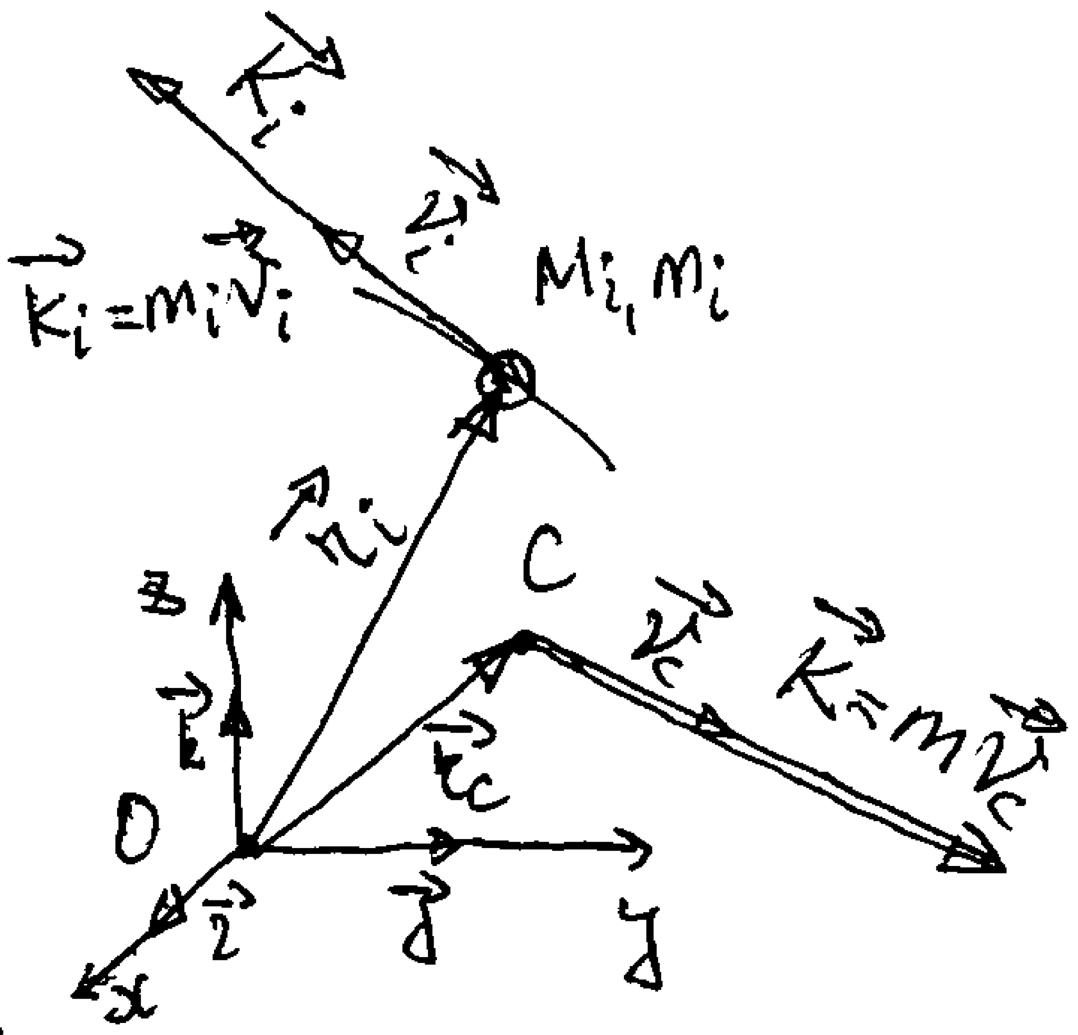
VIII sednica nastave

– predavanja sa primjerima –

5. Zakon o promjeni količine kretanja sistema



5.1 Količina kretanja sistema

Količina kretanja sistema materijalnih tačaka je vektor $\vec K$ koji je jednak vektorskom zbiru (glavnom vektoru) količina kretanja pojedinih materijalnih tačaka sistema:

$$\vec K = \sum \vec K_i = \sum m_i \vec v_i$$

Pošto je $\sum m_i \vec v_i = \frac{d}{dt} \sum m_i \vec r_i$, i $\sum m_i \vec r_i = m \vec r_c$ (v. 3.1), to je

$$\vec K = m \vec v_c, \qquad (1)$$

odnosno

$$\vec K = K_x \vec i + K_y \vec j + K_z \vec k, \quad K_x = m\dot x_c, \quad K_y = m \dot y_c, \quad K_z = m \dot z_c; \qquad (1')$$

tj. količina kretanja sistema jednaka je proizvodu mase sistema i brzine centra inercije.

Obrazac (1) naročito je pogodan za izračunavanje količine kretanja krutog tijela.

5.2 Diferencijalni oblik zakona o promjeni količine kretanja

Ako diferencijalne jednačine kretanja tačaka sistema (2.1) zapišemo u obliku:

$$\frac{d}{dt}(m_i \vec v_i) = \vec F_i^s + \vec F_i^u \qquad (i = 1, \dots, n)$$

i sve ih saberemo, dobijamo

$$\frac{d}{dt}\underbrace{\left(\sum m_i \vec v_i\right)}_{=\vec K} = \underbrace{\sum \vec F_i^s}_{=\vec F_r^s} + \underbrace{\sum \vec F_i^u}_{=\vec F_r^u},$$

odnosno

$$\frac{d\vec K}{dt} = \vec F_r^s \qquad (1)$$

jer je glavni vektor unutrašnjih sila jednak nuli ($\vec F_r^u = 0$, v. odjeljak 1).

Relacija (1) izražava zakon o promjeni količine kretanja sistema u diferencijalnom obliku: Izvod po vremenu količine kretanja sistema jednak je vektorskom zbiru (glavnom vektoru) svih spoljašnjih sila koje djeluju na sistem.

Ako gornju relaciju projiciramo na koordinatne ose dobićemo tri skalarne relacije:

$$\frac{dK_x}{dt} = \sum F_{ix}^s = F_{rx}^s, \quad \frac{dK_y}{dt} = \sum F_{iy}^s = F_{ry}^s, \quad \frac{dK_z}{dt} = \sum F_{iz}^s = F_{rz}^s, \qquad (1')$$

koje izražavaju zakone o promjeni projekcija količine kretanja na ose datog koordinatnog sistema.

Iz (1), odnosno (1'), dobijemo sljedeće važne posledice:

1) Unutrašnje sile direktno ne utiču na promjenu količine kretanja.

2) Ako je glavni vektor spoljašnjih sila jednak nuli, $\vec{F}_R^s = 0$, onda je količina kretanja sistema konstantan vektor, tj.

$$\vec{K} = const,$$

što predstavlja zakon o održanju (konzervaciji) količine kretanja.

3) Ako je zbir projekcija spoljašnjih sila na neku osu jednak nuli (npr. $F_{Rx}^s = 0$), onda je projekcija količine kretanja sistema na tu osu konstantna veličina, tj.

$$K_x = const$$

Ovaj rezultat izražava zakon o održanju projekcije količine kretanja.

5.3 Integralni oblik zakona o promjeni količine kretanja (zakon impulsa)

Ako se obje strane jednačine (5.2.1) pomnože sa dt, a zatim integrale u vremenskom intervalu $t_0 - t$, dobija se

$$\int_{t_0}^{t} d\vec{K} = \int_{t_0}^{t} \vec{F}_R^s dt,$$

ili

$$\vec{K}(t) - \vec{K}(t_0) = \int_{t_0}^{t} \vec{F}_R^s dt$$

Označavajući sa $\vec{K}$ količinu kretanja u trenutku t, a sa $\vec{K}_0$ u trenutku t_0, i koristeći definiciju impulsa sile, konačno dobijamo

$$\vec{K} - \vec{K}_0 = \vec{I}_R^s, \qquad (1)$$

gdje je $\vec{I}_R^s = \int_{t_0}^{t} \vec{F}_R^s dt = \sum \int_{t_0}^{t} \vec{F}_i^s dt = \sum \vec{I}_i^s$ – glavni vektor impulsa spoljašnjih sila.

Dakle, promjena količine kretanja sistema za neki konačni interval vremena jednaka je glavnom vektoru impulsa spoljašnjih sila u tom vremenskom intervalu.

U obliku projekcija na koordinatne ose biće:

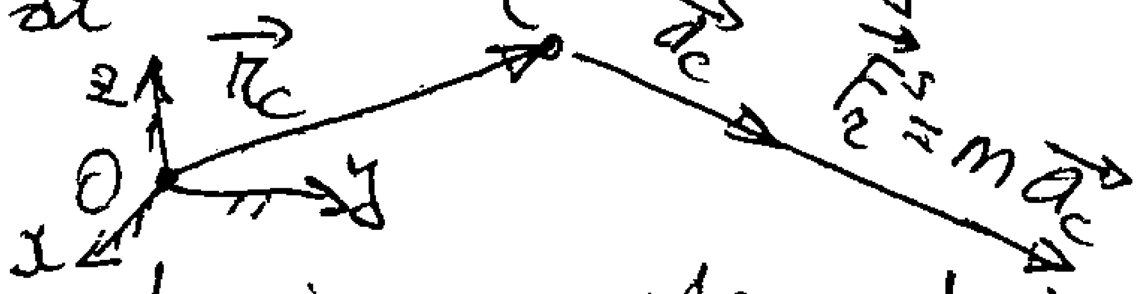
$$\left.\begin{aligned} K_x - K_{0x} &= I_{Rx}^s = \sum I_{ix}^s \\ K_y - K_{0y} &= I_{Ry}^s = \sum I_{iy}^s \\ K_z - K_{0z} &= I_{Rz}^s = \sum I_{iz}^s \end{aligned}\right\} \qquad (1')$$

gdje je npr. I_{Rx}^s zbir projekcija impulsa spoljašnjih sila na osu x.

5.4 Zakon o kretanju centra inercije sistema

Ako se uzme u obzir da je $\vec{K} = m\vec{v}_c$, zakon o promjeni količine kretanja (5.2.1), imajući u vidu da je masa sistema konstantna i $\frac{d\vec{v}_c}{dt} = \vec{a}_c$, se modifikuje na oblik

$$m\vec{a}_c = \vec{F}_r^s \qquad (1)$$



Gornja jednačina izražava zakon o kretanju centra inercije sistema koji se može formulisati na sljedeći način: Centar inercije sistema kreće se kao materijalna tačka, čija je masa jednaka masi sistema i na koju djeluje sila koja je jednaka glavnom vektoru svih spoljašnjih sila koje djeluju na sistem.

Projicirajući vektorsku jednačinu (1) na koordinatne ose, pošto je $\vec{a}_c = \ddot{\vec{r}}_c = \ddot{x}_c\vec{i} + \ddot{y}_c\vec{j} + \ddot{z}_c\vec{k}$, dobijamo:

$$\left.\begin{aligned} m\ddot{x}_c &= F_{rx}^s \\ m\ddot{y}_c &= F_{ry}^s \\ m\ddot{z}_c &= F_{rz}^s \end{aligned}\right\} \qquad (1')$$

Ove jednačine predstavljaju diferencijalne jednačine kretanja centra inercije sistema izražene u obliku projekcija na koordinatne ose.

Specijalno, translatorno kretanje krutog tijela određeno je u potpunosti kretanjem njegovog centra inercije. Prema tome, tijelo koje se kreće translatorno može se uvijek smatrati materijalnom tačkom, čija je masa jednaka masi čitavog tijela. U ostalim slučajevima, zamjena krutog tijela materijalnom tačkom dopustiva je samo tada, kada je, praktično, za određivanje položaja tijela, dovoljno da se zna samo položaj njegovog centra inercije.

Posledice:

1) Unutrašnje sile direktno ne utiču na kretanje centra inercije sistema. One mogu posredno preko spoljašnjih sila uticati na kretanje centra inercije.

2) Zakon o održanju kretanja centra inercije

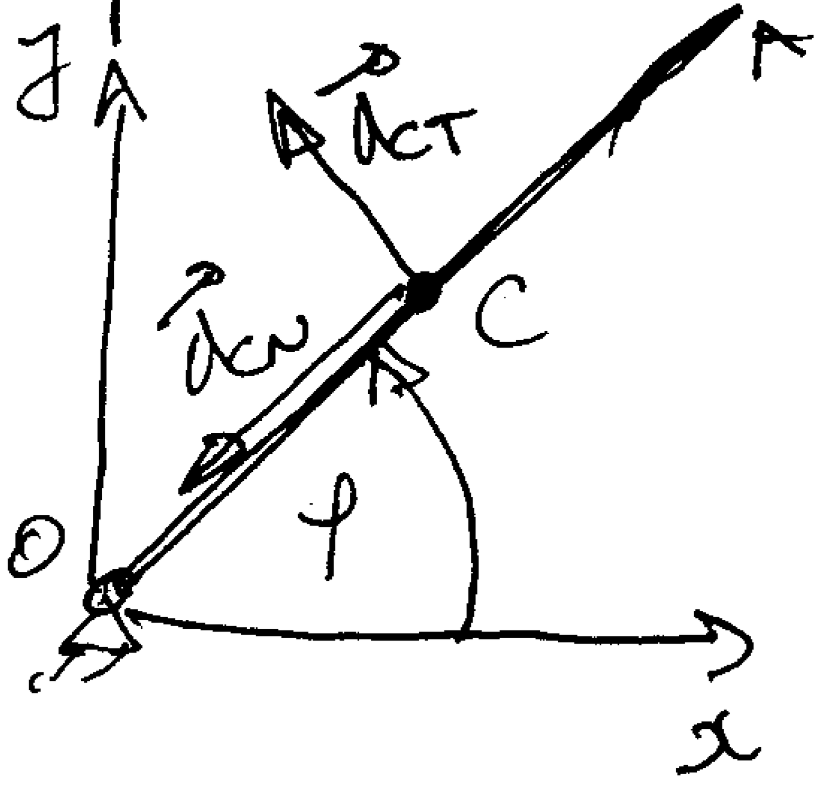
a) $\vec{F}_r^s = 0 \xRightarrow{(1)} \vec{a}_c = \ddot{\vec{r}}_c = 0 \longrightarrow \dot{\vec{r}}_c = \overrightarrow{const} = \vec{v}_{c0} \longrightarrow \vec{r}_c = \vec{v}_{c0}\, t + \vec{r}_{c0}$

Dakle, ako je glavni vektor spoljašnjih sila jednak nuli, onda se, zavisno od početnih uslova, centar inercije kreće jednoliko i pravolinijski (početna brzina $v_{c0} \neq 0$) ili miruje ($v_{c0} = 0$).

b) $\vec{F}_r^s \neq 0$, $F_{rx}^s = 0 \xRightarrow{(1')_1} \ddot{x}_c = 0 \longrightarrow \dot{x}_c = const = \dot{x}_{c0} \longrightarrow x_c = \dot{x}_{c0}\, t + x_{c0}$

Ako je zbir projekcija spoljašnjih sila, koje djeluju na sistem, na neku osu jednak nuli, onda je projekcija centra inercije na tu osu nepokretna (pri $\dot{x}_{c0} = 0$) ili se kreće ravnomjerno.

