vektorske i skalarne veličine koje u izvjestnom stepenu karakterišu kretanje celog sistema. U te svrhe karakteristične, tzv. mjere kretanja, spadaju količina kretanja, moment količine kretanja i kinetička energija. Poznavanje karakterne promjene mjera kretanja daje djelimično, ali često dovoljno, a ponekad i potpuno predstavn o kretanju sistema.



### 3. Centar inercije (masa) sistema



$$m = \sum m_i - \text{masa sistema}$$

Centar inercije (masa) diskretnog sistema je tačka C čiji je vektor položaja obično pismom:

$$\vec{r}_C = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{m}, \quad (1)$$

odnosno koordinate te tačke su:

$$x_c = \frac{\sum m_i x_i}{m}, \quad y_c = \frac{\sum m_i y_i}{m}, \quad z_c = \frac{\sum m_i z_i}{m} \quad (2)$$

U slučaju tijela čija je masa neprekidno raspoređena u prostoru, suma na desnoj strani izraza (1) prelazi u integral, tj.

$$\vec{r}_C = \frac{\int \vec{r} dm}{m}, \quad (3)$$

$$\text{odnosno } x_c = \frac{\int x dm}{m}, \quad y_c = \frac{\int y dm}{m}, \quad z_c = \frac{\int z dm}{m} \quad (4)$$

U pismom (3) i (4), zavisno kako je raspoređena masa (zapreminski, površinski ili po liniji) imamo:

$$dm = \begin{cases} \rho dV, & \rho - \text{gustina (zapreminski)}, [\rho] = \text{kg/m}^3 \\ \rho' dA, & \rho' - \text{površinska gustina}, [\rho'] = \text{kg/m}^2 \\ \rho'' dl, & \rho'' - \text{linijska gustina}, [\rho''] = \text{kg/m} \end{cases}$$

$$m = \int \rho dV, \quad m = \int \rho' dA \quad \text{ili} \quad m = \int \rho'' dl \quad (V) \quad (A) \quad (L)$$

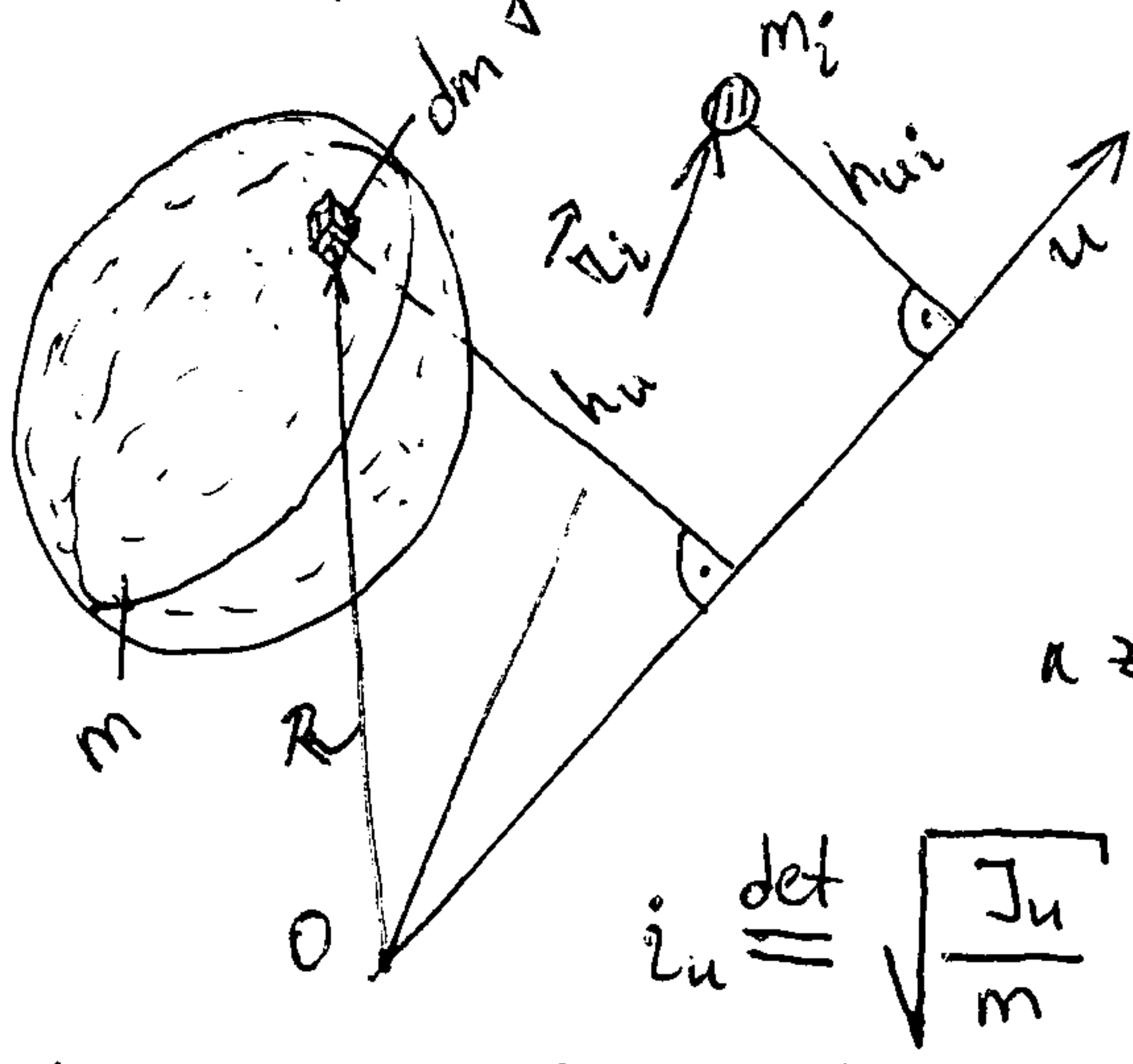
Gustina je u općem slučaju funkcija položaja, a ako je ona konstantna kaže se da je tijelo homogeno. Za homogena tijela je  $m = \rho V$ ,  $V$  - zapremina tijela ili  $m = \rho' A$ ,  $A$  - površina materijalne površi, ili  $m = \rho'' L$ ,  $L$  - dužina materijalne linije.

Napomena:

$\vec{r}_C = \frac{\sum M_i \vec{r}_i}{m} \cdot \frac{g}{g} = \frac{\sum G_i \vec{r}_i}{G} \rightarrow$  položaj centra inercije sistema u homogenom polju sile teže jednako se sa težištem definišu u statici.

# 4. Momenti inercije

## 4.1. Definicije momenata inercije



Moment inercije materijalnog sistema za neku osu definiše se zbitom proizvoda mase tačaka sistema i kvadrata rastojanja ovih tačaka od ose, tj. za diskretni sistem je

$$J_u = \sum m_i h_{ui}^2 - \text{moment inercije za osu } u,$$

za tijelo

$$J_u = \int_{(m)} h_{un}^2 dm. \quad [J_u] = \text{kg m}^2$$

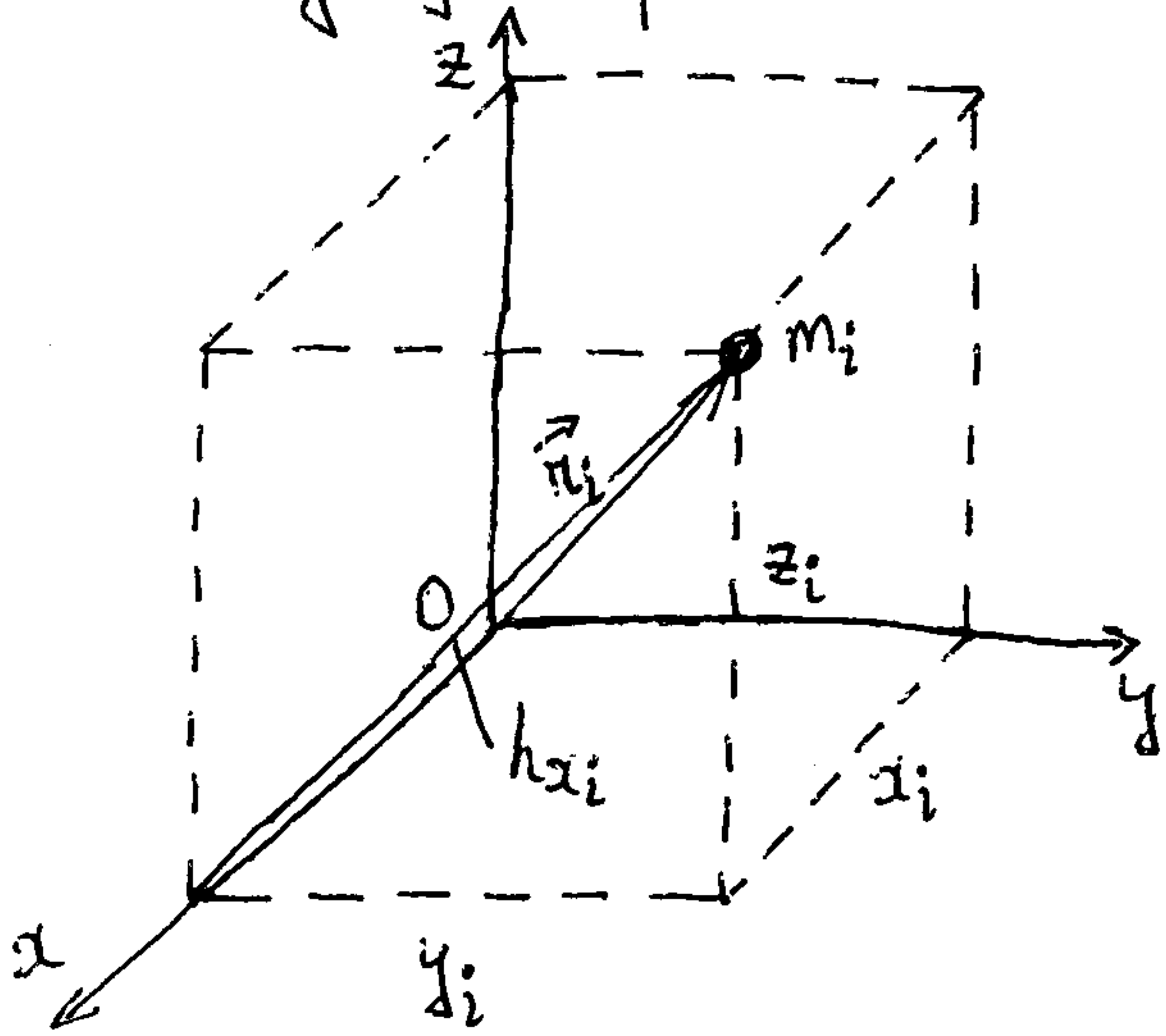
$$i_u \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\frac{J_u}{m}} - \text{poluprečnik inercije sistema za osu } u \quad (J_u = m i_u^2)$$

Analogno aksijalnom, definiše se polarni moment inercije, tj.

$$J_o = \sum m_i r_i^2 - \text{moment inercije diskretnog sistema za pol } O,$$

$$J_o = \int_{(m)} r^2 dm - \text{moment inercije materijalnog tijela za pol } O.$$

Očigledno je  $J_o \geq 0$  i  $J_u \geq 0$ , pri čemu je  $J_o = 0$ , odnosno  $J_u = 0$ , samo onda kada je cjelokupna masa sistema smještena u tački O, odnosno na osi u.



