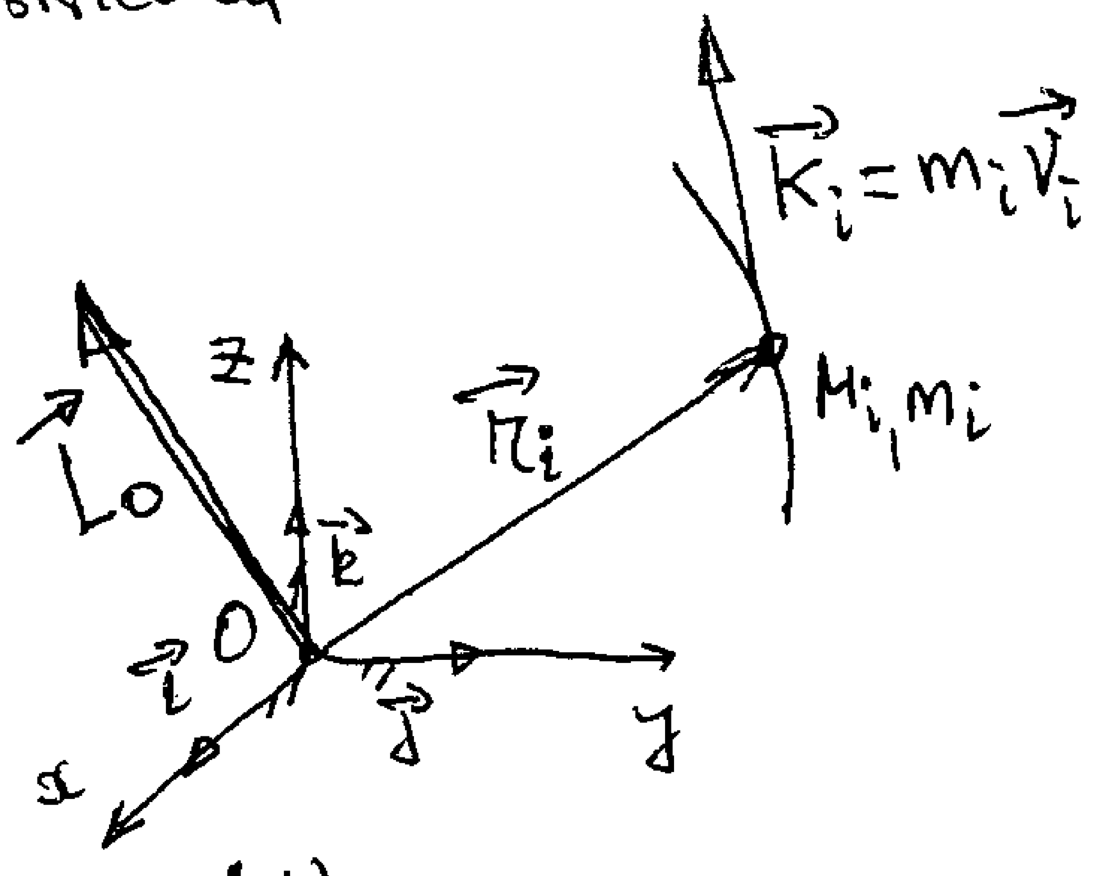
IX sedmica nastave

- predavanja sa primjerima

6. Zakon o promjeni momenta količina kretanja sistema

6.1 Moment količina kretanja sistema



Momentom (glavnim momentom) količina kretanja sistema, ili kinetičkim momentom za nepokretnu tačku O naziva se veličina $\vec{L}_O$, koja je jednaka vektorskom zbiru momenata količina kretanja svih tačaka sistema u odnosu na tu tačku:

$$\vec{L}_O = \sum \vec{L}_{Oi} = \sum \vec{M}_O^{m_i\vec{v}_i} = \sum \vec{r}_i \times m_i\vec{v}_i \qquad (1)$$