1. Homogeni štap OA obrće se oko nepokretne ose koja prolazi kroz kraj O štapa i koja je na njega upravna po zakonu $\varphi = \pi t^2/2$. Odrediti pravac glavnog vektora spoljašnjih sila koje djeluju na štap u trenutku $t_0 = 0$.



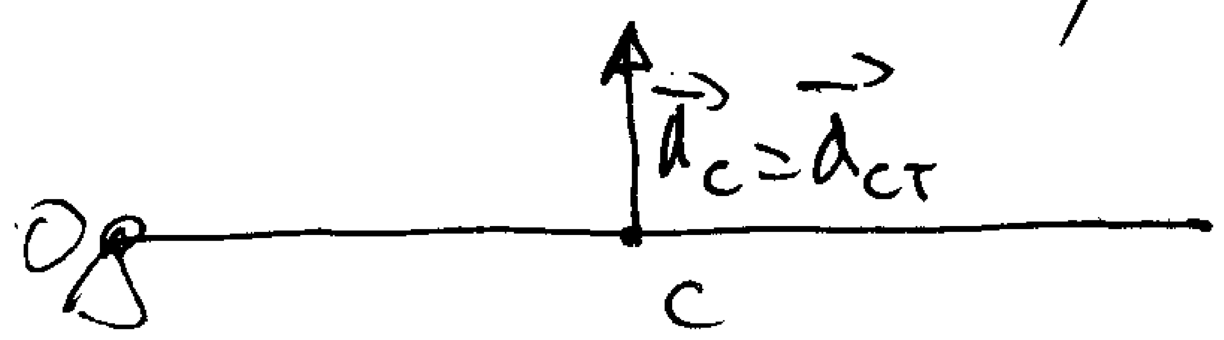
$$m\vec{a}_C = \vec{F}_R^s$$

$$\vec{a}_C = \vec{a}_{CN} + \vec{a}_{CT}, \quad a_{CN} = \overline{OC}\,\omega^2, \quad a_{CT} = \overline{OC}\,\varepsilon$$

$$\omega = \dot{\varphi} = \pi t, \quad \varepsilon = \dot{\omega} = \ddot{\varphi} = \pi$$

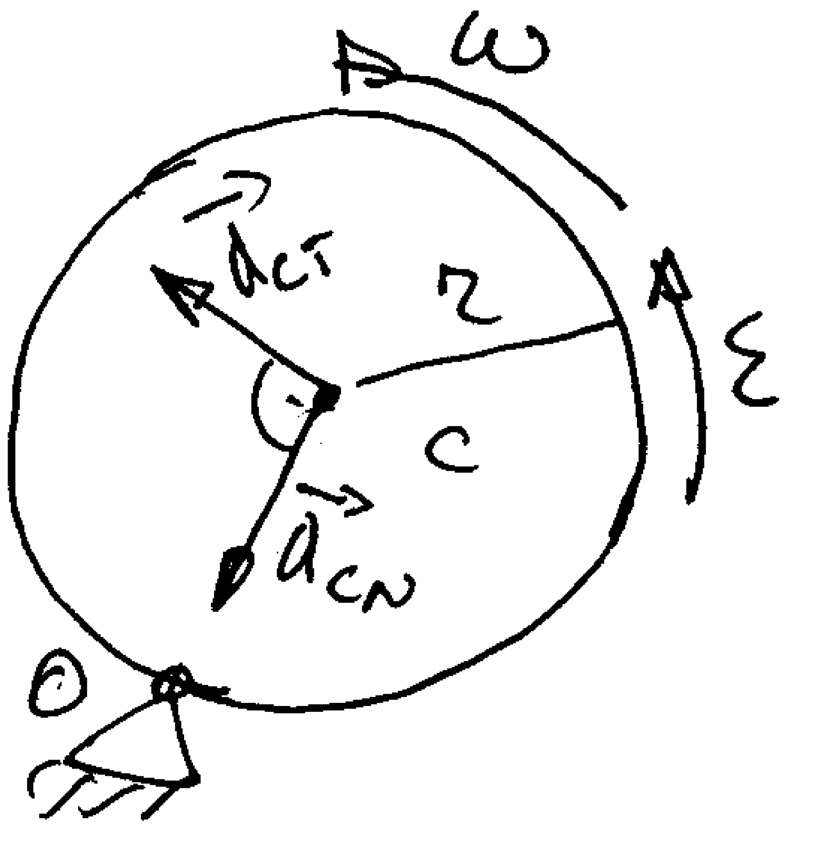
$$a_{CN} = \overline{OC}\,\pi^2 t^2, \quad a_{CT} = \overline{OC}\,\pi$$

Za $t = t_0 = 0$ je $a_{CN} = 0$, $a_{CT} = \overline{OC}\,\pi$ ($\varphi = 0$)



$\vec{F}_R^s = m\vec{a}_C \Rightarrow$ Glavni vektor spoljašnjih sila je usmjeren naviše paralelno sa y osom.

2. Homogeni disk poluprečnika $r = 0{,}2\,m$ i mase $m = 30\,kg$ obrće se oko nepokretne ose O upravne na ravan diska koja se nalazi na rastojanju r od njegovog centra C. Odrediti intenzitet glavnog vektora spoljašnjih sila $\vec{F}_R^{(s)}$ koje djeluju na disk u trenutku kada je ugaona brzina diska $\omega = 1$ rad/s, a njegovo ugaono ubrzanje $\varepsilon = 4\sqrt{5}$ rad/s^2.



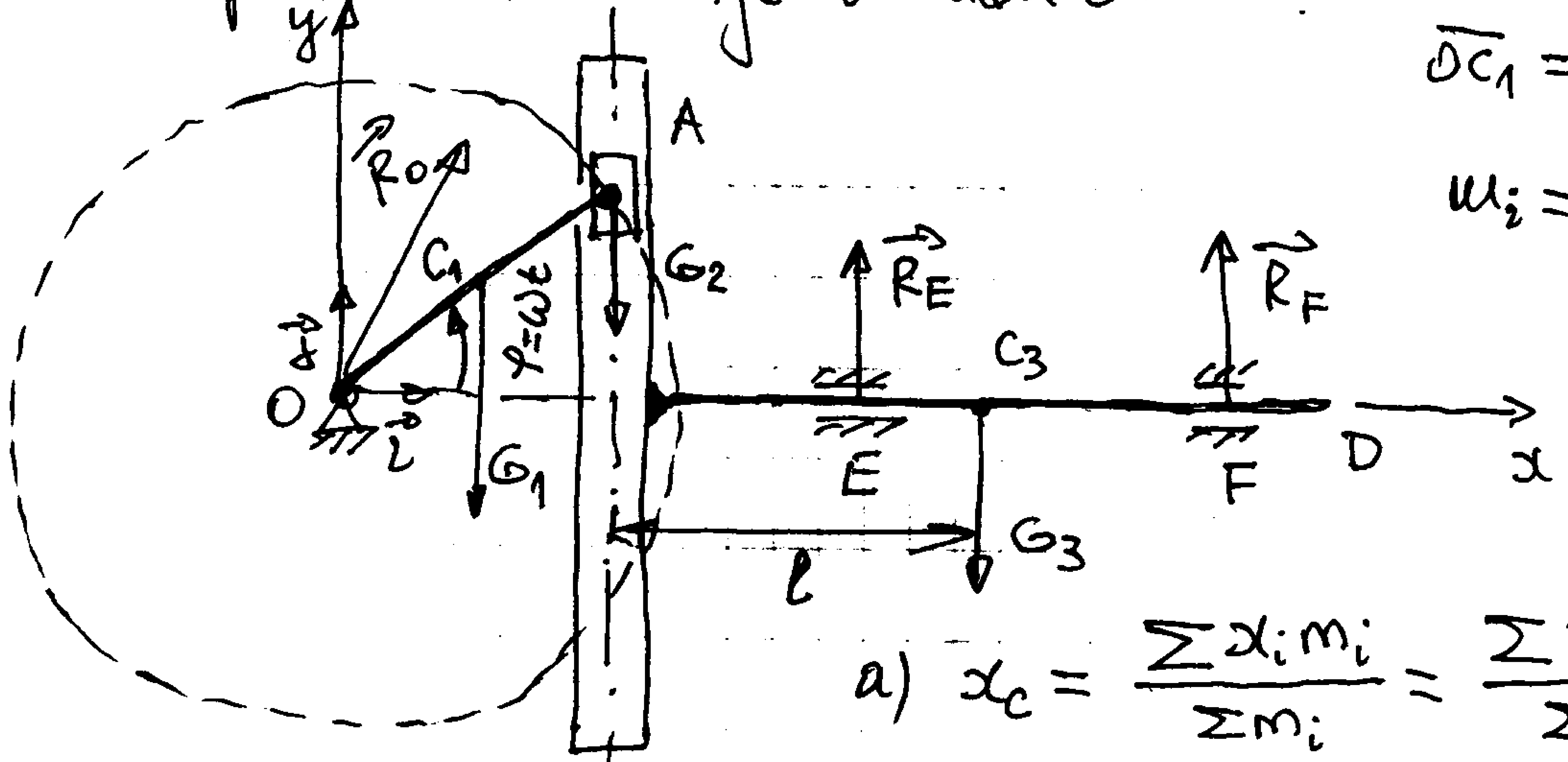
$$\vec{F}_R^{(s)} = m\vec{a}_C, \quad \vec{a}_C = \vec{a}_{CN} + \vec{a}_{CT}$$

$$a_{CN} = r\omega^2, \quad a_{CT} = r\varepsilon$$

$$F_R^{(s)} = m a_C$$

$$F_R^{(s)} = m r\sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2} = 30 \cdot 0{,}2\sqrt{1 + 80} \boxed{= 54\,N}$$

③ Kulisni mehanizam koji leži u vertikalnoj ravni sastoji se od krivaje OA (homogeni štap dužine l) težine G_1, klizača A težine G_2 i translatorno pokretne u horizontalnom pravcu kulise kruto vezane za štap BD ukupne težine G_3. Težište kulise i štapa nalazi se u tački C_3 pri čemu je $\overline{BC_3} = l$. Krivaja se okreće konstantnom ugaonom brzinom ω, a u početnom trenutku klizač A se nalazio u krajnjem desnom položaju. a) Odrediti jednačinu putanje centra inercije datog mehanizma. b) Odrediti količinu kretanja u proizvoljnom trenutku. c) Odrediti glavni vektor spoljašnjih sila. d) Odrediti horizontalnu komponentu reakcije oslonca O.



$\overline{OC_1} = \frac{l}{2}$, $\overline{OA} = l$

$m_i = \frac{G_i}{g}$

a) $x_c = \frac{\sum x_i m_i}{\sum m_i} = \frac{\sum x_i G_i}{\sum G_i}, \; y_c = \frac{\sum y_i G_i}{\sum G_i}$

$x_1 = x_{C_1} = \frac{l}{2}\cos\omega t, \; x_2 = x_A = l\cos\omega t, \; x_3 = x_{C_3} = l + l\cos\omega t$

$y_1 = \frac{l}{2}\sin\omega t, \; y_2 = l\sin\omega t, \; y_3 = 0$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_c = A + B\cos\omega t \\ y_c = C\sin\omega t \end{array}\right\} (1), \quad \text{gdje su: } A = \frac{G_3 l}{G_1+G_2+G_3}, \; B = \frac{G_1+2G_2+2G_3}{2(G_1+G_2+G_3)}\,l$$

$$C = \frac{G_1+2G_2}{2(G_1+G_2+G_3)}\,l$$

$$(1) \Rightarrow \left(\frac{x_c - A}{B}\right)^2 + \left(\frac{y_c}{C}\right)^2 = 1 \; - \text{elipsa}$$

b) $\vec{K} = m\vec{v}_c, \; m = \sum m_i = \frac{G_1+G_2+G_3}{g}, \; \vec{v}_c = \dot{x}_c\vec{i} + \dot{y}_c\vec{j}$

$$(1) \Rightarrow \vec{K} = \frac{G_1+G_2+G_3}{g}\left(-\vec{i}\,B\omega\sin\omega t + \vec{j}\,C\omega\cos\omega t\right) \quad (2)$$