Za Dekartov koordinatni sistem  $Oxyz$ , suglasno prethodnim definicijama, bide

za diskretni sistem:

$$J_x = \sum m_i h_{xi}^2 = \sum m_i (y_i^2 + z_i^2)$$

$$J_y = \sum m_i (x_i^2 + z_i^2)$$

$$J_z = \sum m_i (x_i^2 + y_i^2)$$

$$J_o = \sum m_i (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2)$$

za tijelo:

$$J_x = \int_{(m)} (y^2 + z^2) dm$$

$$J_y = \int_{(m)} (x^2 + z^2) dm$$

$$J_z = \int_{(m)} (x^2 + y^2) dm$$

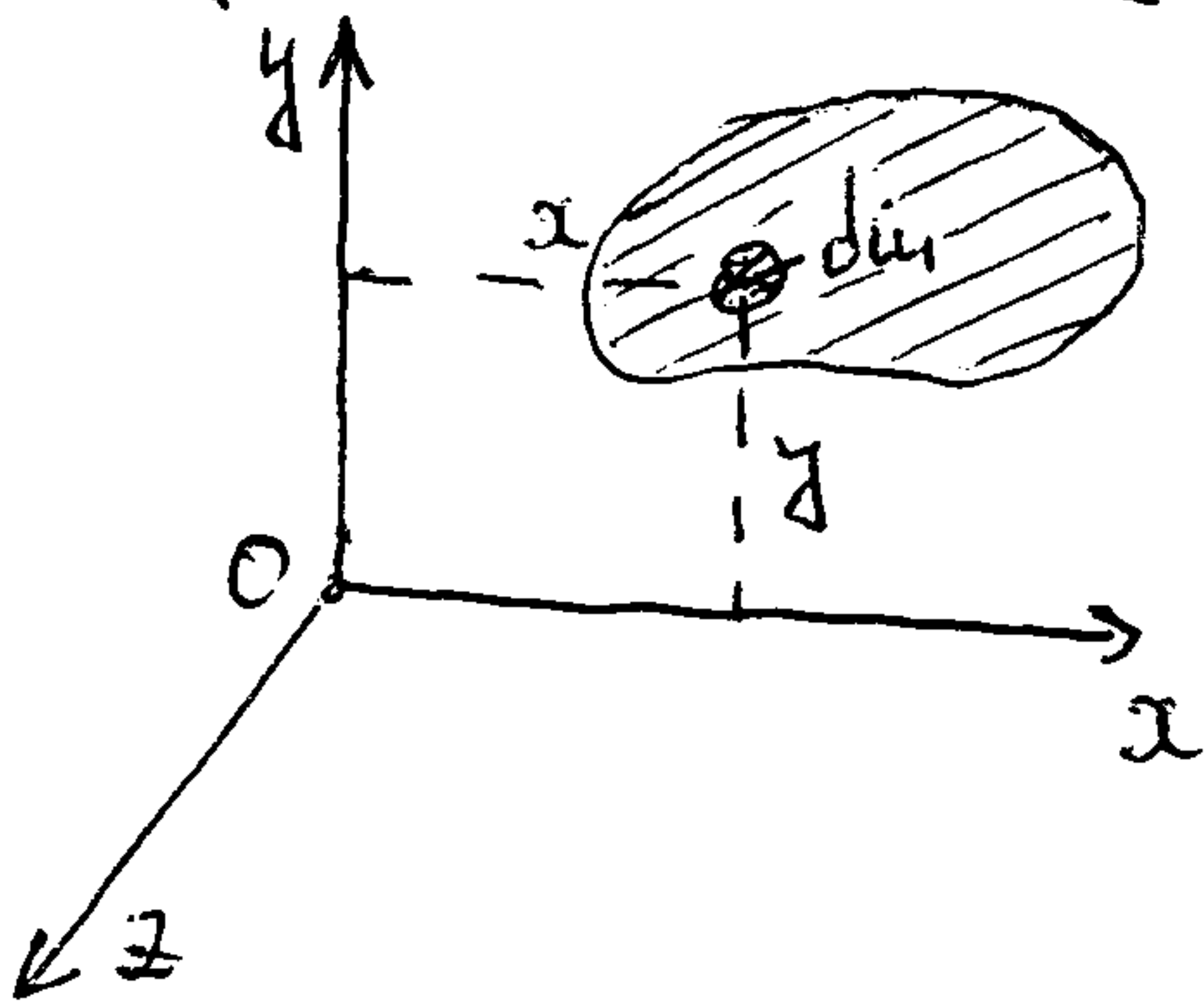
$$J_o = \int_{(m)} (x^2 + y^2 + z^2) dm$$

Iz prethodnih formula slijedi da je  $2 J_o = J_x + J_y + J_z$ , tj. polarni moment inercije je jednak zbiti tri aksijalna momenta inercije za tri uzpravne ose kroz taj pol.

Ako je masa raspoređena u ravni, recimo  $Oxy$ , tada je

$$J_x = \int_{(m)} y^2 dm, \quad J_y = \int_{(m)} x^2 dm \quad \text{i} \quad J_o = J_z = \int_{(m)} (x^2 + y^2) dm,$$

$$\text{tj.} \quad J_o = J_z = J_x + J_y$$





Centrifugalni moment inercije za dvije međusobno upravne ose definiše se kao zbir proizvoda masa tačaka sistema i projekcija njihovih vektora položaja na te ose. U odnosu na koordinatni sistem  $Oxyz$ , za diskretni sistem, odnosno materijalno tijelo, centrifugalni momenti inercije su dati sljedećim izrazima:

diskretni sistem tačaka	materijalno tijelo
$J_{xy} = \sum m_i x_i y_i$	$J_{xy} = \int_{(m)} x y \, dm$
$J_{xz} = \sum m_i x_i z_i$	$J_{xz} = \int_{(m)} x z \, dm$
$J_{yz} = \sum m_i y_i z_i$	$J_{yz} = \int_{(m)} y z \, dm$

Centrifugalni momenti inercije mogu biti pozitivni, negativni i li jednaki nuli, a to zavisi od položaja tačaka u odnosu na ose.

S obzirom na definiciju, biće  $J_{yx} = J_{xy}$ ,  $J_{zx} = J_{xz}$  i  $J_{zy} = J_{yz}$ . Za jedan određeni sistem, centrifugalni momenti inercije zavise od pravca (orijentacije) koordinatnih osa i od izbora koordinatnog početka. Zato, kada se govori o centrifugalnim momentima inercije u datoj tački, podrazumijeva se da se koordinatni početak nalazi u toj tački.

#### 4.2. Glavne ose inercije

Nečija je  $J_{xz} = 0$  i  $J_{yz} = 0$ . Tada se osa  $Oz$  zove glavna osa inercije (tj. osa  $z$  je glavna osa inercije za tačku  $O$ ). Drugačije rečeno, ako su dva centrifugalna momenta inercije jednaka nuli, onda se zajednička osa naznačena u indeksima tih momenta inercije naziva glavna osa inercije.

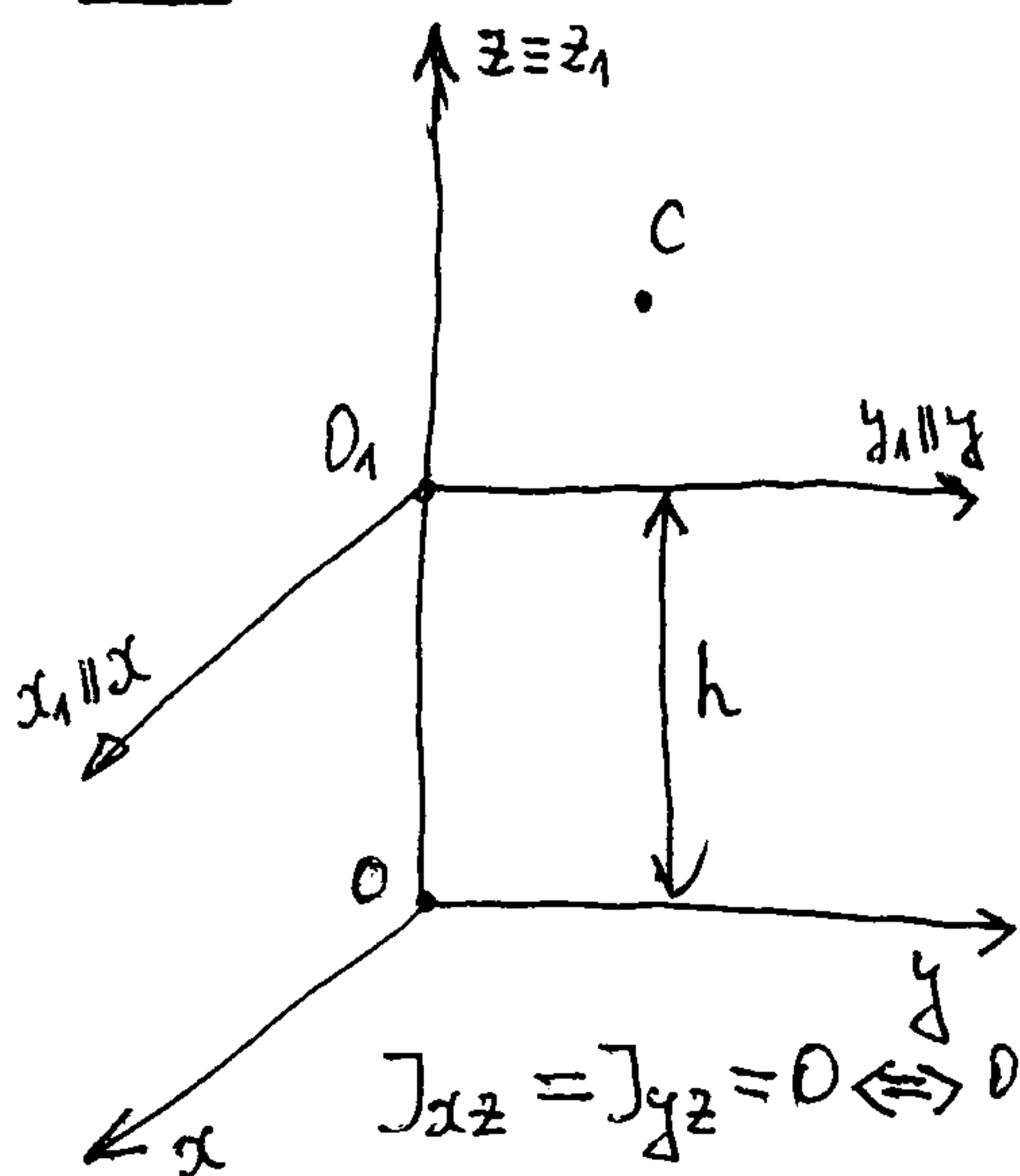
Ako glavna osa inercije prolazi kroz centar inercije sistema, ona se zove glavna centralna osa inercije.

Ako su  $J_{xy} = J_{xz} = J_{yz} = 0$ , sve tri ose ( $x, y, z$ ) su glavne ose, a koordinatni sistem  $Oxyz$  se zove sistem glavnih osa inercije. Može se pokazati da se u proizvoljnoj tački  $O$  može postaviti koordinatni sistem tako da sve tri ose budu glavne ose inercije.

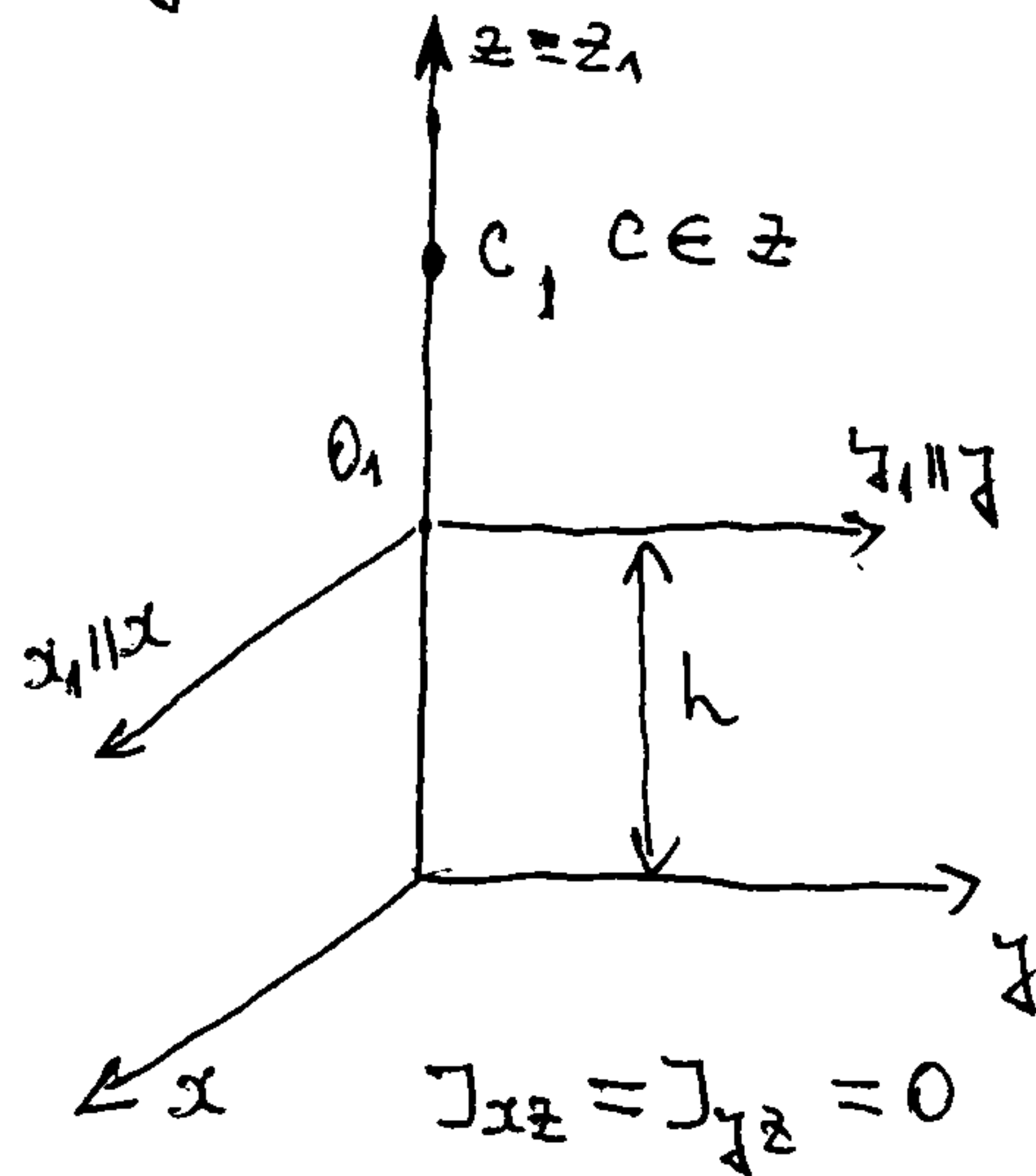
Navedimo, bez dokaza, neke karakteristične osobine glavnih osa inercije.