Za inercijalni koordinatni sistem $Oxyz$, gornja relacija se svodi na

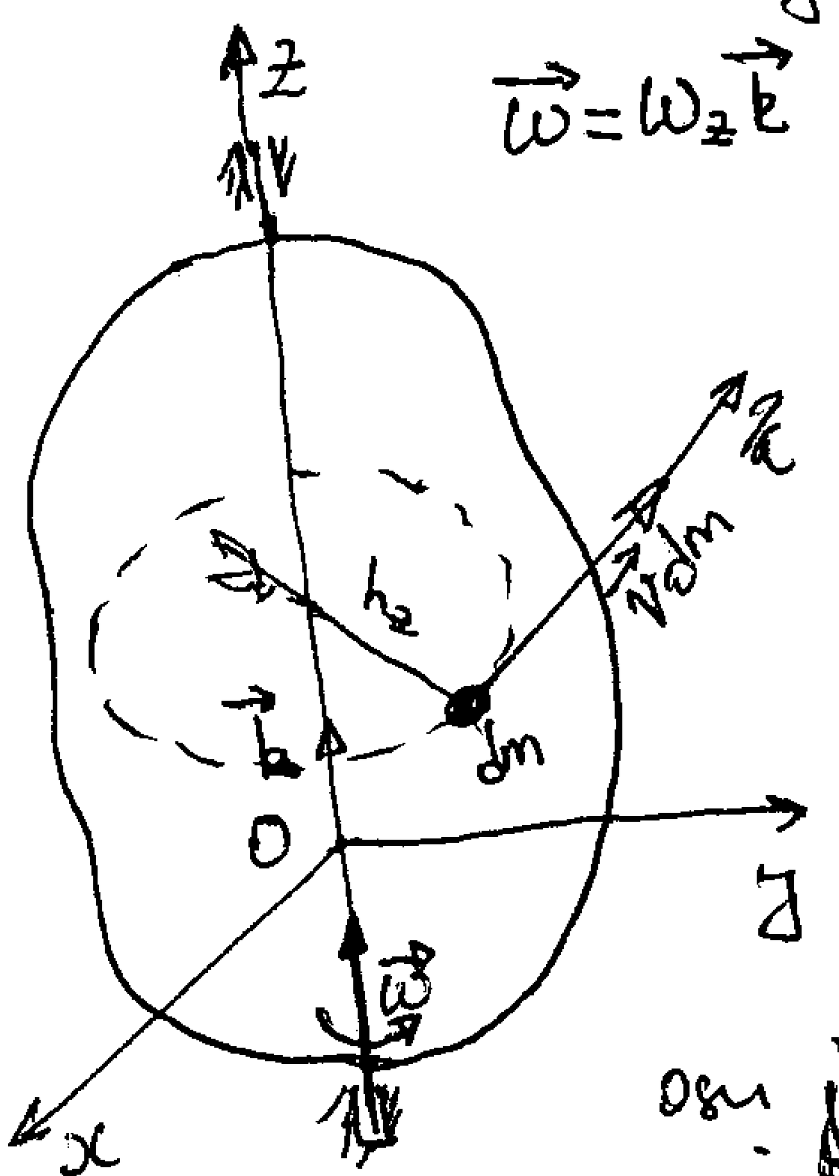
$$\vec{L}_O = \sum m_i \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_i & y_i & z_i \\ \dot{x}_i & \dot{y}_i & \dot{z}_i \end{vmatrix}$$

pa su projekcije kinetičkog momenta sistema na ose x, y i z, tj. momenti količina kretanja za te ose:

$$L_x = \sum m_i(y_i\dot{z}_i - z_i\dot{y}_i),\; L_y = \sum m_i(z_i\dot{x}_i - x_i\dot{z}_i),\; L_z = \sum m_i(x_i\dot{y}_i - y_i\dot{x}_i), \qquad (2)$$

jer je $\vec{L}_O = L_x\vec{i} + L_y\vec{j} + L_z\vec{k}$.

Pr. Kinetički moment krutog tijela koje se obrće, za obrtnu osu.



$$dL_z = L_z(dm) = \overset{+}{M}{}_z^{\vec{v}\,dm} = h_z \cdot (h_z\omega_z)\,dm$$

$$L_z = \int_{(m)} h_z^2\,\omega_z\,dm = \omega_z \underbrace{\int_{(m)} h_z^2\,dm}_{J_z}$$

$$\boxed{L_z = J_z\,\omega_z} \qquad (3)$$

Moment količine kretanja tijela, koje se obrće, za obrtnu osu jednak je proizvodu iz momenta inercije tijela za tu osu i projekcije ugaone brzine tijela na obrtnu osu.

N: Osim projekcije L_z kinetički moment $\vec{L}_O$ ima i projekcije L_x i L_y, koje su u opštem slučaju različite od nule, i biće određenje u odjeljku 6.2.