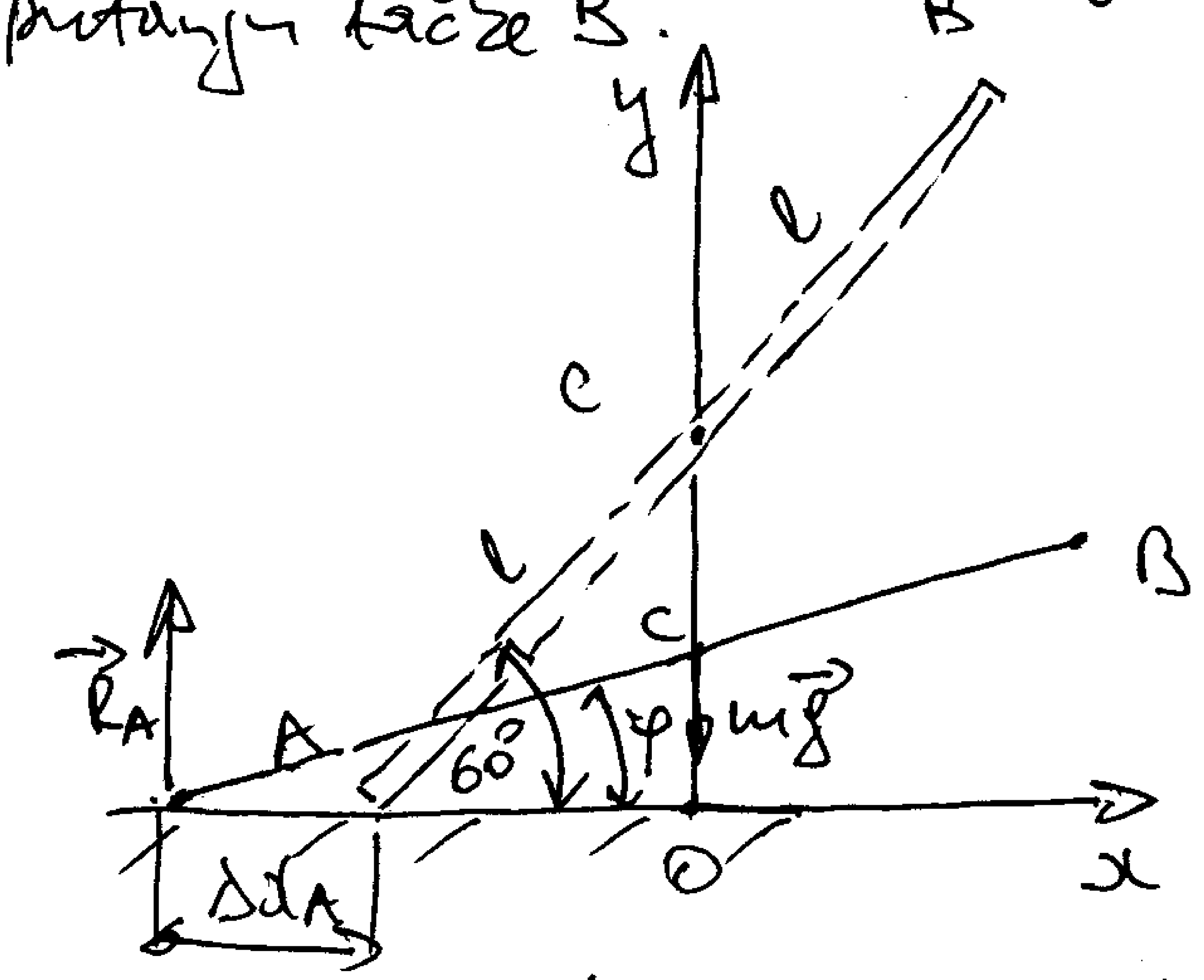
c) $$\frac{d\vec{K}}{dt} = \vec{F}_R^s \xrightarrow{(2)} \vec{F}_R^s = -\frac{G_1+G_2+G_3}{g}\omega^2\left(\vec{i}\,B\cos\omega t + \vec{j}\,C\sin\omega t\right) \quad (3)$$

d) $\vec{F}_R^s = \sum \vec{F}_i^s = \vec{G}_1 + \vec{G}_2 + \vec{G}_3 + \vec{R}_O + \vec{R}_E + \vec{R}_F, \quad F_{Rx}^s = R_{Ox}$

$$(3) \Rightarrow \frac{dK_x}{dt} = R_{Ox} \Rightarrow R_{Ox} = -\frac{G_1+G_2+G_3}{g}B\omega^2\cos\omega t$$

N. Prećutno se pretpostavlja da su ležišta E i F glatka (bez trenja).

4. Homogeni štap AB dužine $2l$ oslanja se krajem A na glatku horizontalnu ravan. U početnom trenutku štap je mirovao i sa horizontalnom ravni gradio ugao od 60°. Odrediti: a) pomjeranje kraja A štapa duž horizontale u zavisnosti od ugla φ koji štap gradi sa horizontalom; b) putanju tačke B.



$$m\vec{a}_c = \sum \vec{F}_i^s$$

$$m\vec{a}_c = m\vec{g} + \vec{R}_A$$

$$\ddot{x}_c = 0 \Rightarrow \dot{x}_c = const = \dot{x}_c(t_0) = 0$$

$$\dot{x}_c = 0 \Rightarrow x_c = const = x_c(t_0) = 0$$

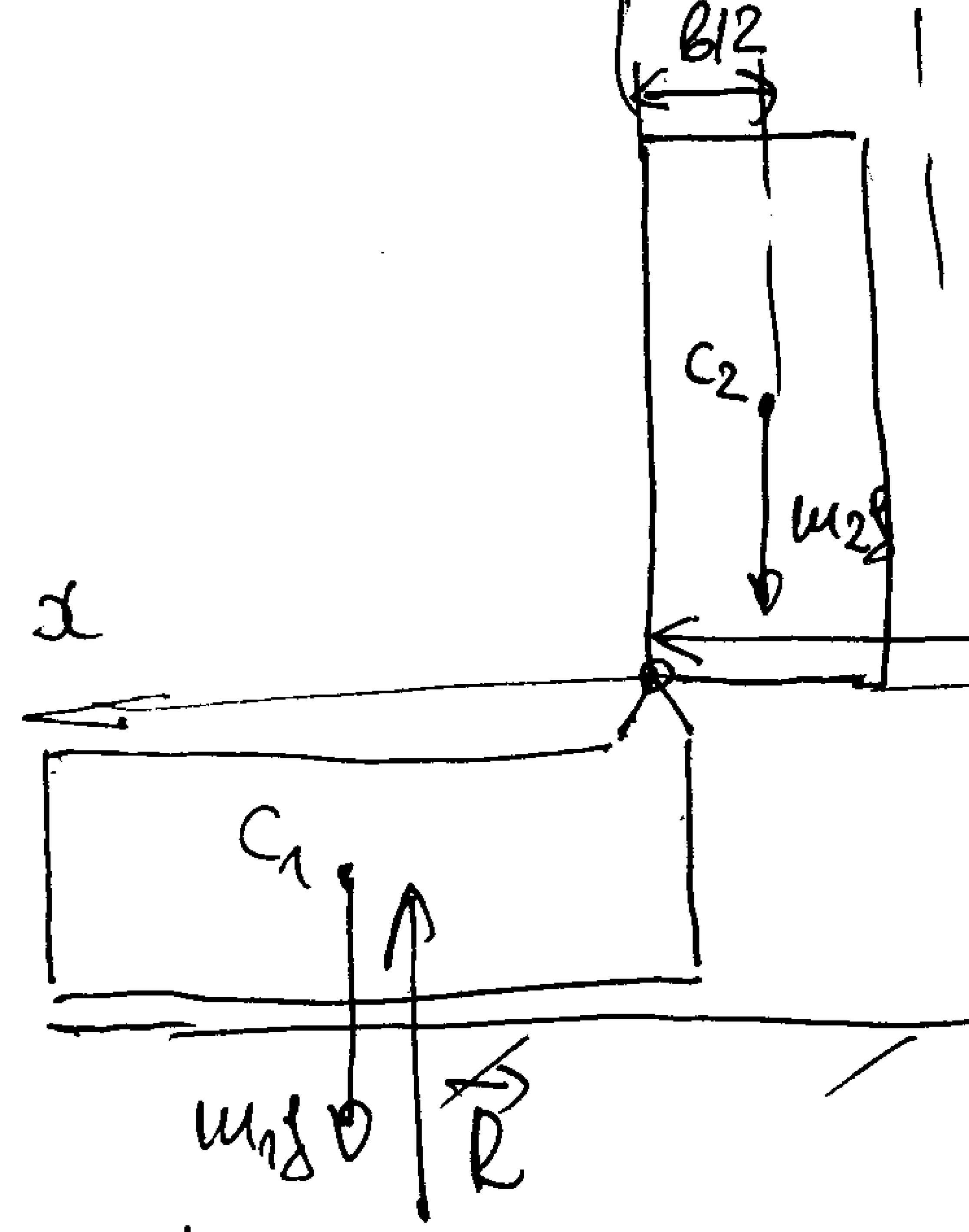
$x_c \equiv 0 \Rightarrow$ centar inercije štapa pada vertikalno (po osi y).

N: Koordinatni sistem smo postavili tako da osa y prolazi kroz početni položaj centra inercije štapa.

a) $$\Delta x_A = \cancel{l\cos\varphi} = x_A(\varphi) - x_A(60^\circ) = -l\cos\varphi + l\cos 60^\circ = \frac{l}{2}(1 - 2\cos\varphi)$$

b) $$x_B = l\cos\varphi,\ y_B = 2l\sin\varphi \Rightarrow \left(\frac{x_B}{l}\right)^2 + \left(\frac{y_B}{2l}\right)^2 = 1$$ - elipsa

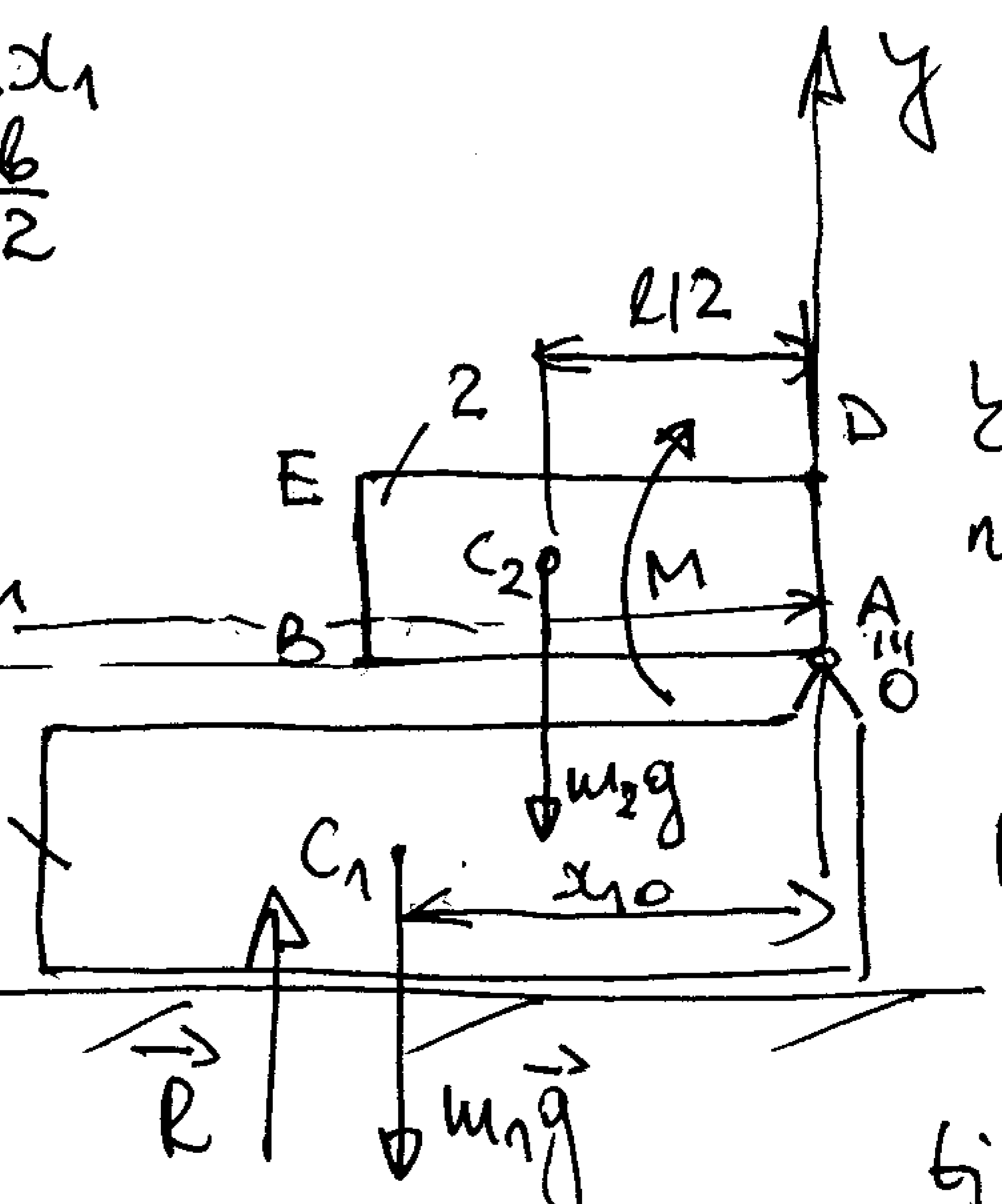
5. Za tijelo 1 mase m_1 koje se nalazi na glatkoj horizontalnoj ravni vezano je cilindričnim zglobom A prizmatično homogeno tijelo 2 mase m_2, dužine $\overline{AB} = l$ i širine $\overline{AD} = b$. Na tijelo 2 djeluje spreg momenta M. Na početku kretanja sistem je mirovao a strana AB tijela 2 je zauzimala horizontalni položaj. Odrediti pomjeranje tijela 1 po horizontalnoj ravni do trenutka kada strana AB tijela 2 dođe u vertikalan položaj.