1) Glavna osa inercije  $Oz$  koja ne prolazi kroz centar inercije je glavna osa inercije samo za tačku  $O$ .

2) Glavna centralna osa inercije  $Oz$  je glavna osa inercije za sve tačke sa te ose.

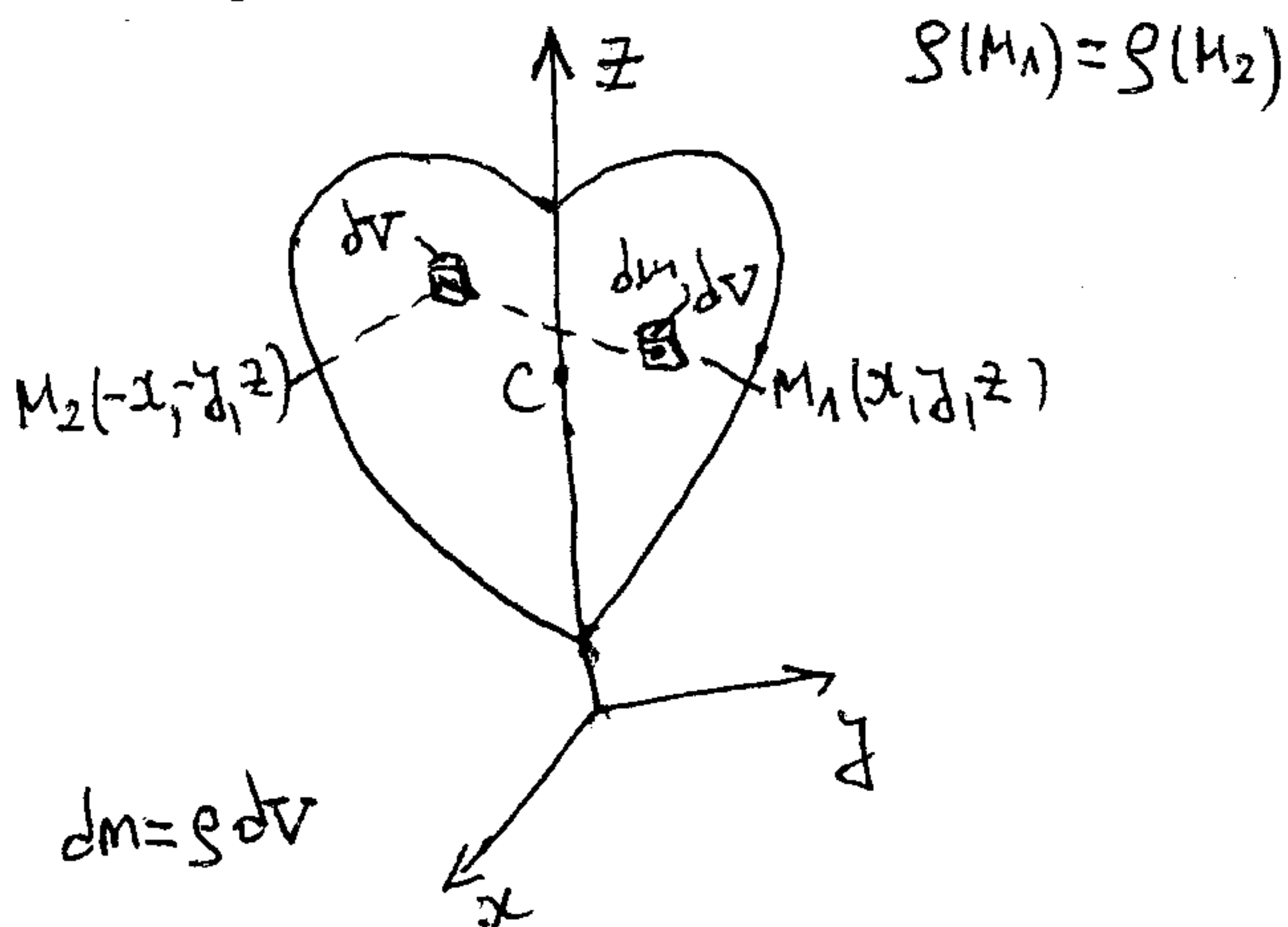


$J_{xz} = J_{yz} = 0 \Leftrightarrow Oz$ -glavna osa inercije,  
 $C \notin z \Rightarrow J_{xz} \neq 0, J_{yz} \neq 0 \Rightarrow O_1 z$  nije -||-



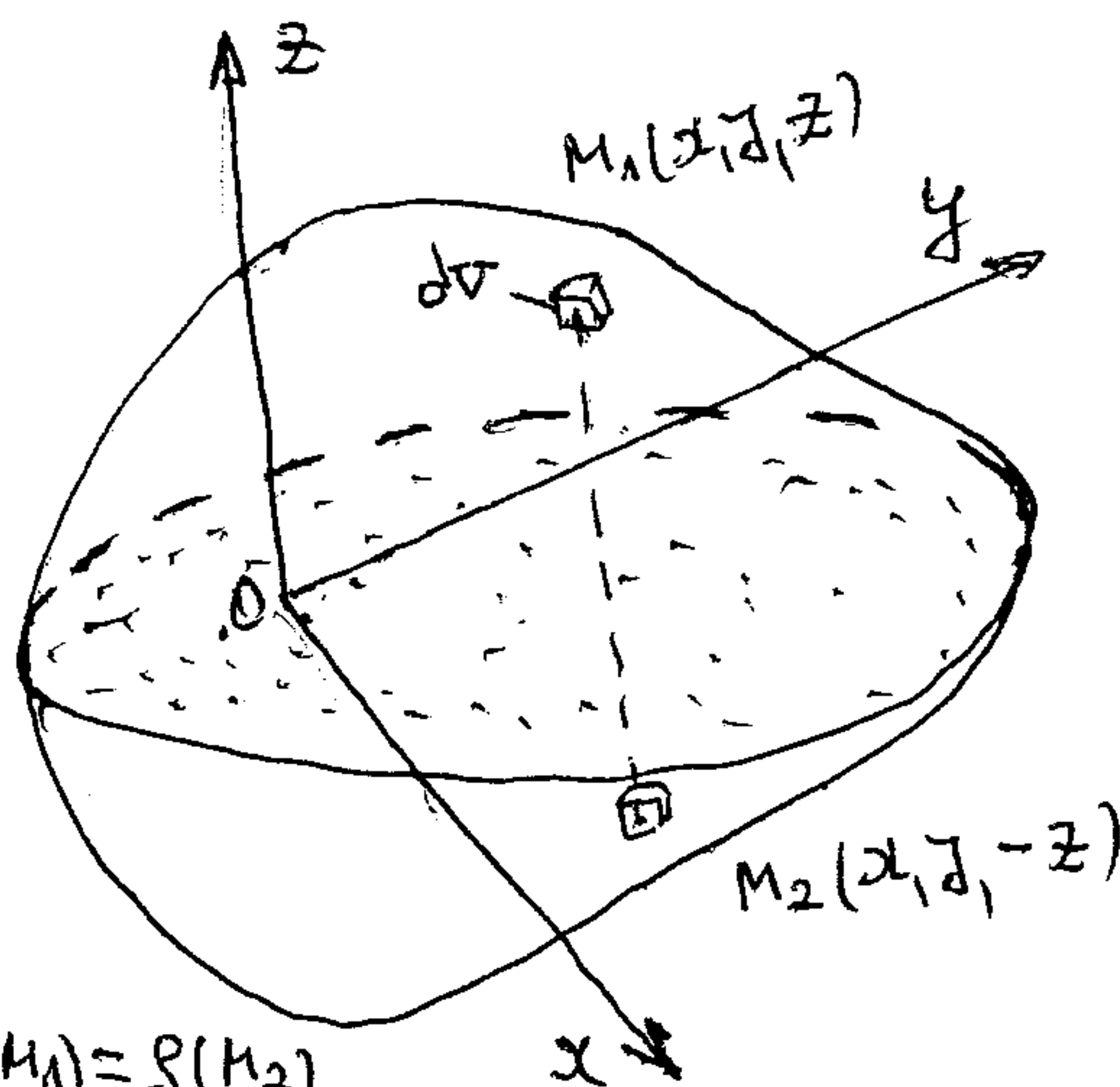
$C \in z \Rightarrow J_{xz} = J_{yz} = 0 \Rightarrow O_1 z$ -glavna osa inercije

3) Ako tijelo ima osnu materijalnu simetriju, tada je ona njegova glavna centralna osa inercije.



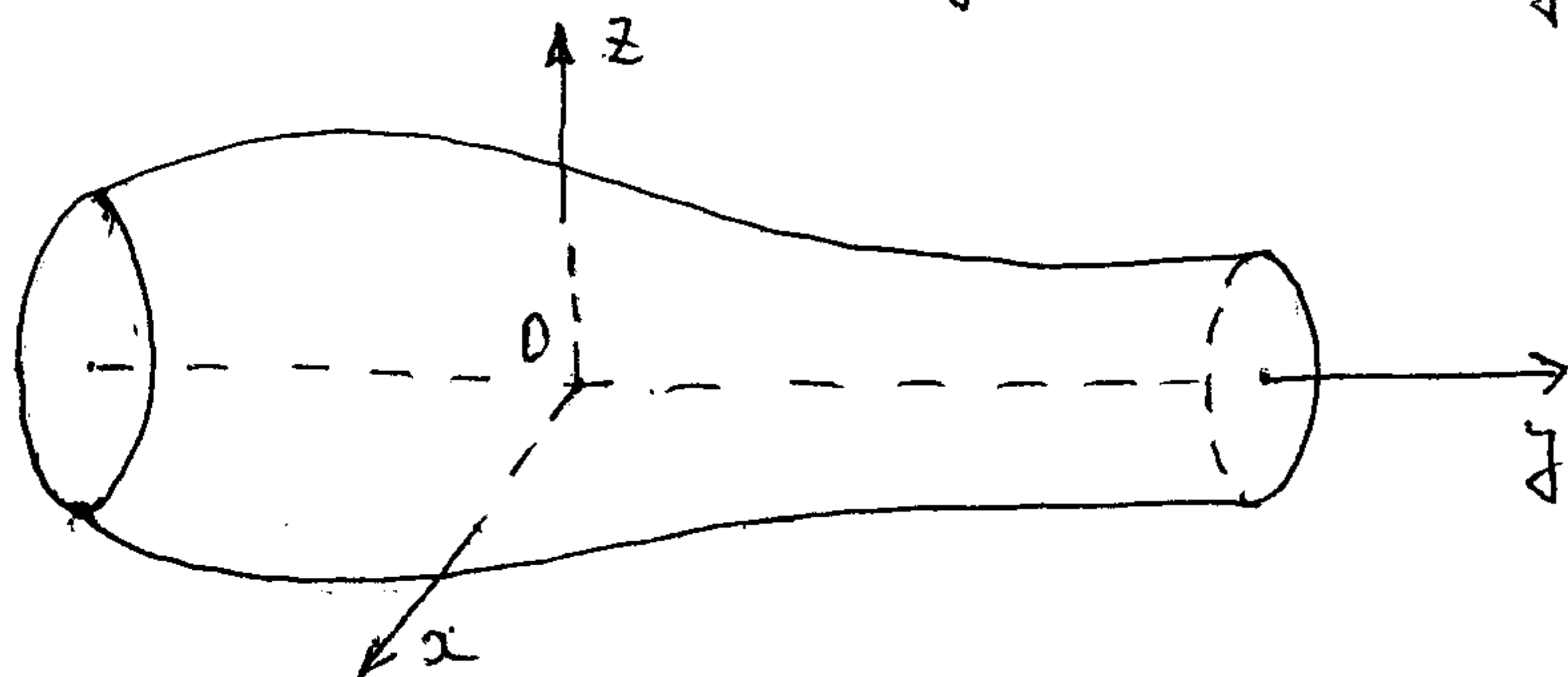
$$\begin{aligned}
 xz \rho(M_1) dV + (-x)z \rho(M_2) dV &\equiv 0 \Rightarrow J_{xz} = 0 \\
 yz \rho(M_1) dV + (-y)z \rho(M_2) dV &\equiv 0 \Rightarrow J_{yz} = 0 \\
 x \rho(M_1) dV + (-x) \rho(M_2) dV &\equiv 0 \Rightarrow x_c = 0 \\
 y \rho(M_1) dV + (-y) \rho(M_2) dV &\equiv 0 \Rightarrow y_c = 0 \quad \Rightarrow C \in z
 \end{aligned}$$

4) Ako tijelo ima ravan materijalnu simetriju, tada je svaka prava upravna na nju glavna osa inercije za tačku prodora prave kroz ravan materijalnu simetriju.



$$\begin{aligned}
 xz \rho(M_1) dV + x(-z) \rho(M_2) dV &\equiv 0 \Rightarrow J_{xz} = 0 \\
 yz \rho(M_1) dV + y(-z) \rho(M_2) dV &\equiv 0 \Rightarrow J_{yz} = 0
 \end{aligned}$$