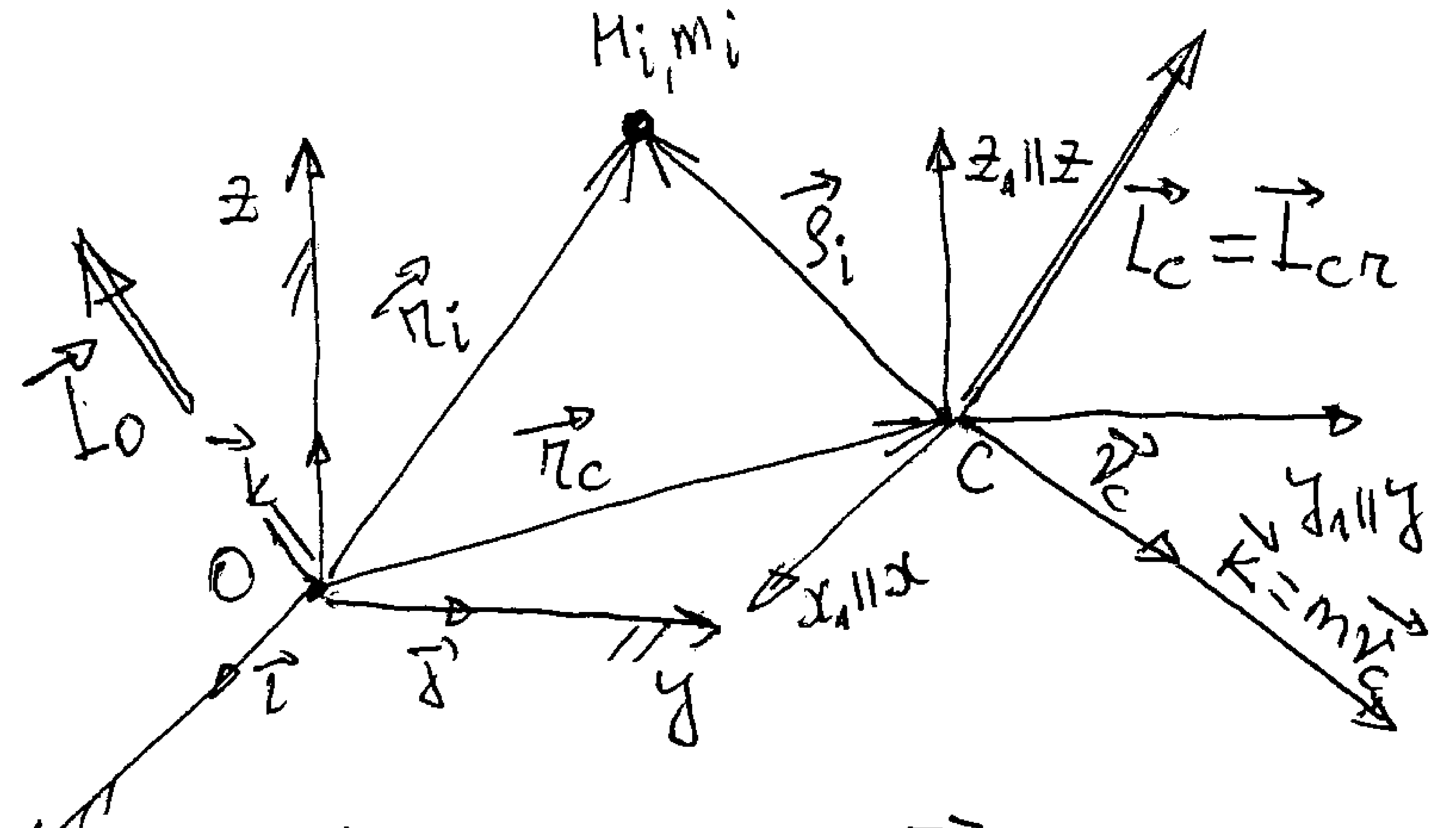
Posmatrajmo sada kretanje datog sistema kako u odnosu na nepokretni (inercijalni) koordinatni sistem, tako i u odnosu na translatorno pokretni koordinatni sistem vezan za centar inercije $Cx_1y_1z_1$. Položaj proizvoljne tačke M_i u pokretnom koordinatnom sistemu određen je vektorom položaja $\vec{\rho}_i$. Očigledno su:

$$\vec{r}_i = \vec{r}_c + \vec{\rho}_i \qquad (4)$$

i

$$\vec{v}_i = \vec{v}_c + \vec{v}_{ir}, \qquad (5)$$

gdje je $\vec{v}_i$ apsolutna, a $\vec{v}_{ir} = \dot{\vec{\rho}}_i$ relativna brzina tačke M_i, dok je $\vec{v}_c = \dot{\vec{r}}_c$ - apsolutna brzina centra inercije (prenosna brzina).