$$x_1 = x_{10} + \Delta x_1$$

$$x_2 = \Delta x_1 - \frac{b}{2}$$

$$x_{20} = \frac{l}{2}$$

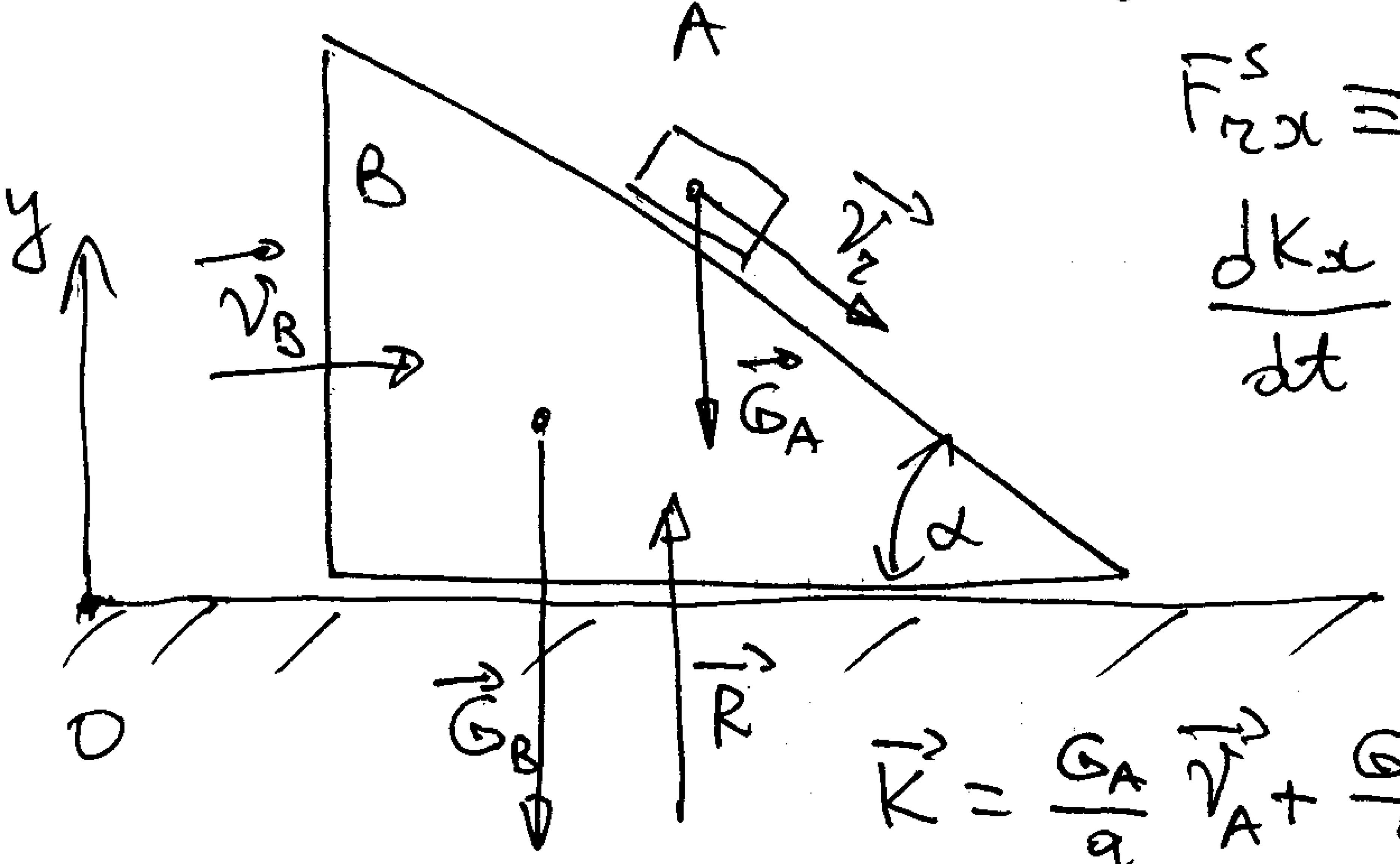


$$\sum \vec{F}_{ix}^s \equiv 0$$

Pošto je zbir projekcija spoljašnjih sila na horizontalnu osu Ox jednak nuli, a sistem mirovao u početnom trenutku bide $x_c = const$, tj $x_c = x_c(t_0)$,

odnosno $m_1 x_{10} + m_2 x_{20} = m_1 x_1 + m_2 x_2 \Rightarrow \Delta x_1 = m_2(l+b)/2(m_1+m_2)$

6. Sanduk A težine G_A nalazi se na strmoj ravni nagiba α klina B težine G_B. U početnom trenutku sistem je bio u miru. Odrediti brzinu klina u trenutku kada je relativna brzina sanduka u odnosu na klin v_r. Trenje između klina i horizontalne ravni zanemariti.



$$\vec F_R^s = \sum \vec F_i^s = \vec G_A + \vec G_B + \vec R$$

$$F_{Rx}^s \equiv 0$$

$$\frac{dK_x}{dt} = F_{Rx}^s \equiv 0$$

$$\Rightarrow K_x = const$$

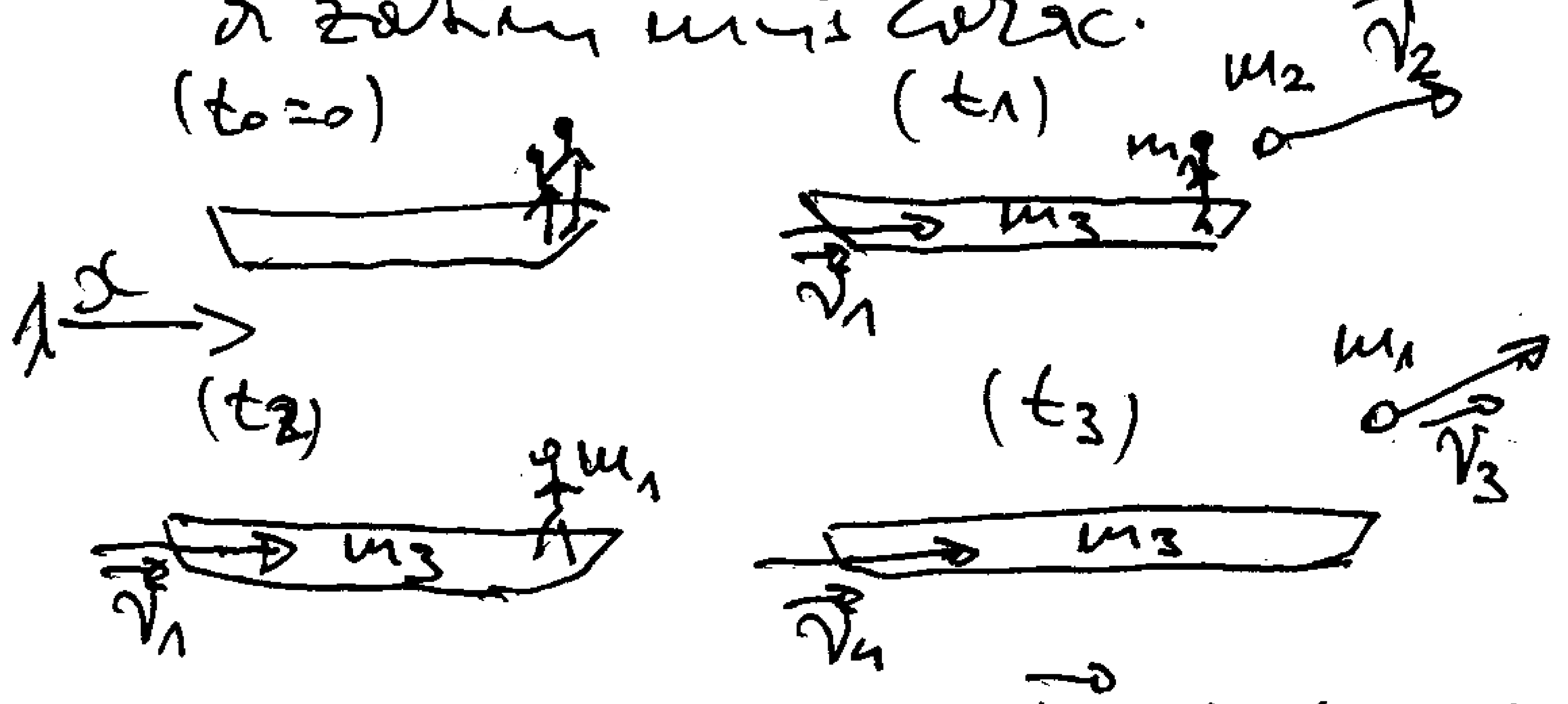
$$\rightarrow K_x(t) = K_x(t_0)$$

$$\vec K = \frac{G_A}{g}\vec v_A + \frac{G_B}{g}\vec v_B, \quad \vec v_A = \vec v_p + \vec v_r = \vec v_B + \vec v_r$$

$\vec K = \frac{G_A+G_B}{g}\vec v_B + \frac{G_A}{g}\vec v_r$, $\vec K(t_0) = 0$ jer je sist. bio u miru

$$K_x = \frac{G_A+G_B}{g} v_{Bx} + \frac{G_A}{g} v_r \cos\alpha, \quad K_x = 0 \Rightarrow \boxed{v_{Bx} = -\frac{G_A}{G_A+G_B} v_r \cos\alpha}$$

7. Muškarac mase $m_1 = 80$ kg i žena mase $m_2 = 55$ kg stoje, jedno pored drugog, na kraju čamca mase $m_3 = 136$ kg koji miruje na vodi, spremni da iskoče iz čamca relativnom brzinom čija je horizontalna komponenta 5 m/s. Odrediti brzinu čamca pošto iskoči prvo žena a zatim muškarac.



Sve spoljašnje sile (težine i sila potiska) su vertikalnog pravca pa važi zakon o održanju projekcije količine kretanja sistema na horizontalni pravac: $K_x = const$

$$K_x(t_1) = K_x(t_0) = 0; \quad \vec K(t_1) = (m_1+m_3)\vec v_1 + m_2 \vec v_2, \quad \vec v_2 = \vec v_1 + \vec v_r, \quad v_{rx} = 5\,\frac{m}{s}$$

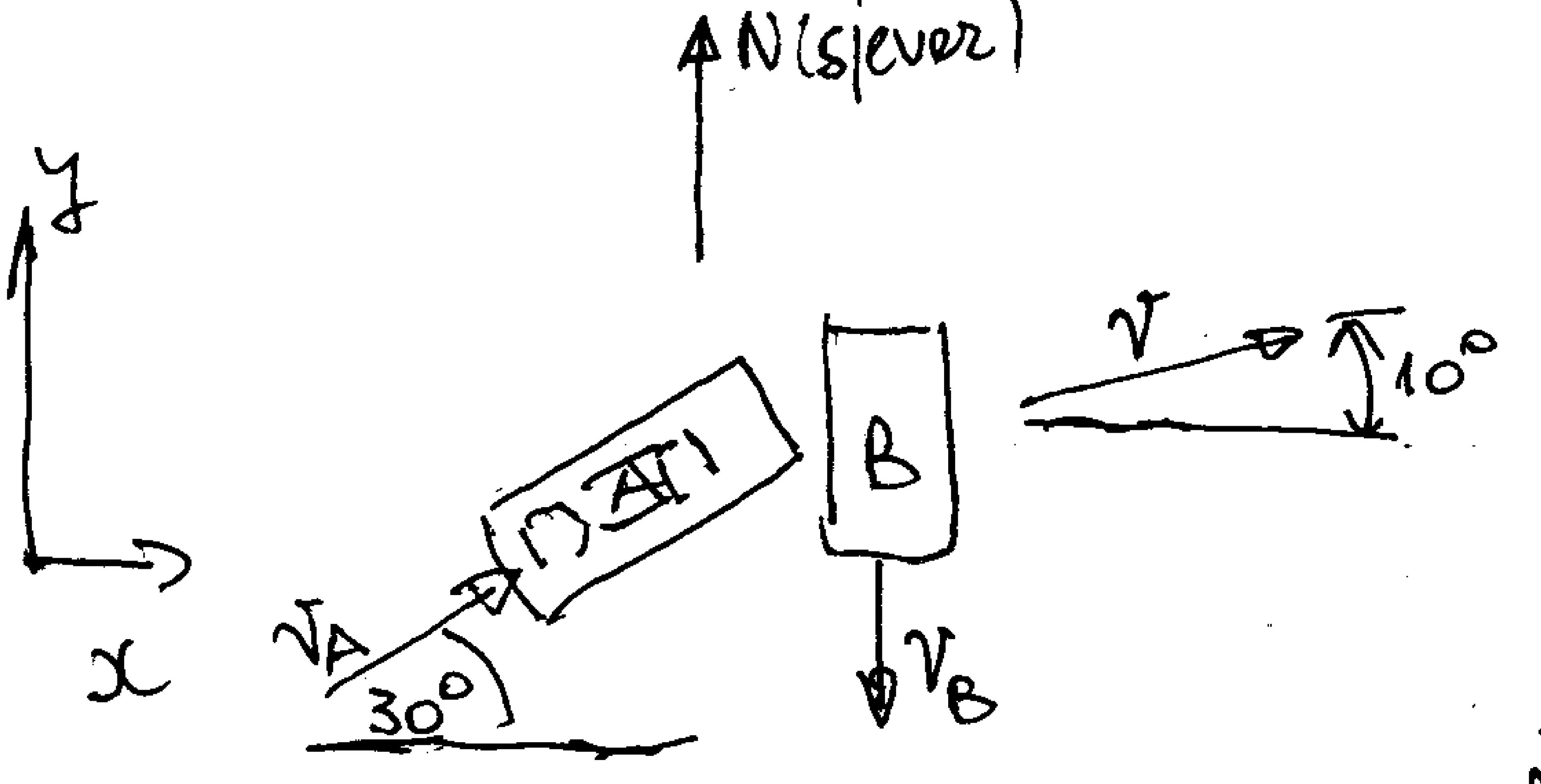
$$(m_1+m_2+m_3) v_{1x} + m_2 v_{rx} = 0 \rightarrow v_{1x} = -\frac{m_2}{m_1+m_2+m_3} v_{rx}$$

$$K_x(t_2) = K_x(t_3); \quad \vec v_3 = \vec v_4 + \vec v_r$$

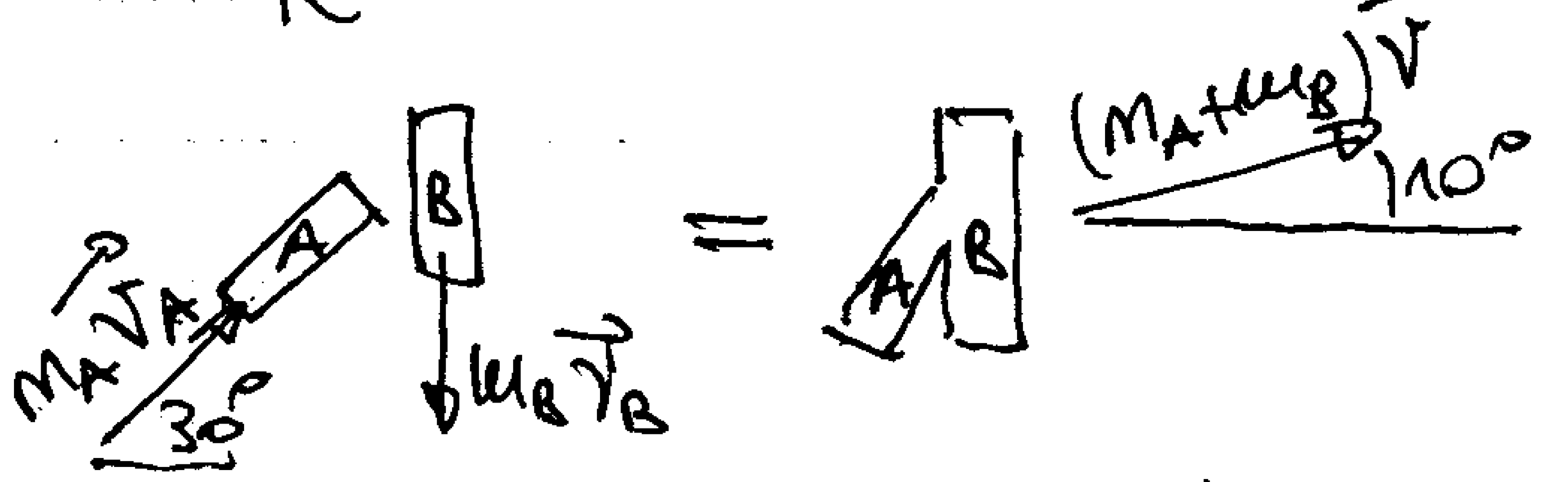
$$(m_1+m_3) v_{1x} = m_3 v_{4x} + m_1 (v_{4x} + v_{rx}) \Rightarrow v_{4x} = -\left(\frac{m_1}{m_1+m_3} + \frac{m_2}{m_1+m_2+m_3}\right) v_{rx} = -2{,}87\,\frac{m}{s}$$

$$\Rightarrow \boxed{v_4 = 2{,}87\,\frac{m}{s}} \leftarrow$$

8. Automobil A se kretao pod uglom od 30° prema sjeveroistoku kada se na raskrsnici sudario sa automobilom B koji je išao na jug. Nakon istrage utvrđeno je da su se poslije sudara automobili zaglavili i skliznuli pod uglom od 10° prema sjeveroistoku. Svaki vozač je tvrdio da je išao ograničenom brzinom od 50 km/h i da je pokušao da uspori, ali nije mogao da izbjegne sudar jer je drugi vozač išao prebrzo. Znajući da je $m_A = 1500$ kg i $m_B = 1200$ kg, odrediti: a) koji se automobil kretao brže; b) brzinu bržeg automobila ako je drugi "išao" brzinom od 50 km/h.