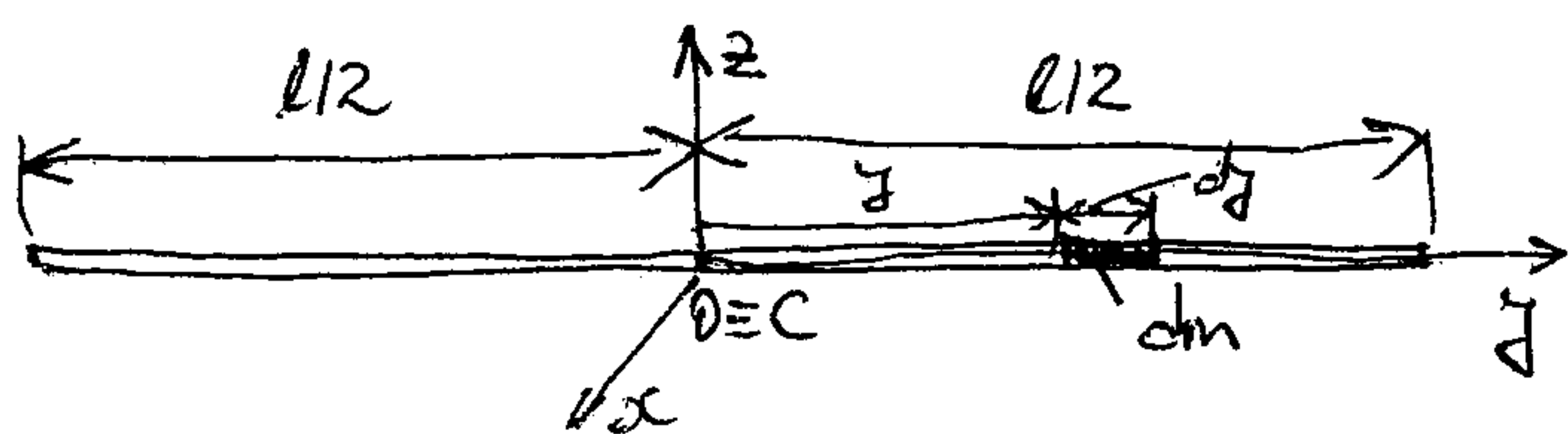
5) Za obzato homogeno tijelo osa obrotanja i druge dvije ose međusobno upravne i upravne na osu obrotanja čine sistem glavnih osa inercije.



$$J_{xy} = J_{xz} = J_{yz} = 0$$

### 4.3. Osnovni primjeri

1) Homogeni tanki štap dužine  $l$  i mase  $m$



$$dm = \rho'' dy, \quad \rho'' = \frac{m}{l}$$

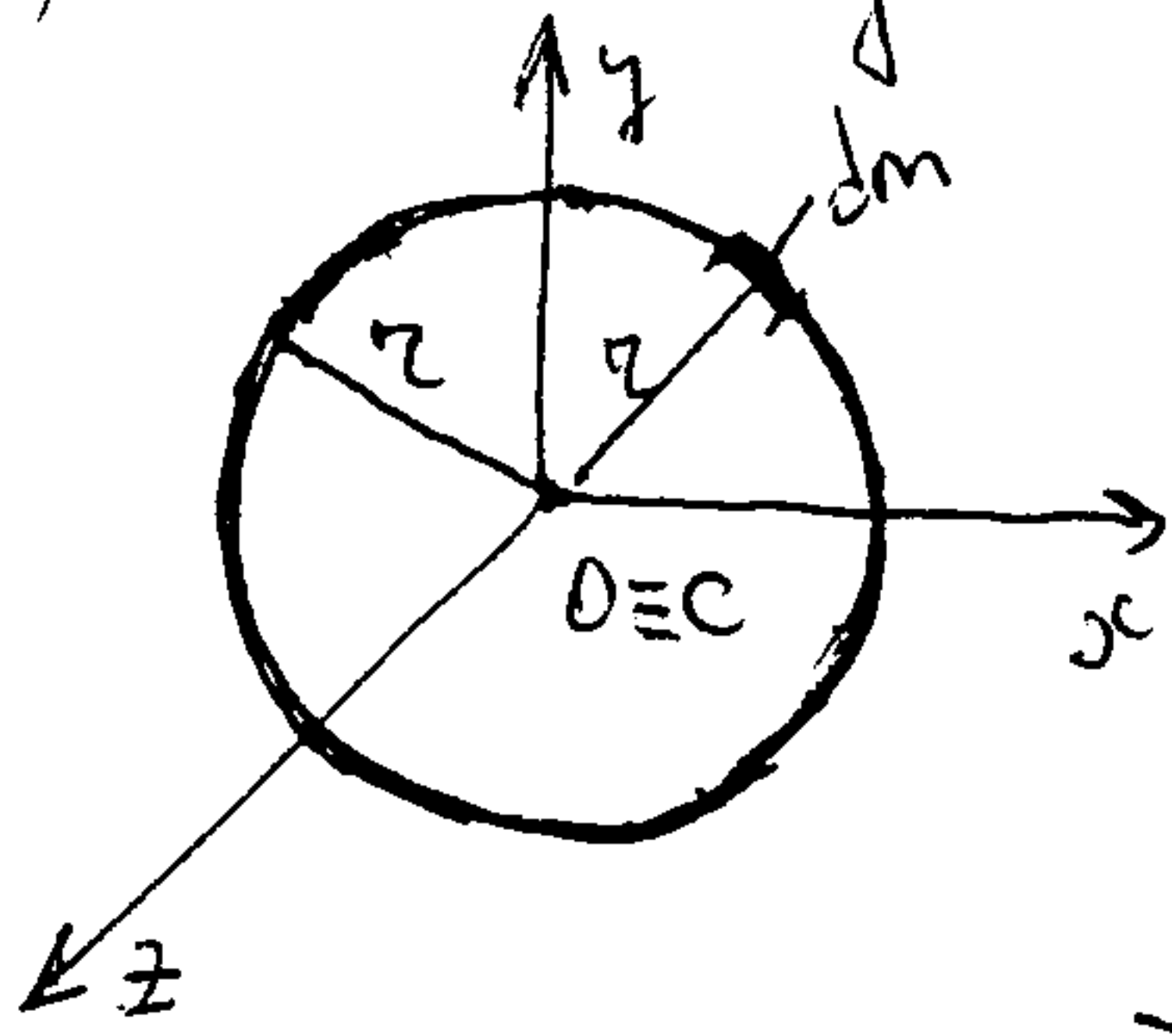
$$J_x = J_z = \int_{(m)} y^2 dm = \frac{m}{l} \int_{-l/2}^{l/2} y^2 dy = \frac{ml^2}{12}$$

$$J_y = \int_{(m)} 0 \cdot dm = 0$$

$$J_{xy} = J_{xz} = J_{yz} = \int_{(m)} 0 \cdot dm = 0$$



2) Momenti inercije tačke kružne homogene žice mase  $m$  i poluprečnika  $r$ .



Žica leži u ravni  $Oxy$ , pa je  $J_x + J_y = J_z$

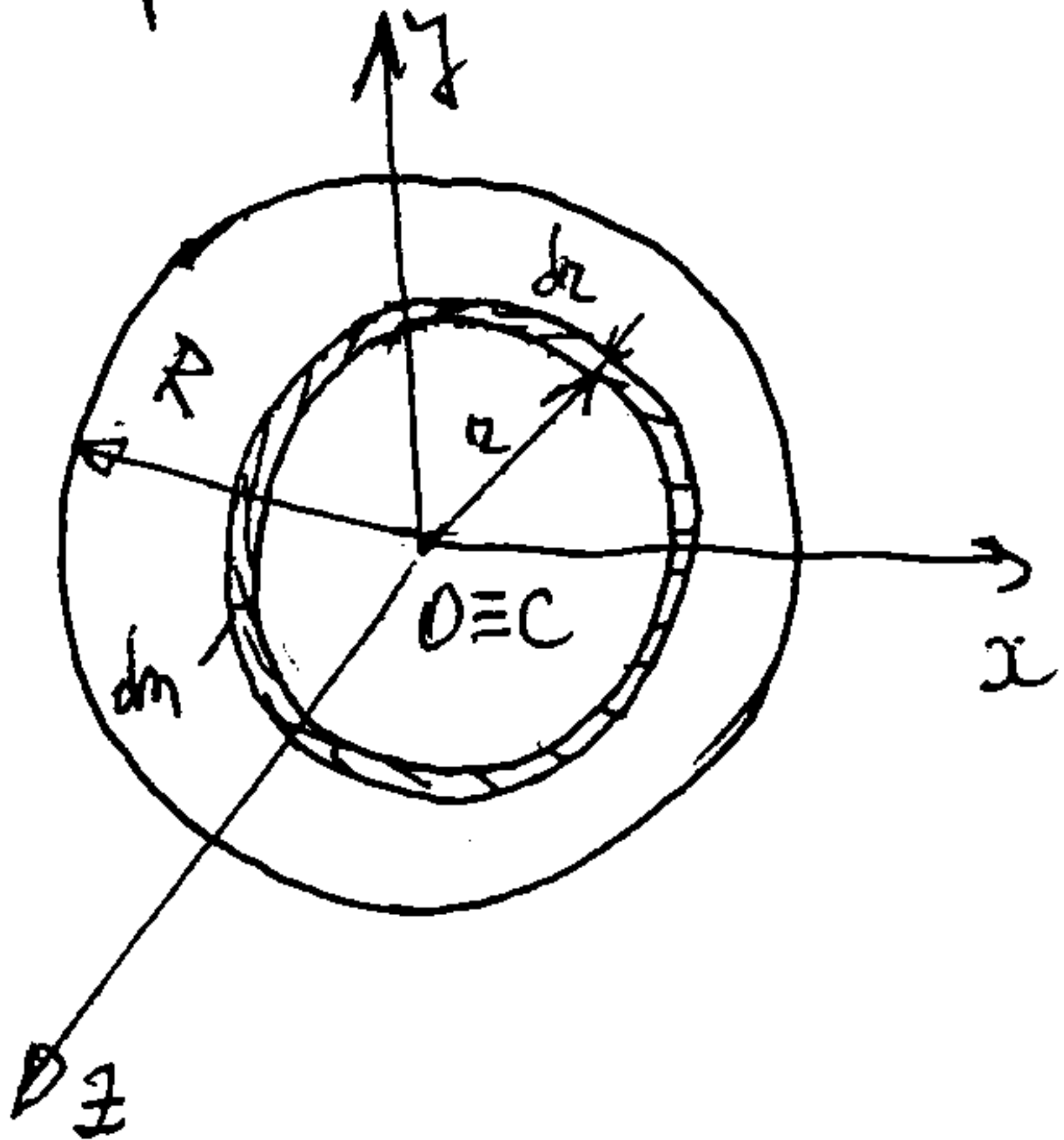
Zbog istovjetnog rasporeda mase u odnosu na ose  $x$  i  $y$ , očigledno je  $J_x = J_y$

$$J_z = \int_{(m)} r^2 dm = r^2 \int_{(m)} dm = r^2 m$$

$$\Rightarrow J_x = J_y = \frac{J_z}{2} = \frac{m r^2}{2}$$

Zbog mat. simetrije je  $J_{xz} = J_{yz} = J_{xy} = 0$

3) Momenti inercije homogenog kružnog diska (kružne ploče male debljine) mase  $m$  i poluprečnika  $R$ .



$$J_x + J_y = J_z, \quad J_x = J_y = \frac{1}{2} J_z$$

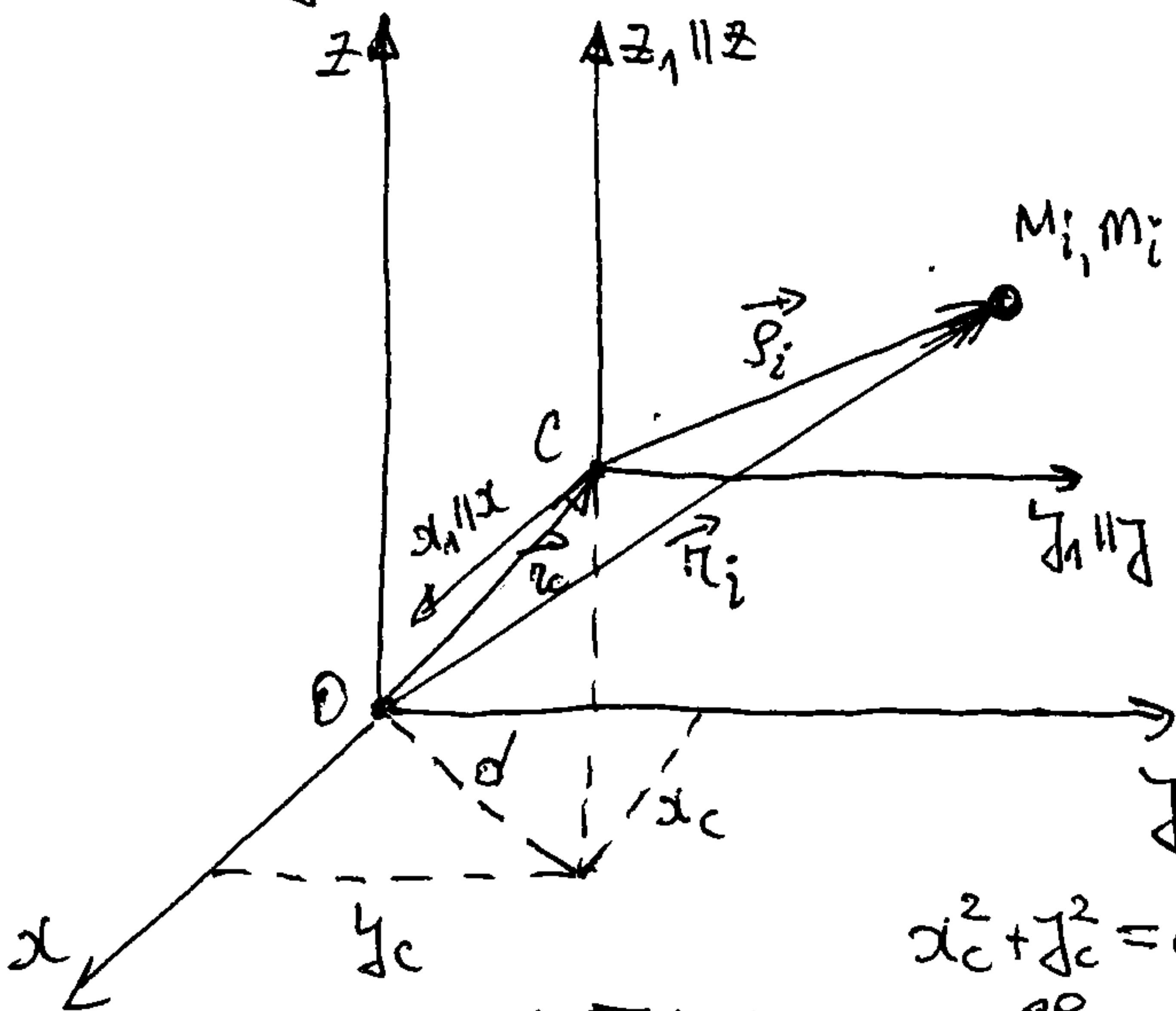
$$J_{xy} = J_{xz} = J_{yz} = 0$$

$$dJ_z = J_z(dm) = r^2 dm, \quad dm = s' 2\pi r dr, \quad s' = \frac{m}{2\pi R^2}$$