$$\vec{L}_C = \sum \vec{\rho}_i \times m_i\vec{v}_i$$ – kinetički moment apsolutnih kretanja za centar inercije

$$\vec{L}_C \overset{(5)}{=} \underbrace{\left(\sum m_i\vec{\rho}_i\right)}_{=m\vec{\rho}_c = 0} \times \vec{v}_c + \underbrace{\sum \vec{\rho}_i \times m_i\vec{v}_{ir}}_{=\vec{L}_{Cr}}$$

$= \vec{L}_{Cr}$ – kinetički moment relativnih kretanja za centar inercije

$$\Rightarrow \vec{L}_C = \vec{L}_{Cr} \qquad (6)$$

Dakle, kinetički moment apsolutnih kretanja za centar inercije jednak je kinetičkom momentu relativnog kretanja za tačku C. Pri tome se pod relativnim kretanjem podrazumijeva kretanje u odnosu na translatorno pokretni koordinatni sistem vezan za centar inercije.

S druge strane, ako u (1) unesemo vezu (4), dobijamo

$$\vec{L}_O = \vec{r}_c \times \sum m_i\vec{v}_i + \sum \vec{\rho}_i \times m_i\vec{v}_i ,$$

a pošto je $\sum m_i\vec{v}_i = \vec{K} = m\vec{v}_c$ – količina apsolutnog kretanja i $\sum \vec{\rho}_i \times m_i\vec{v}_i = \vec{L}_C$, to je

$$\vec{L}_O = \vec{L}_C + \vec{r}_c \times \vec{K}$$

ili $\vec{L}_O = \vec{L}_C + \vec{r}_c \times m\vec{v}_c$, odnosno, $\vec{L}_O = \vec{L}_{Cr} + \vec{M}_O^{m\vec{v}_c}$ (7)

Ako projiciramo (7) na nepokretne ose $Oxyz$, dobićemo

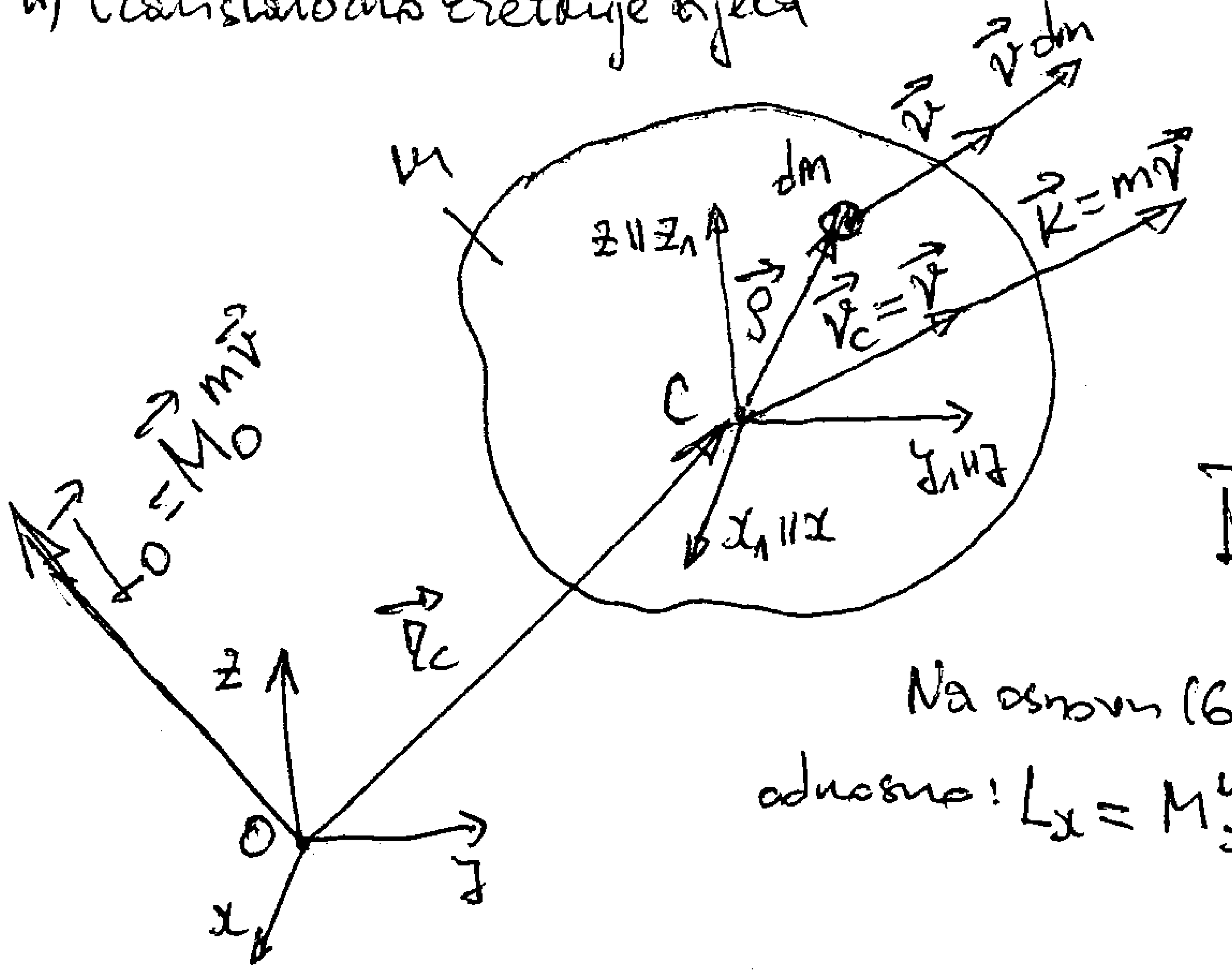
$$L_x = L_{Cx_1r} + M_x^{m\vec{v}_c}, \quad L_y = L_{Cy_1r} + M_y^{m\vec{v}_c}, \quad L_z = L_{Cz_1r} + M_z^{m\vec{v}_c} \qquad (8)$$