Količina kretanja sistema od dva automobila za vrijeme sudara ($\vec{F}_R^s = 0$) je nepromjenljiva.
$\vec{K} = const$



$\vec{K}_0 = m_A\vec{v}_A + m_B\vec{v}_B$ – količina kretanja na početku sudara

$\vec{K}_1 = (m_A+m_B)\vec{v}$ – -||- krajem -||-

$$m_A\vec{v}_A + m_B\vec{v}_B = (m_A+m_B)\vec{v}$$

$\xrightarrow{+} x: \quad m_A v_A \cos 30° + m_B \cdot 0 = (m_A+m_B) v \cos 10° \qquad (1)$

$+\uparrow y: \quad m_A v_A \sin 30° - m_B v_B = (m_A+m_B) v \sin 10° \qquad (2)$

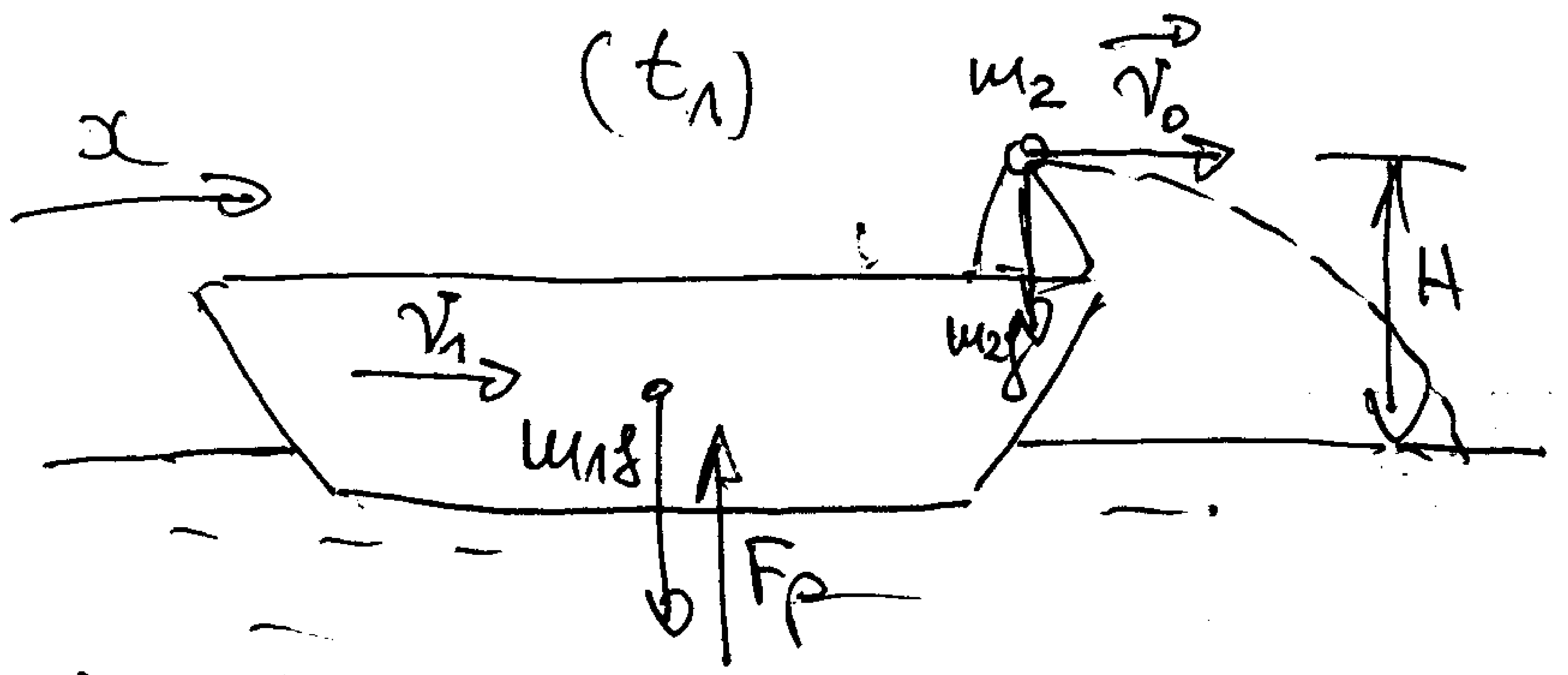
$(2):(1) \Rightarrow \ \mathrm{tg}\, 30° - \dfrac{m_B v_B}{m_A v_A \cos 30°} = \mathrm{tg}\, 10° \Rightarrow \dfrac{v_B}{v_A} = \dfrac{(\mathrm{tg}\, 30° - \mathrm{tg}\, 10°) m_A \cos 30°}{m_B}$

$\dfrac{v_B}{v_A} = 0{,}434, \quad v_A = 2{,}30\, v_B \Rightarrow$ A se kretao brže

b) $v_B = 50$ km/h $\Rightarrow v_A = 115{,}2$ km/h

N: Udarne sile koje se javljaju tokom sudara između automobila predstavljaju unutrašnje sile za dati sistem.

9. Iz plovnog objekta mase m_1 koji miruje na vodi izbaci se sa visine H mjereno od nivoa vode tijelo mase m_2 brzinom v_0 horizontalnog pravca. Zanemarujući otpore kretanju odrediti pomjeranje plovnog objekta do trenutka kad tijelo padne u vodu.



$K_x = \text{const}$

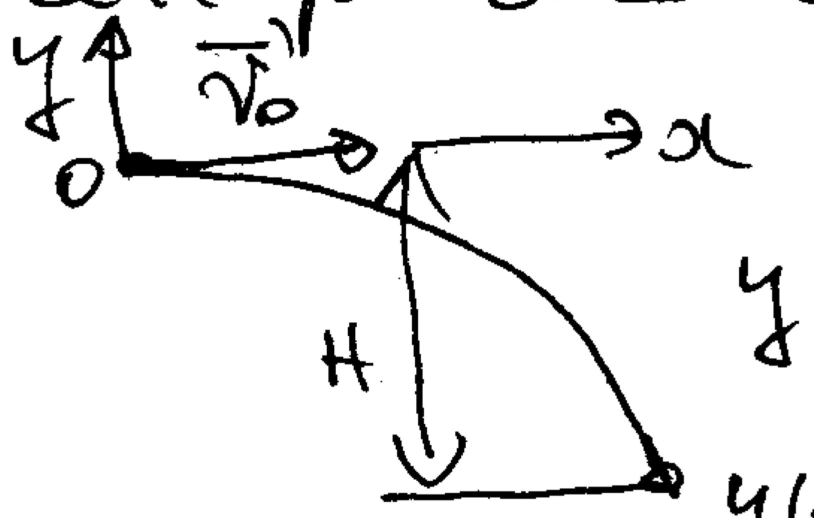
$K_x(t_1) = K_x(t_0) = 0$

$\parallel$

$m_1 v_1 + m_2 v_0 = 0$

$v_1 = -\dfrac{m_2}{m_1} v_0$

Po izbacivanju tijela brzinom (apsolutnom) v_0, plovni objekat se kreće jednoliko brzinom v_1 (nema sila otpora) u smjeru suprotnom od smjera brzine v_0, a tijelo se kreće po zakonu kosog hica.



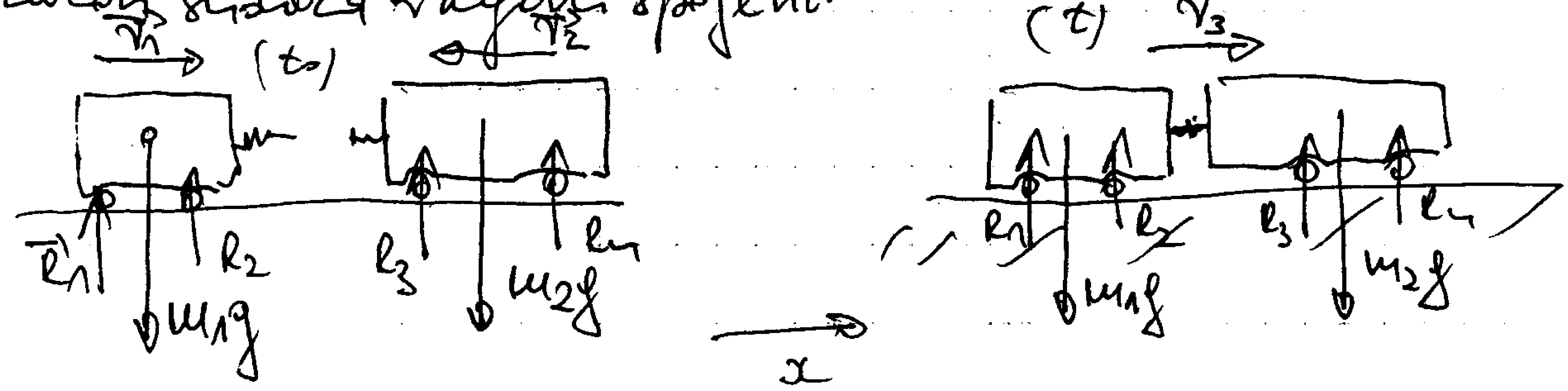
$y = -g\dfrac{t^2}{2}$

$y(t_2) = -H$

$t_2 = \sqrt{2H/g}$

$$\Delta x = v_1 t_2 = \frac{m_2}{m_1} v_0 \sqrt{\frac{2H}{g}}$$

10. Vagoni mase $m_1 = 20\,t$ (tona) i $m_2 = 30\,t$ kreću se u susret jedan drugom po horizontalnom kolosjeku brzinama $v_1 = 3$ m/s i $v_2 = 2{,}5$ m/s, respektivno. Zanemarujući otpore kretanju, odrediti intenzitet i smjer brzine vagona nakon sudara. Smatrati da su nakon sudara vagoni spojeni.



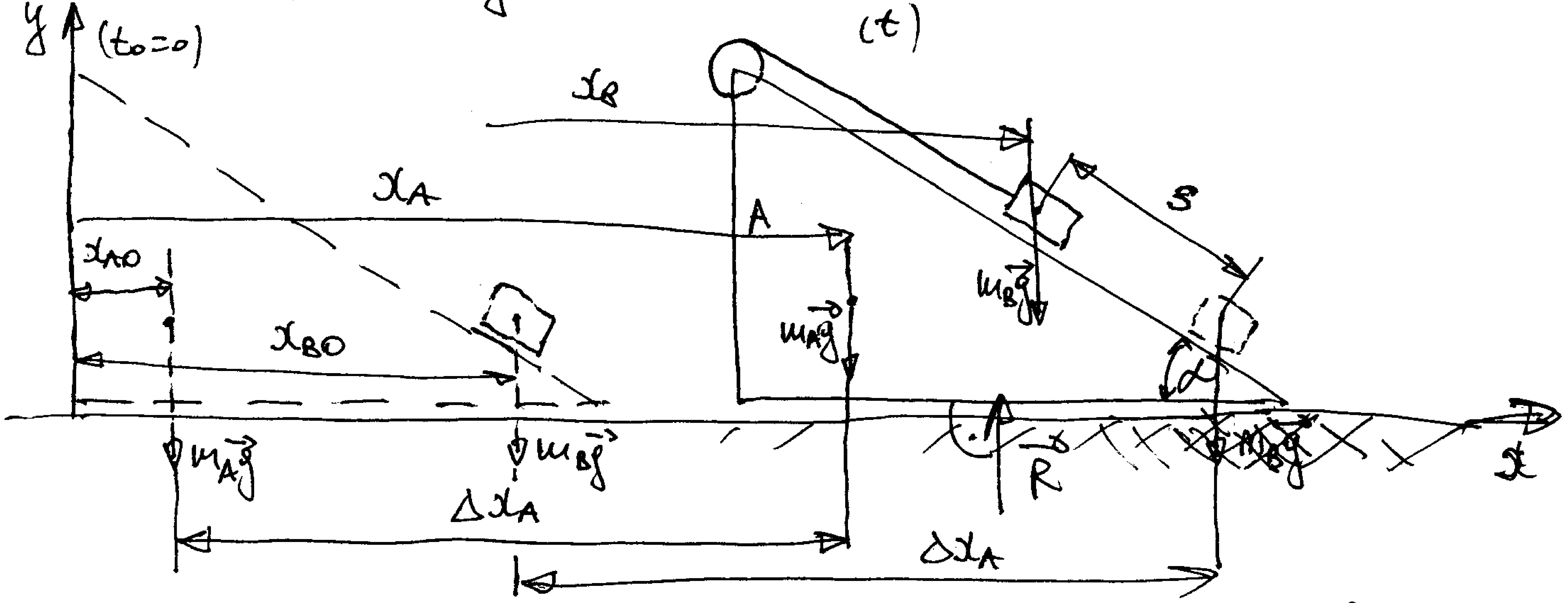
$$\sum F^s_{ix} \equiv 0 \Rightarrow K_x = \text{const}$$

t_0: $\vec{K}_0 = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2$, $K_{0x} = m_1 v_1 + m_2(-v_2)$

t: $\vec{K} = (m_1+m_2)\vec{v}_3$, $K_x = (m_1+m_2)v_3$

$K_{0x} = K_x \Rightarrow v_3 = \dfrac{m_1 v_1 - m_2 v_2}{m_1+m_2} = -0{,}3\,\dfrac{m}{s}$; $\boxed{v_3 = 0{,}3\,\dfrac{m}{s} \leftarrow}$

11 Uz strmu ravan, nagiba $\alpha = 60^\circ$, klina A koji se može kretati po glatkoj horizontalnoj podlozi, vuče se posredstvom konopca sanduk B ~~relativnom brzinom $v_r = 1$ m/s~~. Odrediti pomjeranje klina A po horizontalnoj ravni do trenutka kad sanduk B pređe put dužine $s = 2m$ uz strmu ravan klina. Masa klina je $m_A = 60kg$, sanduka $m_B = 30kg$, a koeficijent trenja između sanduka i klina je $\mu = 0,3$. U početnom trenutku sistem je mirovao.