$$J_z = \int_{(m)} r^2 dm = \frac{2m}{R^2} \int_0^R r^3 dr = \frac{1}{2} m R^2$$

#### 4.4. Momenti inercije za paralelne ose (Hajgens-Štajnerova teorema)

Uočimo dva koordinatna sistema  $Oxyz$  i  $O_1x_1y_1z_1$ , pri čemu je početak drugog sistema u centru inercije materijalnog sistema  $C$ , a ose su im paralelne sa odgovarajućim osama prvog sistema.



$$\vec{r}_i = \vec{r}_c + \vec{r}_i \Leftrightarrow \begin{cases} x_i = x_c + x_{i1} \\ y_i = y_c + y_{i1} \\ z_i = z_c + z_{i1} \end{cases}$$

$$J_z = \sum M_i (x_i^2 + y_i^2) = \sum M_i [(x_c + x_{i1})^2 + (y_c + y_{i1})^2]$$

$$\Rightarrow J_z = \sum M_i (x_{i1}^2 + y_{i1}^2) + (x_c^2 + y_c^2) \sum M_i + 2x_c \sum M_i x_{i1} + 2y_c \sum M_i y_{i1}$$

Kako je  $\sum M_i (x_{i1}^2 + y_{i1}^2) = J_{z_1}$ ,  $\sum M_i = m$  - masa sistema,  $x_c^2 + y_c^2 = d^2$  - kvadrat raskojanja između osa  $z$  i  $z_1$ ,  $\sum M_i x_{i1} = m x_{AC} = 0$

$$\text{ i } \sum M_i y_{i1} = m y_{AC} = 0 \text{ (v. 3.2), to je } \boxed{J_z = J_{z_1} + m d^2}$$

Ovim je dokazana Hajgens-Štajnerova teorema za aksijalne momente inercije: Moment inercije sistema za neki osu jednaki je zbir momenta inercije za paralelnu centралnu osu i proizvoda mase sistema i kvadrata raskojanja između tih osa.

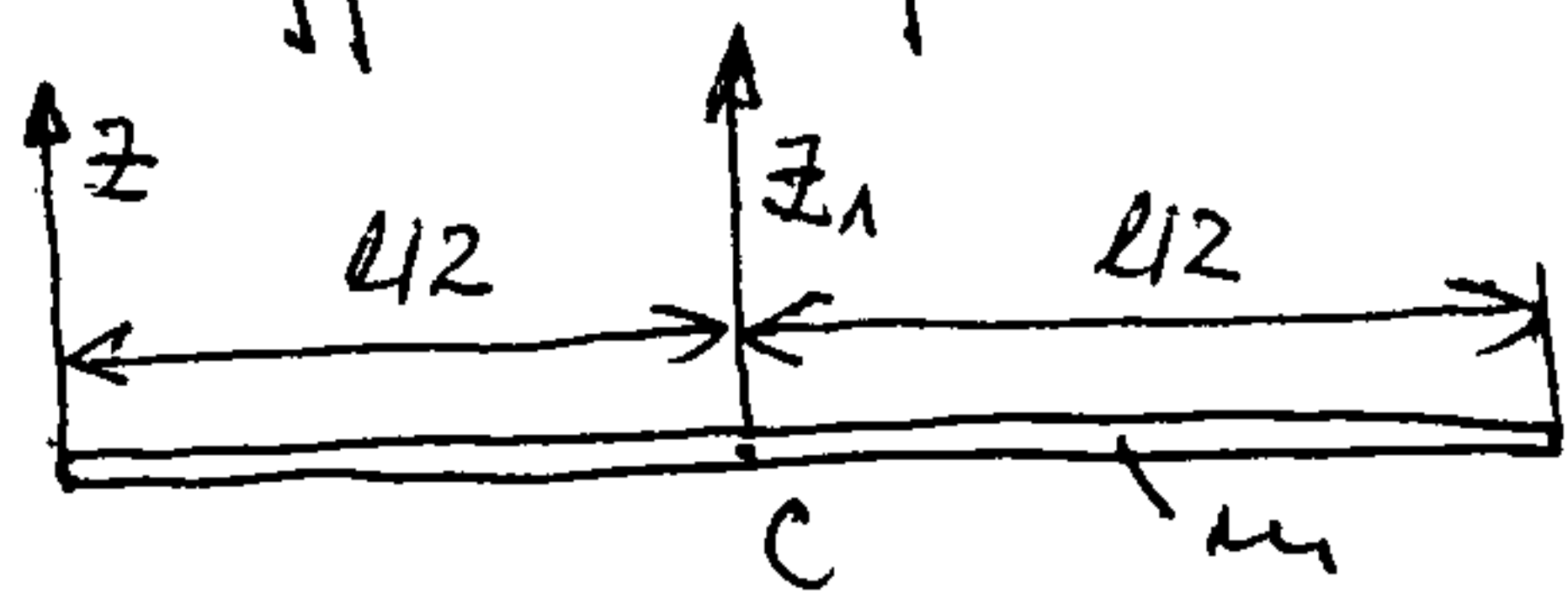


Analogno se izvodi da je

$$J_{xy} = J_{x_1 y_1} + m x_c y_c,$$

što predstavlja Hajjens-Štajnerov korekcijski za centrifugalne momente inercije.

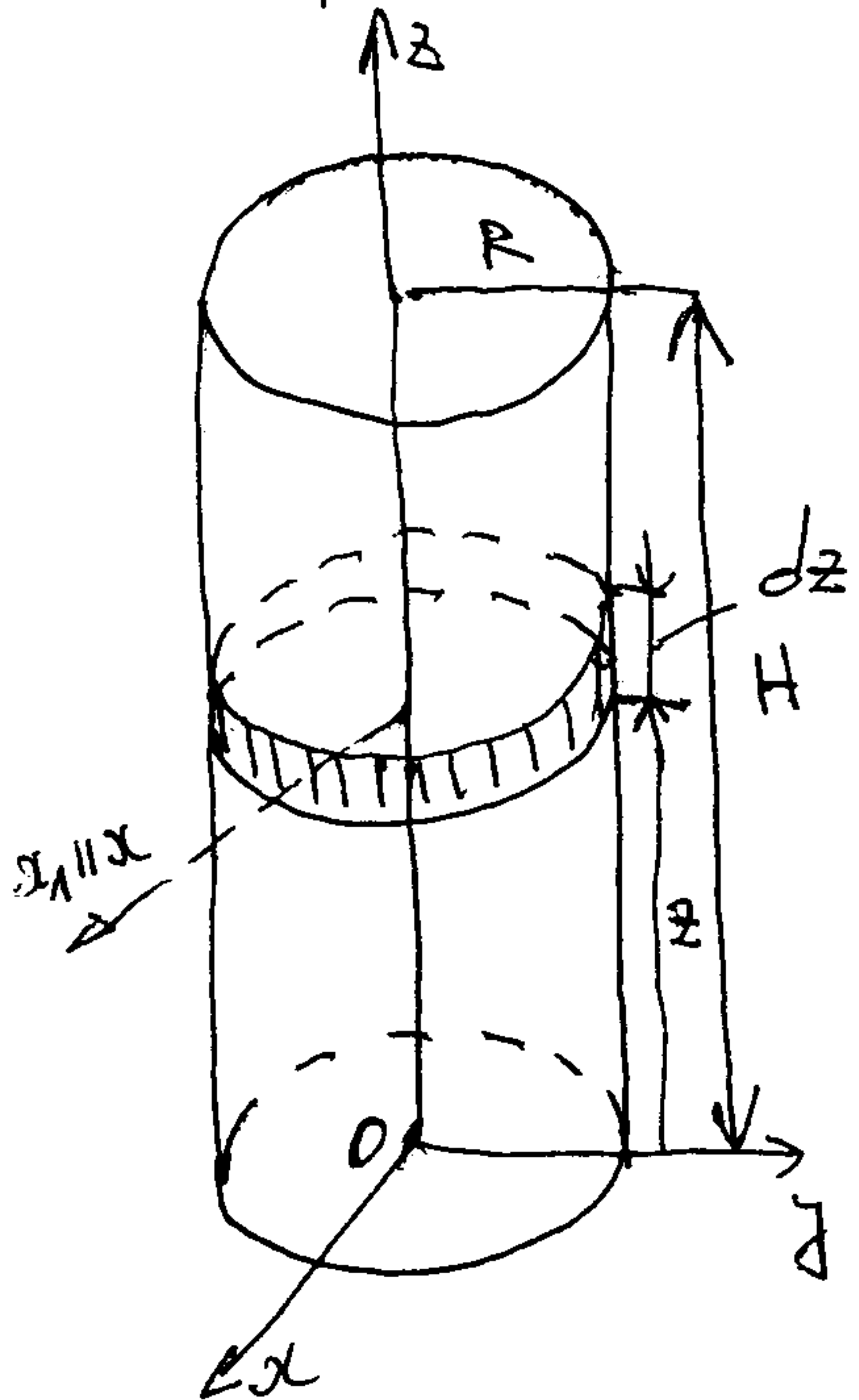
Pr. 1.



$$J_{z_1} = \frac{ml^2}{12}, \quad J_z = ?$$

$$J_z = J_{z_1} + m \left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{ml^2}{3}$$

Pr. 2. Izračunati momente inercije homogenog pravog kružnog valjka, poluprečnika rade  $R$ , visine  $H$  i mase  $m$ , za koordinatni sistem  $Oxyz$ .