Prema tome, moment količina apsolutnog kretanja za nepokretnu tačku O, $\vec{L}_O$, jednak je zbiru kinetičkog momenta relativnog kretanja za centar inercije i momenta količine kretanja centra inercije sistema za pol O, pod pretpostavkom da je u centru inercije skoncentrisana cjelokupna masa sistema.

Relacija (7), odnosno (8), često se primjenjuju u dinamici krutog tijela.

6.2 Kinetički moment krutog tijela

a) translatorno kretanje tijela



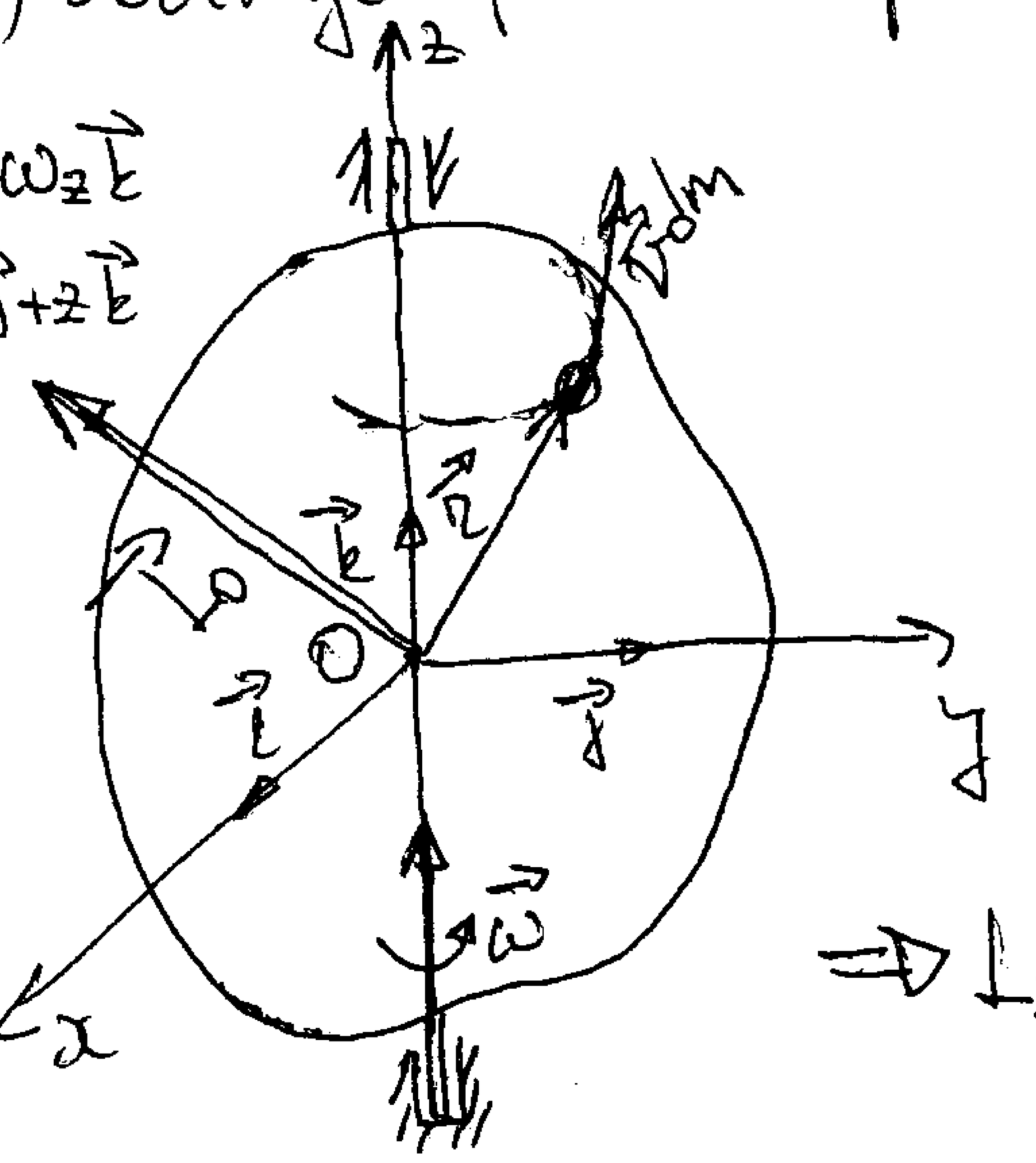
Brzine svih tačaka tijela su iste, $\vec{v}=\vec{v}_C$, pa su relativne brzine tačaka tijela u odnosu na translatorno pokretni koordinatni sistem $Cx_1y_1z_1$ (koji se kreće na isti način kao i tijelo) jednake nuli, tj. $\vec{v}_r=\vec{v}-\vec{v}_C=0$.

$$\vec{L}_C=\vec{L}_{Cr}=\int_{(m)}\vec{\rho}\times\underbrace{\vec{v}_r}_{0}dm=0$$

Na osnovu (6.1.7) je $\vec{L}_O=\vec{M}_O^{m\vec{v}}=\vec{r}_C\times m\vec{v}$,

odnosno: $L_x=M_x^{m\vec{v}}$, $L_y=M_y^{m\vec{v}}$, $L_z=M_z^{m\vec{v}}$