Spoljašnje sile: $m_A\vec g, m_B\vec g, \vec R$. $\sum F^s_{ix} \equiv 0 \Rightarrow \ddot x_C \equiv 0 \Rightarrow \dot x_C = const = \dot x_C(0)$

$\dot x_C(0) = 0$ jer je u početnom trenutku sistem mirovao, $\Rightarrow \dot x_C \equiv 0$

$\Rightarrow x_C = const = x_C(0)$

$\Downarrow$

$$x_C = \frac{m_A x_A + m_B x_B}{m_A + m_B} = const \Leftrightarrow m_A x_A + m_B x_B = const$$

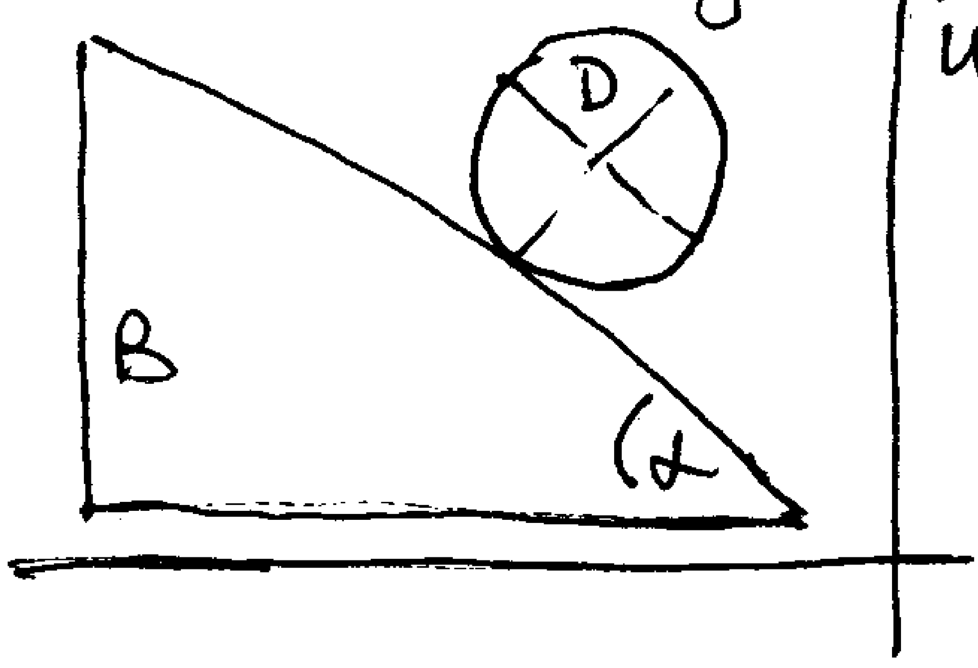
$$m_A x_A + m_B x_B = m_A x_{A0} + m_B x_{B0} \quad (*)$$

$$x_A = x_{A0} + \Delta x_A, \quad x_B = x_{B0} + \Delta x_A - s\cos\alpha \quad (**)$$

$$(**) \text{ u } (*) \Rightarrow \Delta x_A = \frac{m_B}{m_A + m_B} s\cos\alpha, \quad \boxed{\Delta x_A = \frac{1}{3} m}$$

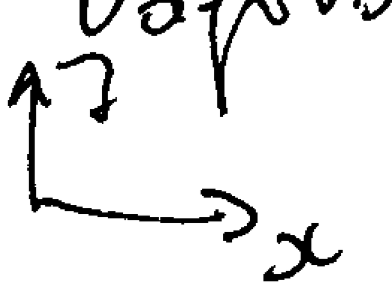
Klin se pomjeri udesno za 1/3 m.

12 Cilindar D mase m_1 i poluprečnika r može da se kotrlja bez klizanja niz nagnutu strmu klina B mase m_2. Odrediti pomjeranje klina B po glatkoj horizontalnoj ravni do trenutka kad cilindar načini dva puna obrta od početka kretanja. U početnom trenutku sistem je mirovao.

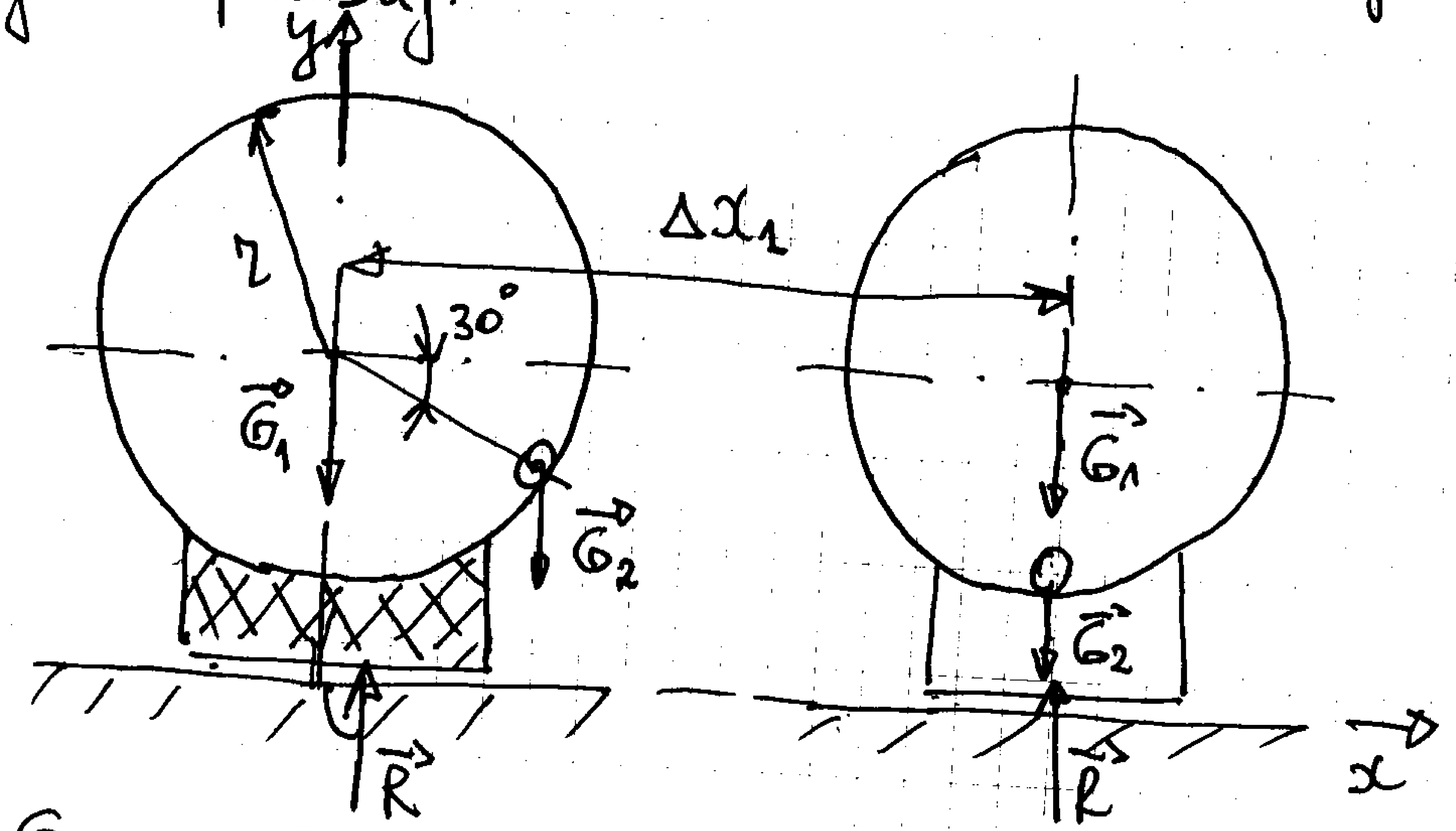


Uputstvo: Pošto se cilindar kotrlja bez klizanja biće $s = r\varphi$, s-pomjeranje centra cilindra u odnosu na klin, φ-ugao obrtanja cilindra.

Odgovor: $\Delta x_B = -\dfrac{4 m_1 r\pi\cos\alpha}{m_1 + m_2}$



13 Šuplji cilindar, unutrašnjeg poluprečnika r, kruto je vezan za postolje koje može da kliži bez trenja po horizontalnoj ravni. Težina cilindra zajedno sa postoljem je G_1. Unutar cilindra nalazi se kuglica težine G_2, koja iz položaja, prikazanog na slici, počinje da se kreće po površi cilindra bez početne brzine. Odrediti pomjeranje cilindra po horizontalnoj ravni do trenutka kada kuglica prolazi kroz najniži položaj.



$$\sum F_{i x}^{s} \equiv 0$$

$$\Rightarrow \ddot{x}_c = 0$$

$$\Rightarrow x_c = const$$

$$\Updownarrow$$

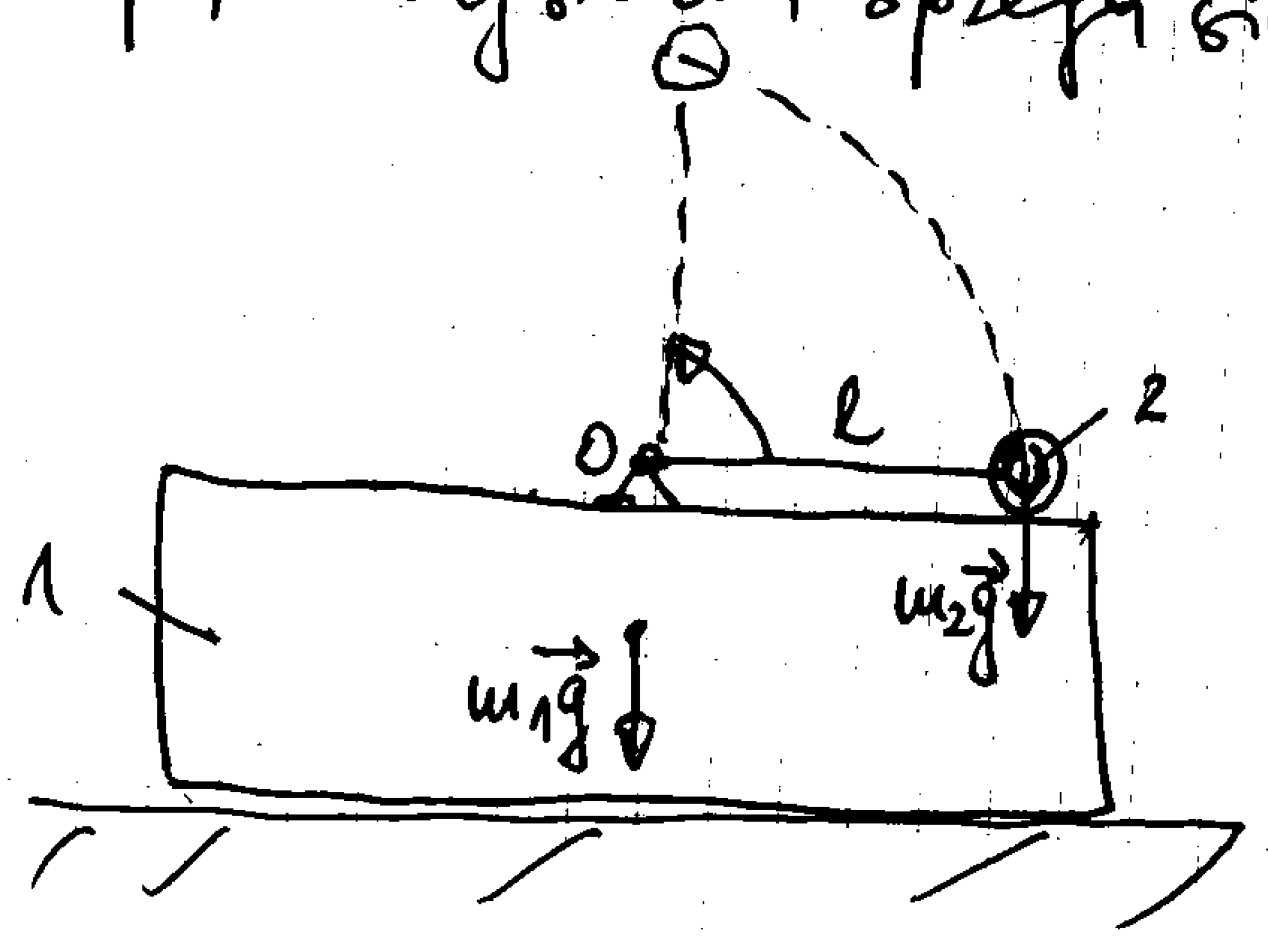
$$m_1 x_1 + m_2 x_2 = m_1 x_{10} + m_2 x_{20}$$

$$m_1 = \frac{G_1}{g}, \; m_2 = \frac{G_2}{g}, \; x_{10} = 0, \; x_{20} = r\cos 30^\circ = r\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$x_1 = \Delta x_1, \; x_2 = \Delta x_1$$

$$\Rightarrow \Delta x_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} r \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{G_2}{G_1 + G_2} \frac{\sqrt{3}}{2} r$$