Izdijelimo valjak na tanke diske debljine  $dz$ .  
Masa jednog diska je  $dm = \rho dV = \rho R^2 \pi dz$ , gdje je  $\rho = \frac{m}{V} = \frac{m}{R^2 \pi H}$  pa je  $dm = \frac{m}{H} dz$

$$dJ_z = J_z(dm) = \frac{dm R^2}{2} = \frac{m}{H} \frac{R^2}{2} dz$$

$$J_z = \int_0^H \frac{m R^2}{2H} dz = \frac{m R^2}{2}$$

$$dJ_x = J_x(dm) \stackrel{\text{H.Š.T.}}{=} J_{x_1}(dm) + dm \cdot z^2$$

$$dJ_x = \left(\frac{R^2}{4} + z^2\right) \frac{m}{H} dz, \quad \text{gdje } \frac{dm \cdot R^2}{4}$$

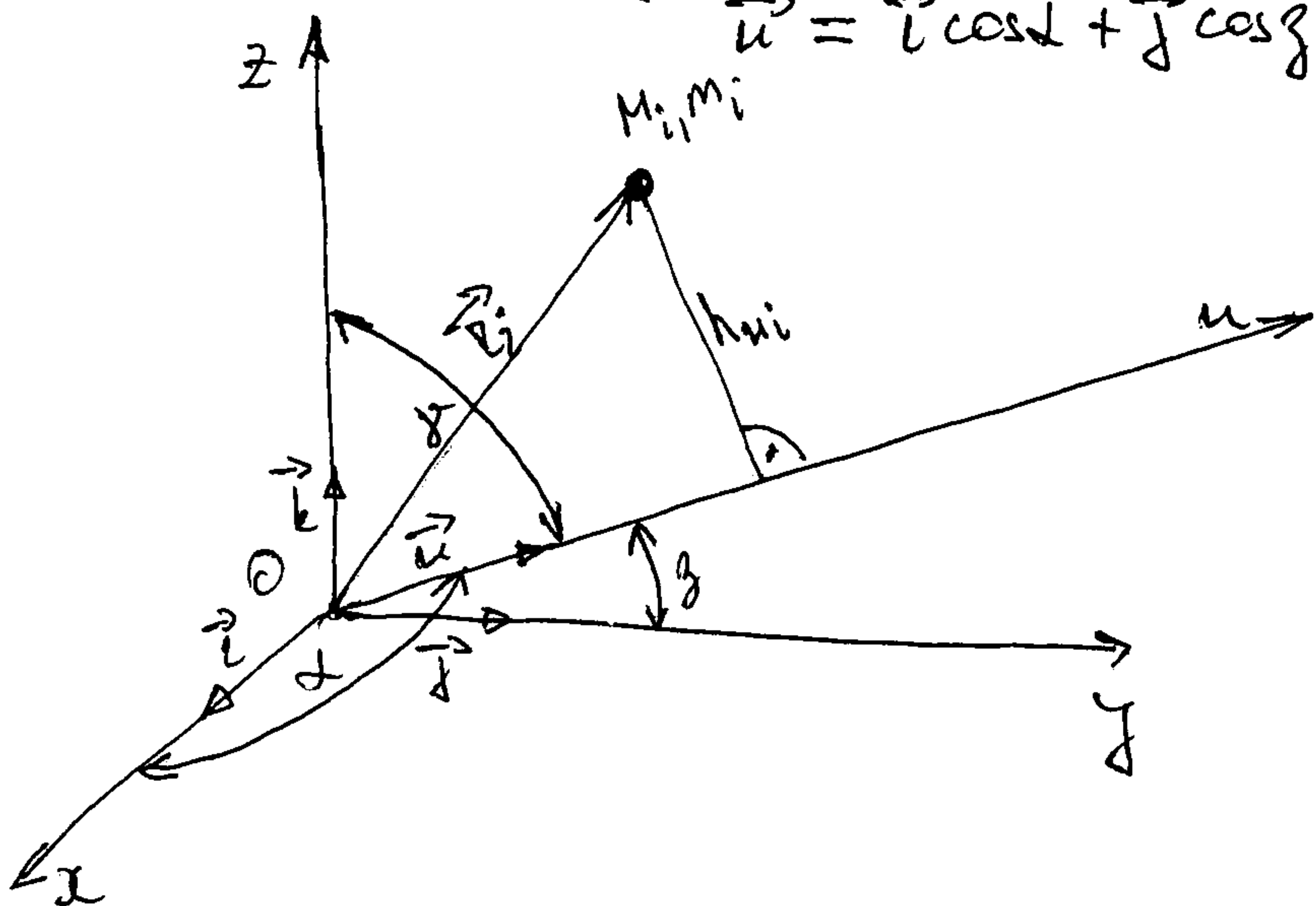
$$J_x = \frac{m}{H} \int_0^H \left(\frac{R^2}{4} + z^2\right) dz = m \left(\frac{R^2}{4} + \frac{H^2}{3}\right)$$

Zbog simetrije je  $J_y = J_x$  i  $J_{xy} = J_{xz} = J_{yz} = 0$

4.5. Moment inercije u odnosu na proizvoljni osi kroz neki točku.

Neka je u koordinatnom sistemu  $Oxyz$  data osa  $ou$  čija je orijentacija u prostoru određena jediničnim vektorom

$$\vec{u} = \vec{i} \cos \alpha + \vec{j} \cos \beta + \vec{k} \cos \gamma$$



$$J_u = \sum M_i h_{ui}^2$$

$$h_{ui} = r_i \sin \alpha(\vec{u}, \vec{r}_i) = |\vec{u} \times \vec{r}_i|$$

Posto je

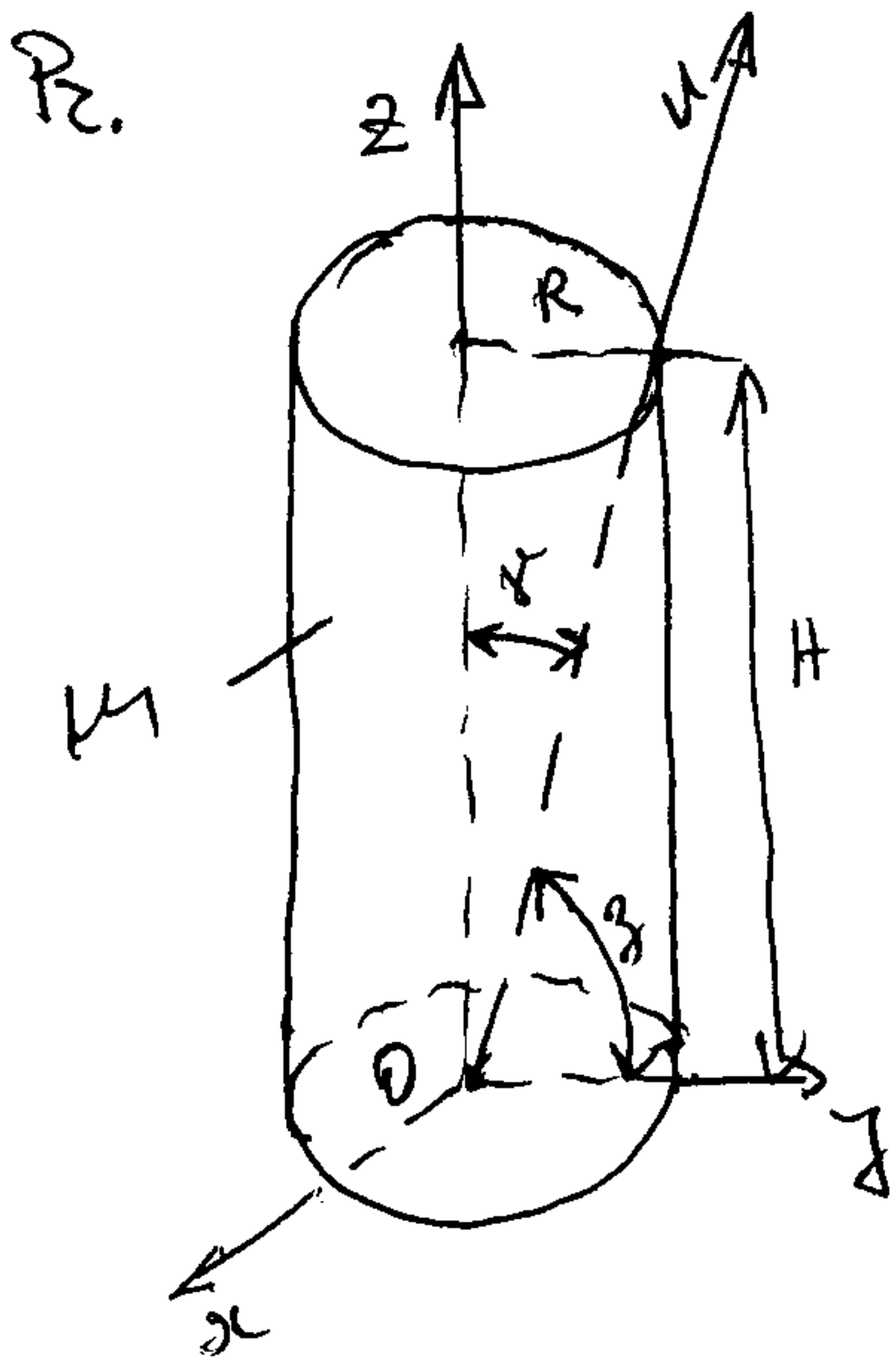
$$\vec{u} \times \vec{r}_i = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ x_i & y_i & z_i \end{vmatrix} = (z_i \cos\beta - y_i \cos\gamma) \vec{i} + (x_i \cos\gamma - z_i \cos\alpha) \vec{j} + (y_i \cos\alpha - x_i \cos\beta) \vec{k},$$

te je  $h_{ui}^2 = (z_i \cos\beta - y_i \cos\gamma)^2 + (x_i \cos\gamma - z_i \cos\alpha)^2 + (y_i \cos\alpha - x_i \cos\beta)^2,$

pa postaje elementarni izraz, imajući u vidu definicije momenata inercije za dekartovog koordinatnog sistema, dobijemo

$$J_u = J_x \cos^2\alpha + J_y \cos^2\beta + J_z \cos^2\gamma - 2J_{xy} \cos\alpha \cos\beta - 2J_{xz} \cos\alpha \cos\gamma - 2J_{yz} \cos\beta \cos\gamma$$

Na ovaj način, znajući momente inercije za koordinatni sistem  $Oxyz$  i položaj proizvoljne ose  $Ou$  ( $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ ), možemo za nju odrediti moment inercije.



$$J_u = ?$$

$$\cos\alpha = 0, \cos\beta = \frac{R}{\sqrt{R^2 + H^2}}, \cos\gamma = \frac{H}{\sqrt{R^2 + H^2}}$$

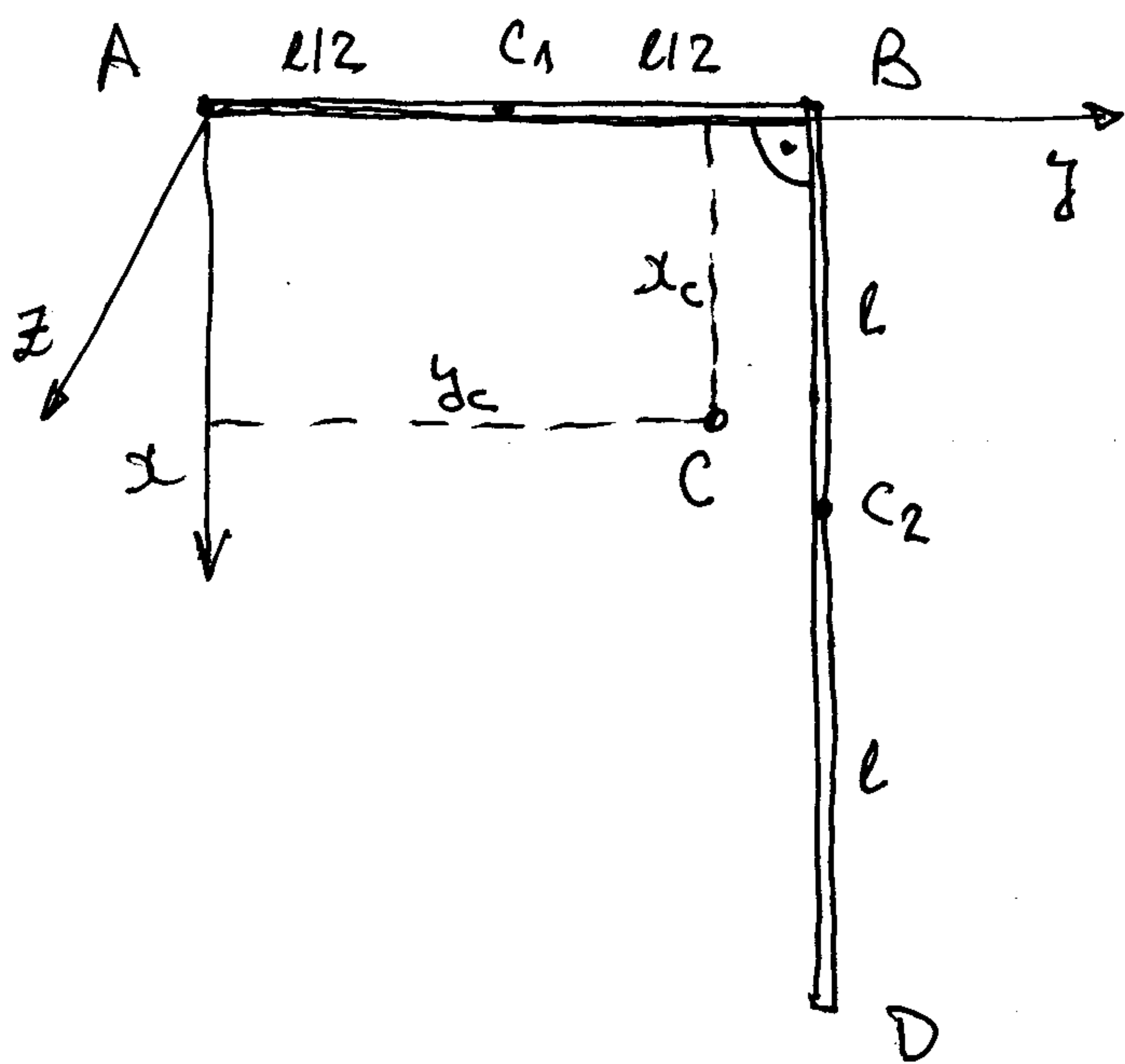
Na osnovu formule iz prethodnog odjeljka, bice

$$J_u = M \left( \frac{R^2}{4} + \frac{H^2}{3} \right) \frac{R^2}{R^2 + H^2} + \frac{M R^2}{2} \cdot \frac{H^2}{R^2 + H^2}$$

$$J_u = M \frac{R^2}{R^2 + H^2} \left( \frac{R^2}{4} + \frac{5}{6} H^2 \right)$$



1. Ugaonik ABD se sastoji od homogenog štapa AB, mase  $m$  i dužine  $l$ , i homogenog štapa BD, mase  $2m$  i dužine  $2l$ , koji leže u horizontalnoj ravni. a) Odrediti položaj centra inercije ugaonika. b) Odrediti moment inercije ugaonika za osu koja prolazi kroz tačku A i upravna je na njegovu ravan. Koliki je poluprečnik inercije ugaonika za tu osu? c) Koliki je moment inercije ugaonika za centar  $m$  osu upravnu na njegovu ravan?