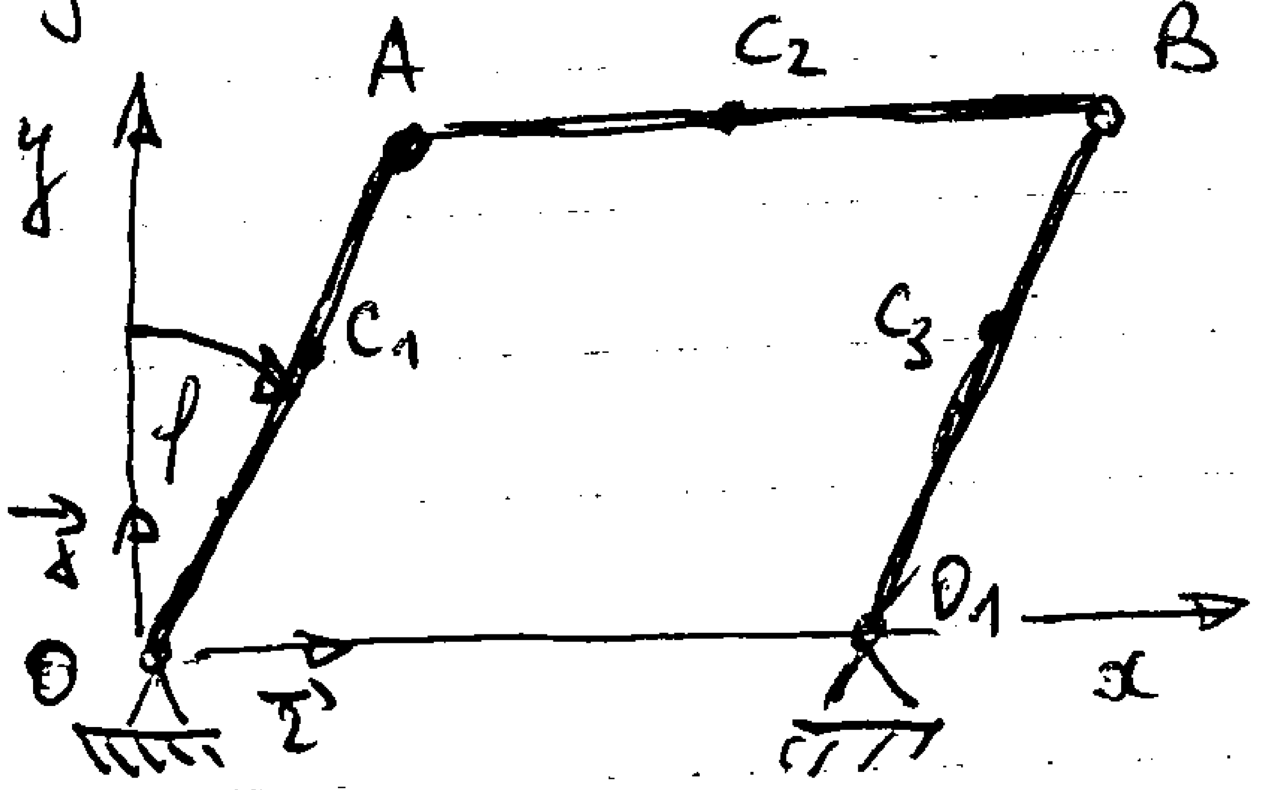
14 Za tijelo 1 mase m_1 koje se nalazi na glatkoj horizontalnoj ravni vezan je cilindričnim zglobom štap dužine l i zanemarljive mase sa koncentrisanim teretom mase m_2 na njegovom kraju. Na početku kretanja sistem je mirovao u položaju prikazanom na slici. Odrediti pomjeranje tijela 1 po horizontalnoj ravni do trenutka kada štap pod dejstvom sprega sila dođe u vertikalni položaj.



$$\Delta x_1 = \frac{m_2 l}{m_1 + m_2} \text{ udesno}$$

Zakon o kretanju centra inercije i zakon o promjeni količine kretanja sistema (zadaci za samostalan rad)

1. Štap OA zglobnog romba $OABO_1$ obrće se po zakonu $\varphi = \omega t$, $\omega = const$. Smatrajući da je $OA = AB = BO_1 = l$ i da su svi štapovi homogeni jednakih masa m, odrediti trajektoriju centra inercije sistema. Naći količinu kretanja i glavni vektor spoljašnjih sila sistema u proizvoljnom trenutku t.



$$x_c = \frac{\sum m_i x_{ci}}{\sum m_i} = \frac{l}{3}\left(2\sin\varphi + \frac{3}{2}\right)$$

$$y_c = \frac{\sum m_i y_{ci}}{\sum m_i} = \frac{2}{3} l \cos\varphi$$

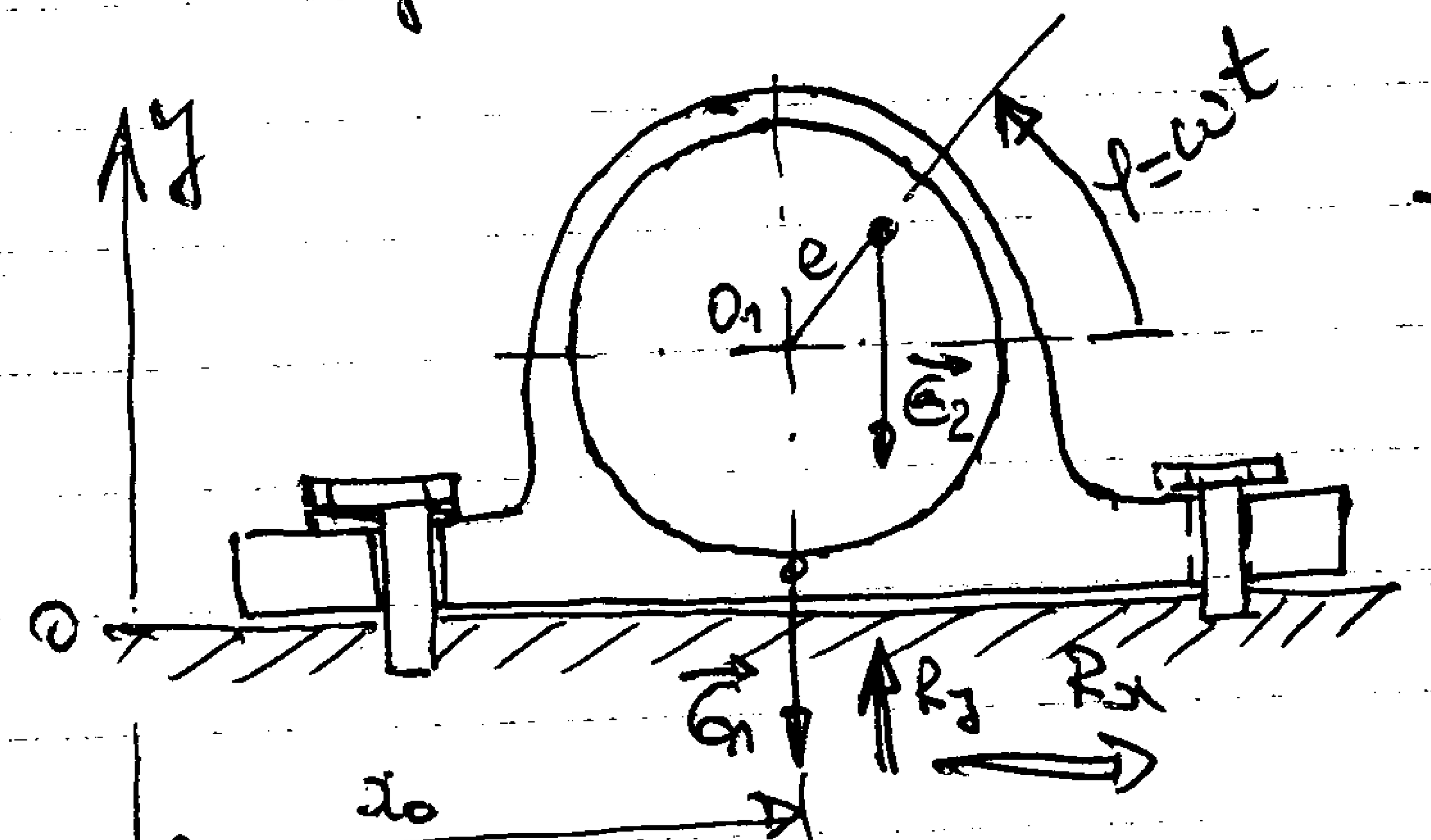
$$\Rightarrow \boxed{\left(x_c - \frac{l}{2}\right)^2 + y_c^2 = \frac{4}{9} l^2}$$

$$\vec{K} = m\vec{v}_c = m\dot{x}_c \vec{i} + m\dot{y}_c \vec{j} \xrightarrow{\varphi=\omega t} 2ml\omega(\cos\omega t\, \vec{i} - \sin\omega t\, \vec{j})$$

$$\vec{F}_R^s = m\vec{a}_c = m\frac{d\vec{v}_c}{dt} = -2ml\omega^2(\sin\omega t\, \vec{i} + \cos\omega t\, \vec{j})$$

2. Elektromotor čiji je stator težine G_1, a rotor težine G_2 i ekscentriciteta e, posredstvom zavrtanja učvršćen je za horizontalnu podlogu. Ako se rotor obrće konstantnom ugaonom brzinom ω odrediti maksimalnu smičuću silu u zavrtnjima.

$$m\vec{a}_c = \vec{F}_R^s, \quad m = \frac{G_1+G_2}{g}, \quad \vec{F}_R^s = \vec{G}_1 + \vec{G}_2 + \vec{R}$$



$$\rightarrow m\ddot{x}_c = R_x$$

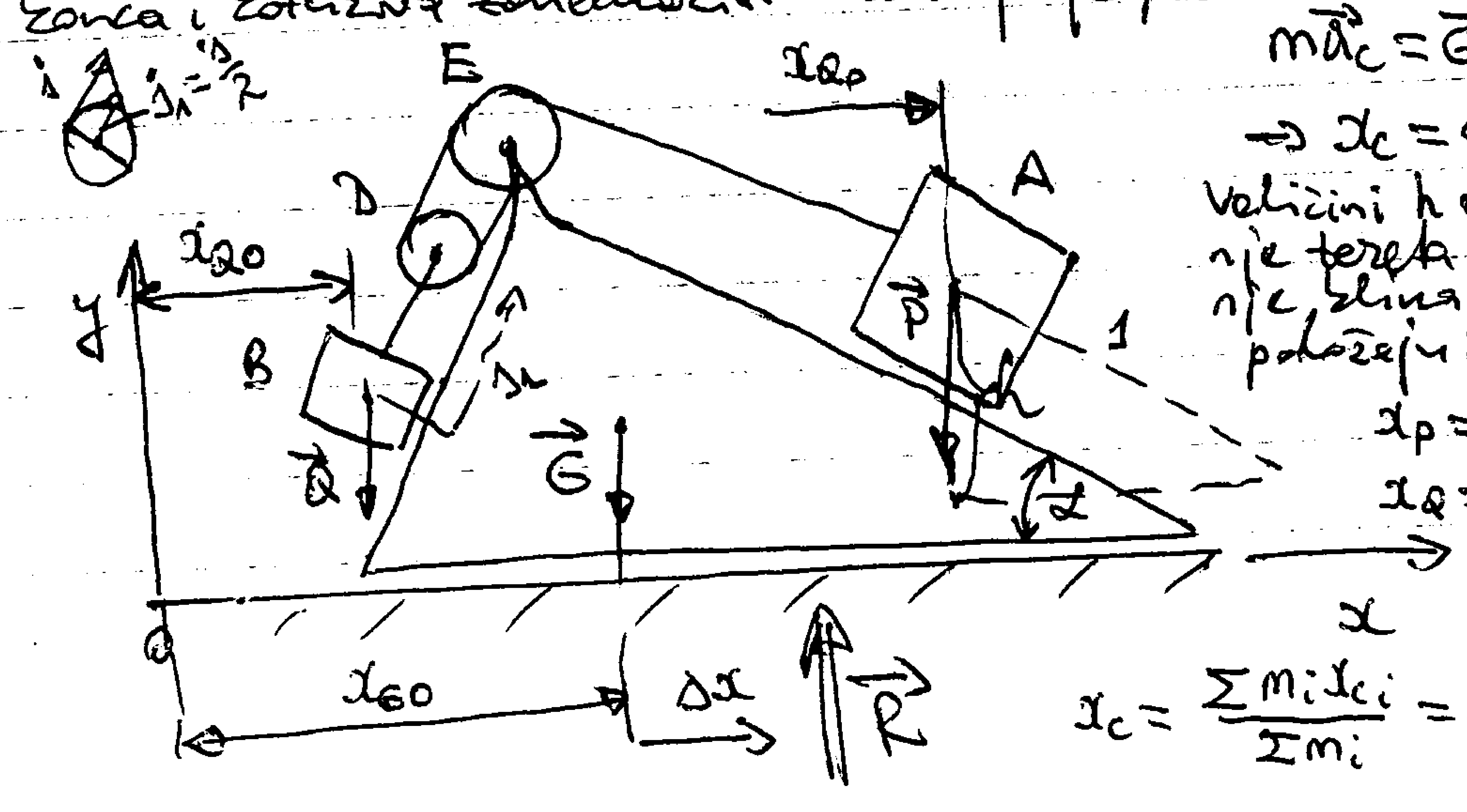
$$x_c = \frac{G_1 x_0 + G_2(x_0 + e\cos\omega t)}{G+G_1}$$

$$\rightarrow R_x = -\frac{G_2}{g} e\omega^2 \cos\omega t$$

$$|R_x|_{max} = \frac{G_2}{g} e\omega^2$$

3. Duž strmih ravni pravouglog klina težine G, koji leži na glatkoj horizontalnoj podlozi, mogu se pomjerati tereti A i B težina P i Q (v. sl.). Za koliko će se pomjeriti klin duž horizontalne podloge ako se teret A spusti za h mjereno duž vertikale? Težinu konca i kotura zanemariti. Kretanje je počelo iz mira.