$$a) x_c = \frac{m_{AB} x_{c1} + m_{BD} x_{c2}}{m_{AB} + m_{BD}}$$

$$y_c = \frac{m_{AB} y_{c1} + m_{BD} y_{c2}}{m_{AB} + m_{BD}}$$

$$z_c = 0$$

$$m_{AB} = m, m_{BD} = 2m; x_{c1} = 0, x_{c2} = l,$$

$$y_{c1} = \frac{l}{2}, y_{c2} = l$$

$$\Rightarrow \boxed{x_c = \frac{2}{3}l, y_c = \frac{5}{6}l}$$

$$b) J_{Az} = J_{Az}^{(AB)} + J_{Az}^{(BD)}$$

Na osnovu Hajgens-Štajnerove teoreme je  $J_{Az}^{(AB)} = J_{C1z}^{(AB)} + m_{AB} \cdot \overline{AC_1}^2$  i

$$J_{Az}^{(BD)} = J_{C2z}^{(BD)} + m_{BD} \cdot \overline{AC_2}^2$$

$$J_{C1z}^{(AB)} = m_{AB} \frac{l^2}{12}, J_{C2z}^{(BD)} = m_{BD} \frac{(2l)^2}{12} \quad (\text{više poznato iz prethodnjia})$$

$$\overline{AC_1} = \frac{l}{2}, \overline{AC_2}^2 = l^2 + l^2$$

$$\Rightarrow \boxed{J_{Az} = 5ml^2}$$

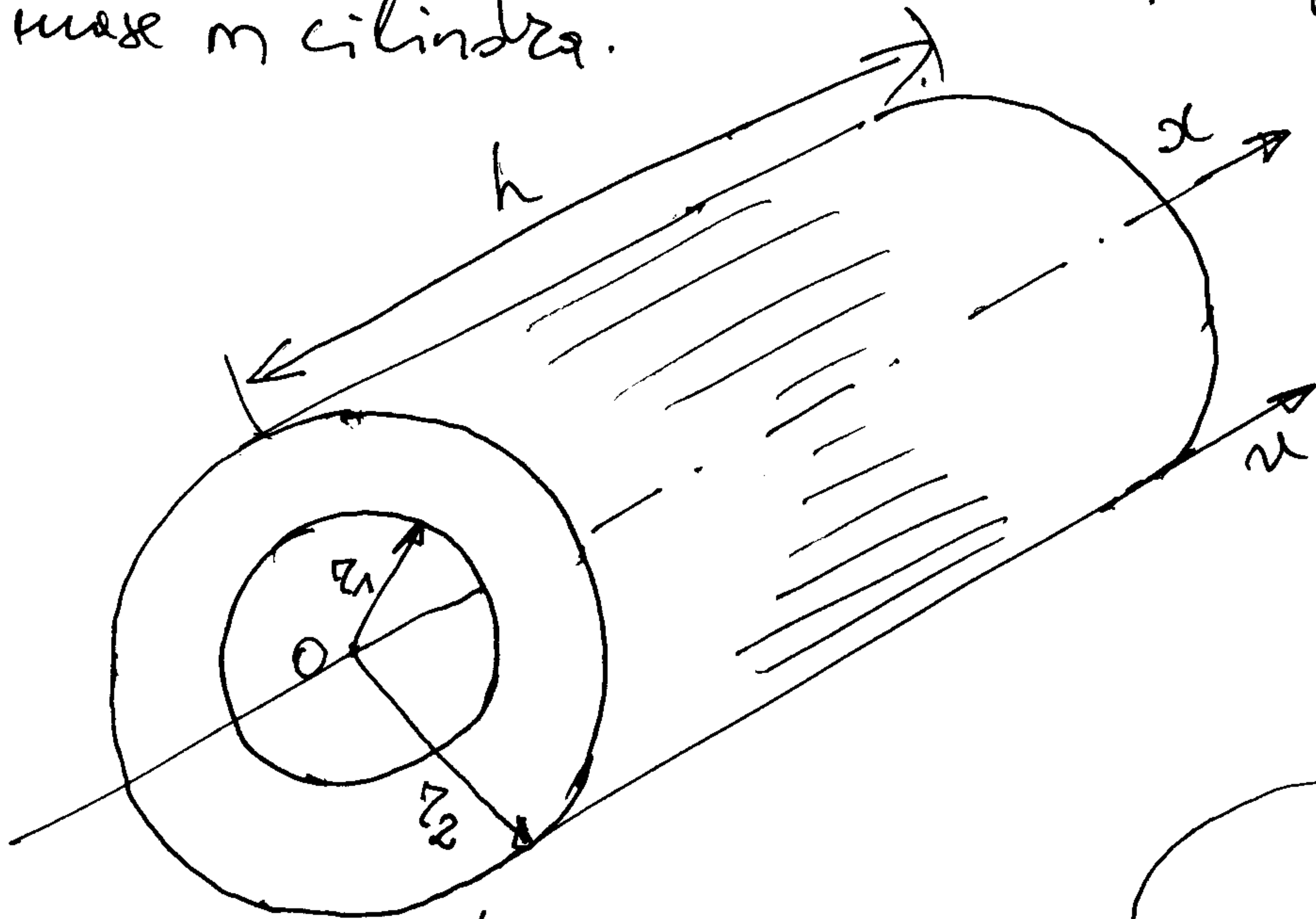
$$i_{Az} = \sqrt{\frac{J_{Az}}{m_{ABD}}} = l \sqrt{\frac{5}{3}}$$

c) Hajgens-Štajnerova kor.  $\Rightarrow J_{Az} = J_{Cz} + (m_{ABD}) \overline{AC}^2$

$$\overline{AC}^2 = x_c^2 + y_c^2 = \frac{41}{36}l^2, \Rightarrow \boxed{J_{Cz} = \frac{19}{12}ml^2}$$

$m_{ABD} = 3m$

2. Izračunati momente inercije homogenog šupljeg cilindra za ose prikazane na slici i izraziti ih preko preseka površine  $S$ , teže  $\rho$  i prečnika mase  $m$  cilindra.



(vidi prethodnja)

- Moment inercije <sup>homogenog</sup> punog cilindra, mase  $m$  i poluprečnika osnove  $R$ , za uzdužnu os simetrije je  $J_x = \frac{mR^2}{2}$ , a teže je  $m = \rho V = \rho R^2 \pi h$ ,  $h$ -visina cilindra, biće

$$J_x = \frac{\rho R^4 \pi h}{2}$$

Možemo smatrati da je šuplji cilindar nastao iz punog cilindra poluprečnika osnove  $r_2$ , "vadenjem" punog koaksijalnog cilindra poluprečnika osnove  $r_1$ .

$$\Rightarrow J_x^{\text{š.c.}} = J_x^{(2)} - J_x^{(1)}, \quad J_x^{(1)} = \frac{\rho r_1^4 \pi h}{2}, \quad J_x^{(2)} = \frac{\rho r_2^4 \pi h}{2}$$

$$J_x^{\text{š.c.}} = \frac{\pi \rho h}{2} (r_2^4 - r_1^4)$$

$$\rho = \frac{m}{V^{\text{š.c.}}} = \frac{m}{(r_2^2 - r_1^2) \pi h}$$

$$r_2^4 - r_1^4 = (r_2^2 - r_1^2)(r_2^2 + r_1^2)$$

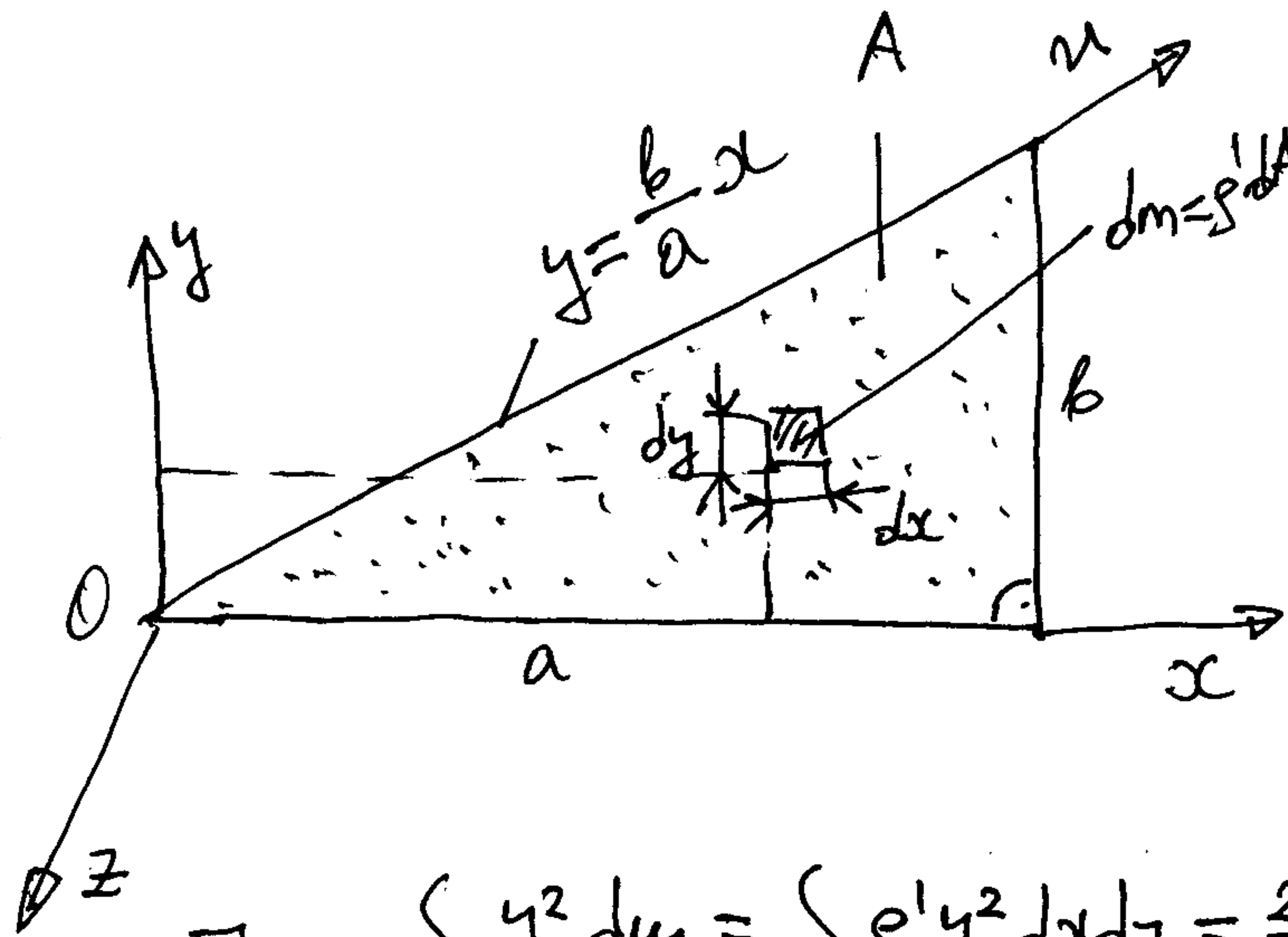
$$\Rightarrow J_x^{\text{š.c.}} = \frac{m}{2} (r_1^2 + r_2^2)$$

$$J_m^{\text{š.c.}} = J_x^{\text{š.c.}} + m r_2^2 = \frac{m}{2} (r_1^2 + 3r_2^2)$$

→ Hajgens-Štajnrova teorema



3. Odrediti momente inercije homogene tanke ploče u obliku pravoklog trougla kateta  $a$  i  $b$  za ose koordinatnog sistema  $Oxyz$ . Količi je moment inercije ploče za osu  $u$  koja prolazi kroz hipotenuzu trougla.