$$m\vec{a}_c = \vec{G} + \vec{P} + \vec{Q} + \vec{R} \rightarrow m\ddot{x}_c = 0 \rightarrow \dot{x}_c = 0$$



$$\rightarrow x_c = const = x_c(t_0) = x_{c0}$$

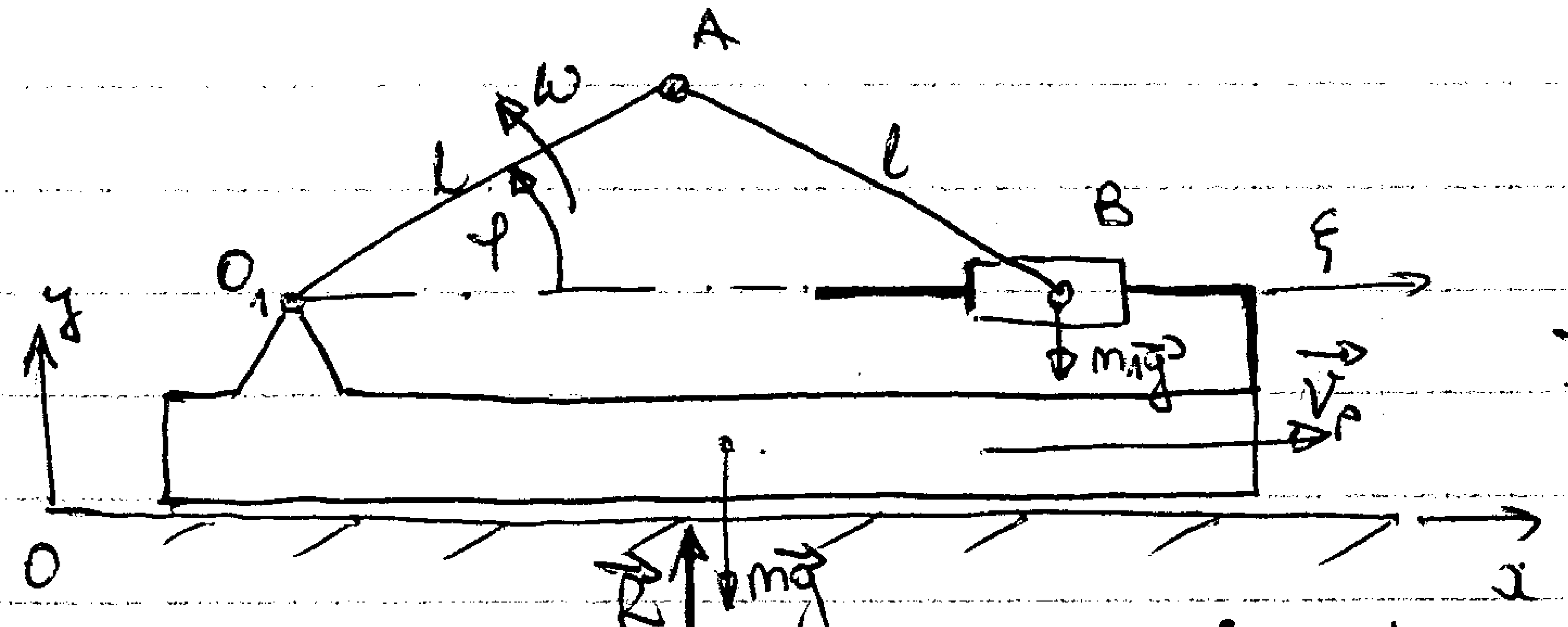
Veličini h odgovara relativno pomjeranje tereta A za $s = h/\sin\alpha$ i pomjeranje klina za Δx pa je u krajnjem položaju: $x_G = x_{G0} + \Delta x$

$$x_P = x_{P0} + \Delta x + s\cos\alpha$$

$$x_Q = x_{Q0} + \Delta x + s_1 \sin\alpha, \quad s_1 = \frac{s}{2}$$

$$x_c = \frac{\sum m_i x_{ci}}{\sum m_i} = x_0 \rightarrow \Delta x = -\frac{2P\,ctg\alpha + Q}{2(G+P+Q)}$$

4. Klipni mehanizam OAB vezan je za postolje mase m koje je postavljeno na glatku horizontalnu ravan. Masa klizača B je m_1, a mase štapova OA i AB, dužina l, su zanemarljive. Odrediti maksimalnu vrijednost v_{pmax} brzine postolja ako se krivaja OA obrće konstantnom ugaonom brzinom ω i za $t_0=0$ je $\varphi_0=0$.



$$\frac{d\vec{K}}{dt}=\vec{F}_2^s=m_1\vec{g}+m_2\vec{g}+\vec{R}$$

$$\frac{dK_x}{dt}=0 \rightarrow K_x=K_x(t_0=0)=const.$$

$$\vec{K}=m\vec{v}_p+m_1\vec{v}_B$$

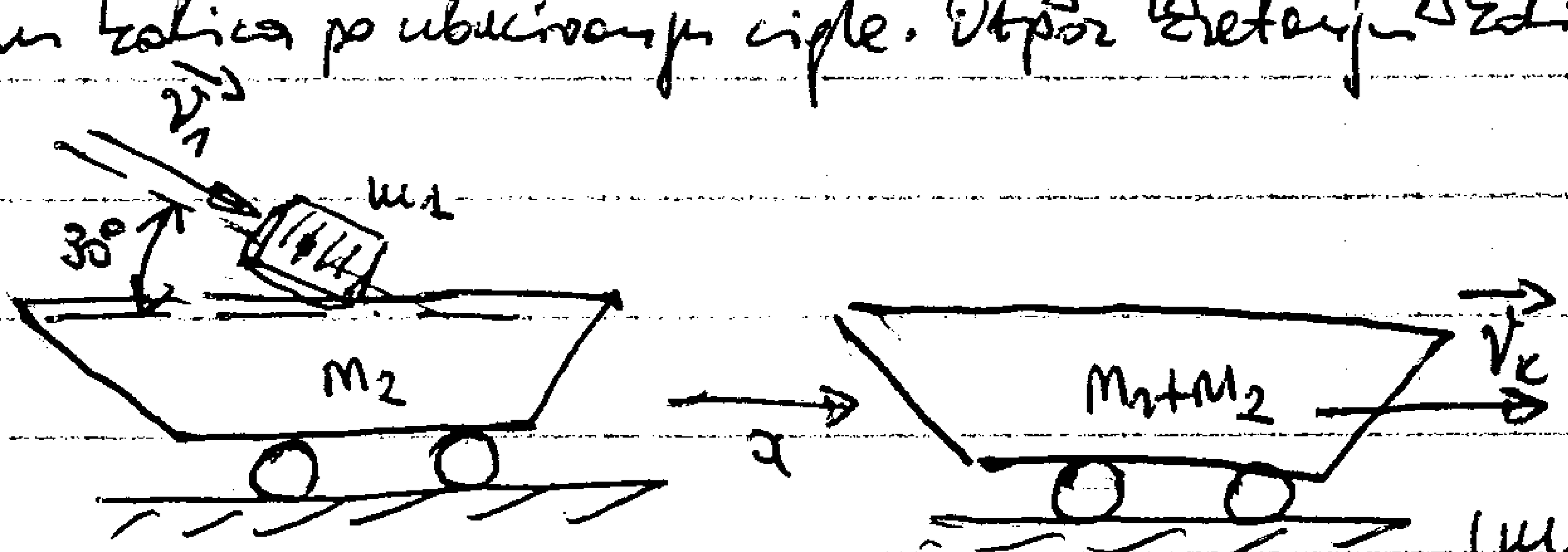
$$\vec{v}_B=\vec{v}_p+\vec{v}_{Br}$$

$$\vec{K}=(m+m_1)\vec{v}_p+m_1\vec{v}_{Br}$$

$$K_x=(m_1+m)v_{px}+m_1 v_{Brx}, \quad v_{Brx}=\dot{\xi}_B=\frac{d}{dt}(2l\cos\omega t)=-2l\omega\sin\omega t$$

$$K_x(t)=K_x(t_0=0) \rightarrow v_{px}=\frac{2m_1 l\omega}{m+m_1}\sin\omega t, \quad v_{pmax}=\frac{2m_1 l\omega}{m+m_1}$$

5. Cigla mase $m_1=0{,}6$ kg ubaci se brzinom $v_1=10$ m/s pod uglom od $30°$ u odnosu na horizont, u kolica mase $m_2=25$ kg koja miruju na horizontalnoj podlozi. Odrediti brzinu kolica po ubacivanju cigle. Otpor kretanju kolica zanemariti.



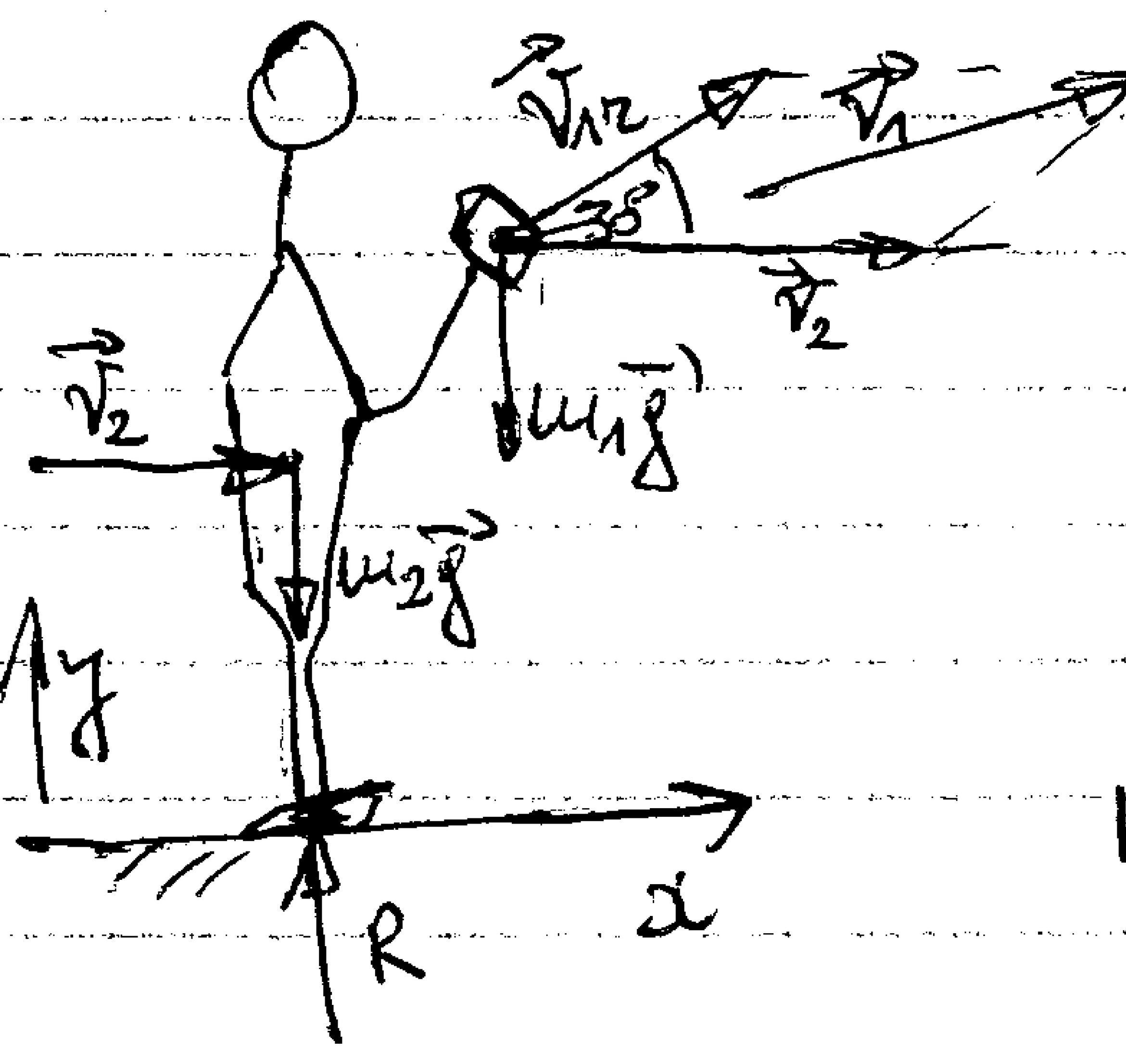
$$\vec{K}_2=(m_1+m_2)\vec{v}_k, \quad \vec{K}_1=m_1\vec{v}_1$$

$$\vec{F}_2^s=m_1\vec{g}+m_2\vec{g}+\vec{R},$$

$$F_{2x}^s=0 \rightarrow K_{2x}-K_{1x}=0$$

$$(m_1+m_2)v_k=m_1 v_1\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow v_k=0{,}203\ \frac{m}{s}$$

6. Čovjek sa klizaljkama na nogama, stojeći na ledu, baca kamen mase $m_1=8$ kg početnom, relativnom u odnosu na njegovo tijelo, brzinom $v_{1r}=2\ \frac{m}{s}$ i elevacionim uglom od $30°$. Bacanje traje $t_1=1{,}5$ s. Odrediti horizontalnu brzinu čovjeka po završenom bacanju i srednju vrijednost reakcije podloge na koje klizaljke za vrijeme bacanja. Masa čovjeka je $m_2=70$ kg. Zanemariti trenje i kretanje ruku.



$$\frac{d\vec{K}}{dt}=m_1\vec{g}+m_2\vec{g}+\vec{R} \rightarrow \begin{cases} \frac{dK_x}{dt}=0 \rightarrow K_x(t_1)=K_x(t_0) \\ \frac{dK_y}{dt}=-m_1g-m_2g+R \end{cases}$$

$$\vec{K}(t_1)=m_1\vec{v}_1+m_2\vec{v}_2, \quad \vec{v}_1=\vec{v}_2+\vec{v}_{1r}$$

$$\vec{K}(t_1)=(m_1+m_2)\vec{v}_2+m_1\vec{v}_{1r}$$

$$K_x(t_1)=(m_1+m_2)v_{2x}+m_1 v_{1r}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=0 \rightarrow v_{2x}=-0{,}1776\ \frac{m}{s}$$

$$\underbrace{K_y(t_1)}_{m_1 v_{1r}\cdot\frac{1}{2}}-\underbrace{K_y(t_0)}_{0}=-(m_1+m_2)g\,t_1+\underbrace{\int_0^{t_1}R\,dt}_{=R_{sr}\cdot t_1}$$

$$\rightarrow R_{sr}=(m_1+m_2)g+\frac{m_1 v_{1r}}{2t_1}=770{,}5\ N$$