- elementarna masa  $dm$  površine  $dA = dxdy$  je  
 $dm = \rho' dxdy$ ,  $\rho'$  - površinska gustina

$\rho' = \frac{m}{A}$ ,  $A = \frac{ab}{2}$

$\rho' = \frac{2m}{ab}$

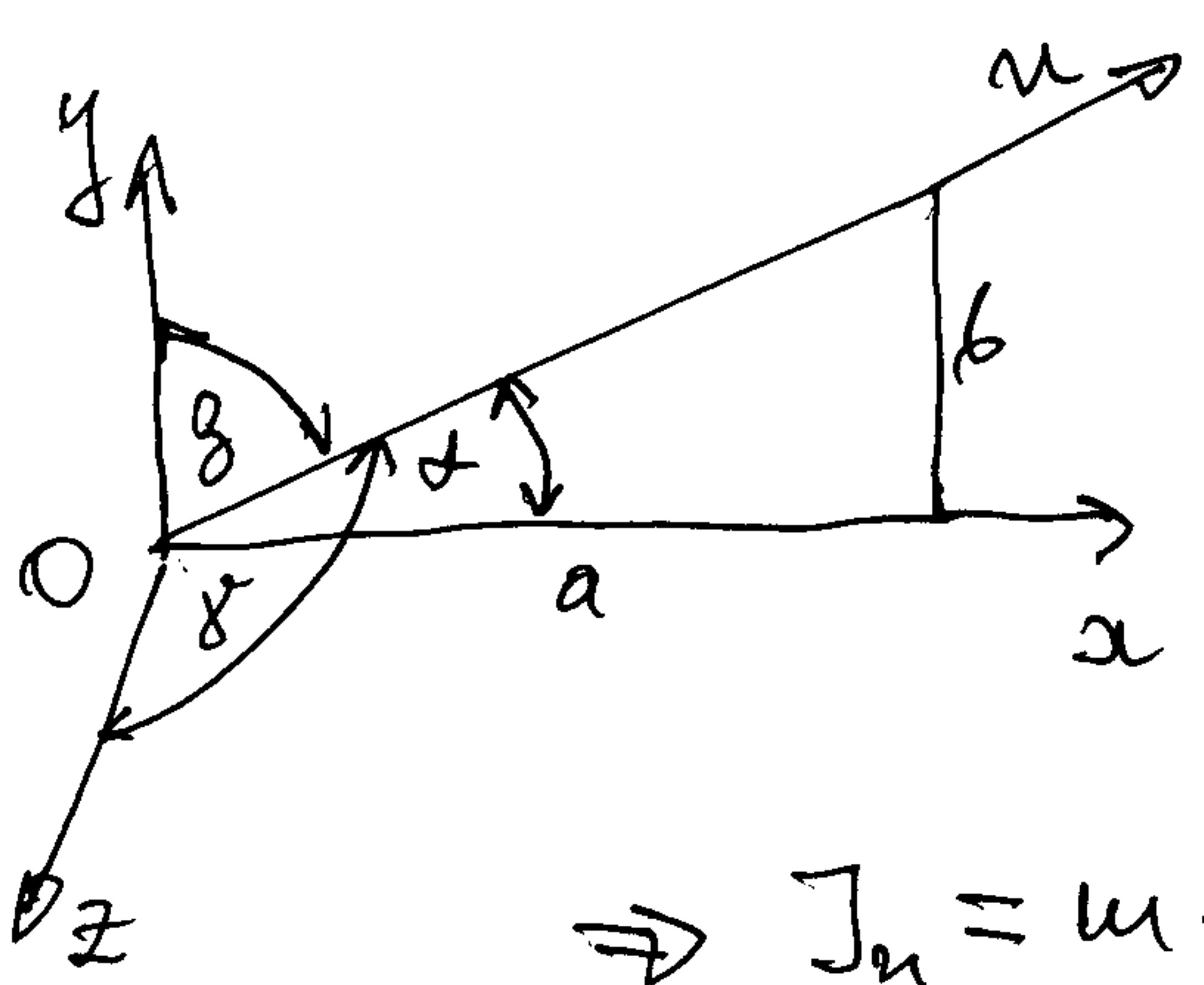
$$J_x = \int_{(m)} y^2 dm = \int_{(A)} \rho' y^2 dxdy = \frac{2m}{a \cdot b} \int_0^a \int_0^{\frac{b}{a}x} y^2 dy = \frac{mb^2}{6}$$

$$J_y = \int_{(m)} x^2 dm = \frac{2m}{a \cdot b} \int_0^a \int_0^{\frac{b}{a}x} x^2 dxdy = \frac{ma^2}{2}$$

Musa raspoređena u ravni  $Oxy \Rightarrow J_z = J_x + J_y = m \left( \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{6} \right)$

$$J_{xz} = \int_{(m)} xz dm = 0, \quad J_{yz} = \int_{(m)} yz dm = 0$$

$$J_{xy} = \int_{(m)} xy dm = \frac{2m}{ab} \int_0^a \int_0^{\frac{b}{a}x} xy dxdy = \frac{m}{4} ab$$

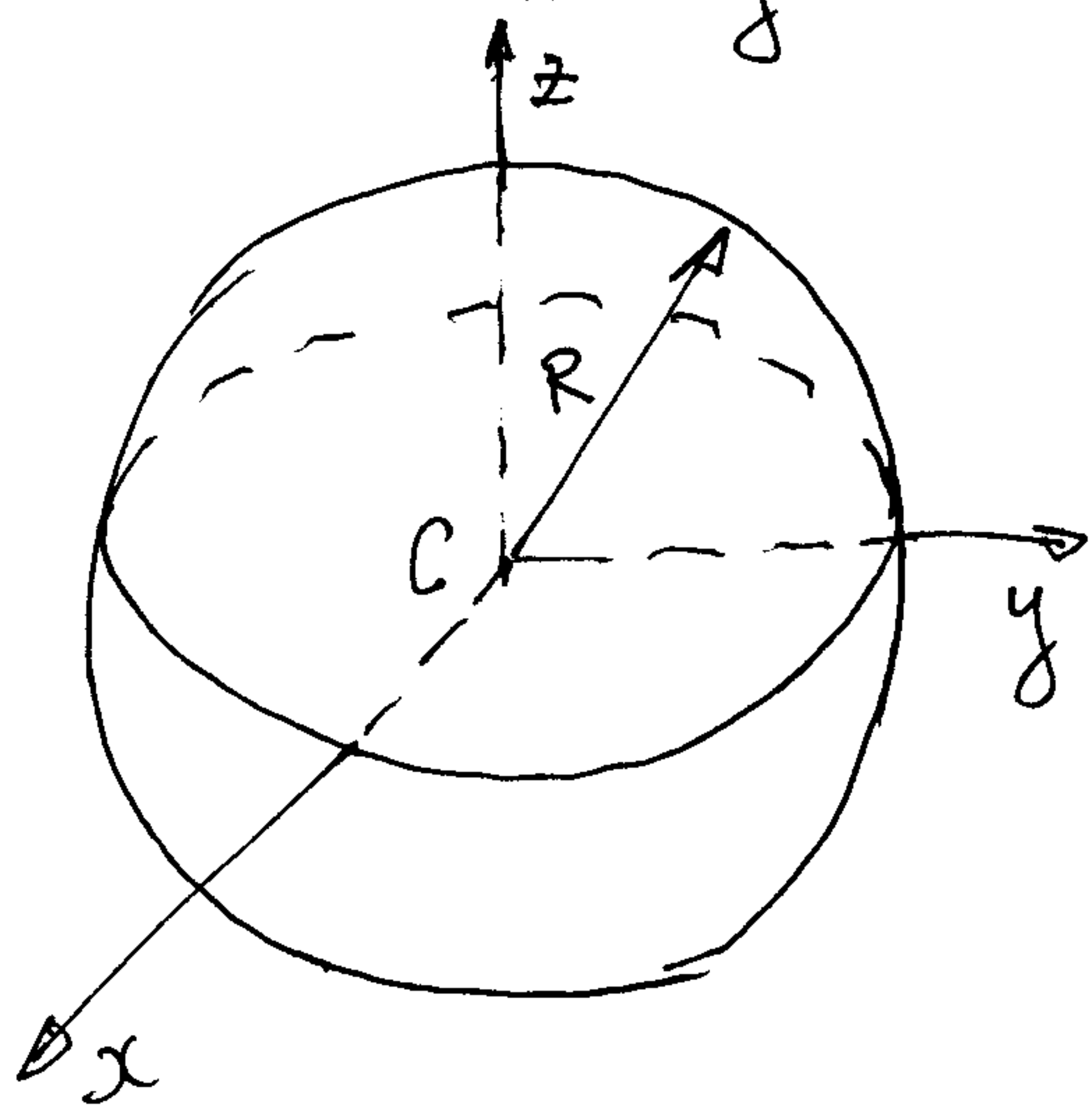


$$J_u = J_x \cos^2 \alpha + J_y \cos^2 \beta + J_z \cos^2 \gamma - 2J_{xy} \cos \alpha \cos \beta - 2J_{xz} \cos \alpha \cos \gamma - 2J_{yz} \cos \beta \cos \gamma \text{ (v. predavanja)}$$

$$\cos \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad \cos \beta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad \gamma = \frac{\pi}{2} \rightarrow \cos \gamma = 0$$

$$\Rightarrow J_u = m \frac{3a^4 + b^4 + 5a^2b^2}{3(a^2 + b^2)}$$

4. Odrediti momente inercije homogene lopte, mase  $m$  i poluprečnika  $R$ , za ose centralnog koordinatnog sistema  $Cxyz$ .

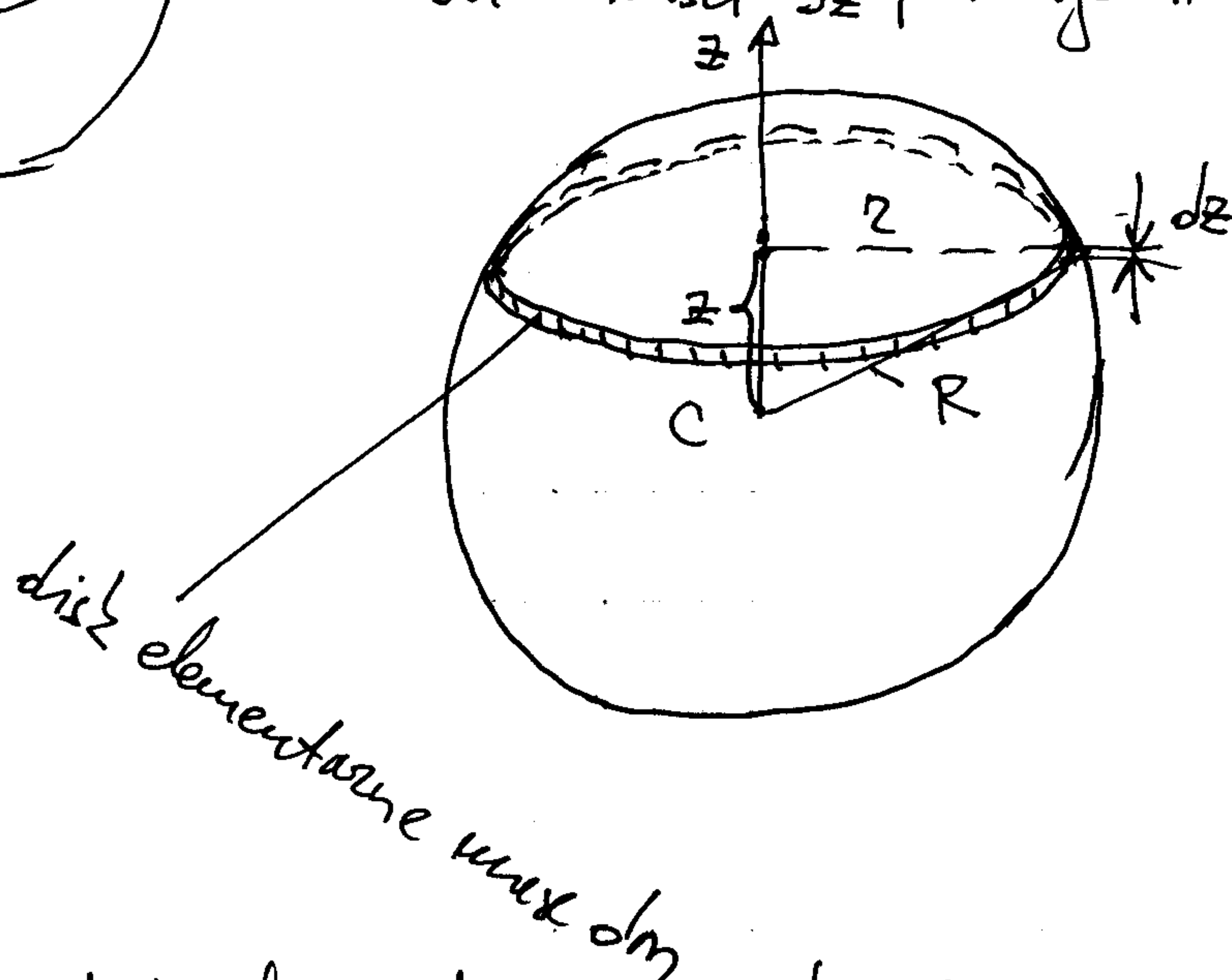


Zbog materijalne simetrije je

$J_{xy} = J_{xz} = J_{yz} = 0$  (tj.  $Cxyz$  je sistem centralnih glavnih osa), a tožade i

$$J_x = J_y = J_z$$

Da binašli  $J_z$  primijenimo metod presjeka.



Primijenivši na disk elementarne mase  $dm$  izraz za moment inercije diska za centralnu osu upravnu na njegov ravan (v. predavanja) imamo da je

$$dJ_z = J_z(dm) = \frac{dm r^2}{2}$$

$$dm = \rho dV, \quad dV = r^2 \pi dz - \text{zapremina elementarnog diska}$$

$$\rho = \frac{m}{V}, \quad V = \frac{4}{3} R^3 \pi - \text{zapremina lopte}$$

$$dJ_z = \frac{3m}{8R^3} r^4 dz, \quad r^2 = R^2 - z^2$$

$$J_z = \int_{-R}^R \frac{3m}{8R^3} (R^2 - z^2) dz = \frac{3m}{8R^3} \int_{-R}^R (R^2 - z^2) dz = \frac{2}{5} m R^2$$