b) obrtanje tijela oko nepokretne ose



$\vec{\omega}=\omega_z\vec{k}$

$\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$

$$\vec{v}=\vec{\omega}\times\vec{r}$$

$$\vec{L}_O=\int_{(m)}\vec{r}\times\vec{v}\,dm=\int_{(m)}\vec{r}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})\,dm$$

$$\left[\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})=\vec{B}(\vec{A}\cdot\vec{C})-\vec{C}(\vec{A}\cdot\vec{B})\right]$$

$\downarrow$

$$\vec{r}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})=\vec{\omega}r^2-\vec{r}(\vec{r}\cdot\vec{\omega})=\omega_z(x^2+y^2)\vec{k}-\omega_z xz\vec{i}-\omega_z yz\vec{j}$$

$$\Rightarrow L_x=\vec{L}_O\cdot\vec{i}=-\omega_z\underbrace{\int_{(m)}xz\,dm}_{=J_{xz}}$$

$$L_y=\vec{L}_O\cdot\vec{j}=-\omega_z\underbrace{\int_{(m)}yz\,dm}_{=J_{yz}};\quad L_z=\vec{L}_O\cdot\vec{k}=\omega_z\underbrace{\int_{(m)}(x^2+y^2)\,dm}_{J_z}$$

$\vec{L}_O=L_x\vec{i}+L_y\vec{j}+L_z\vec{k}$, gdje su kinetički momenti za pojedine ose:

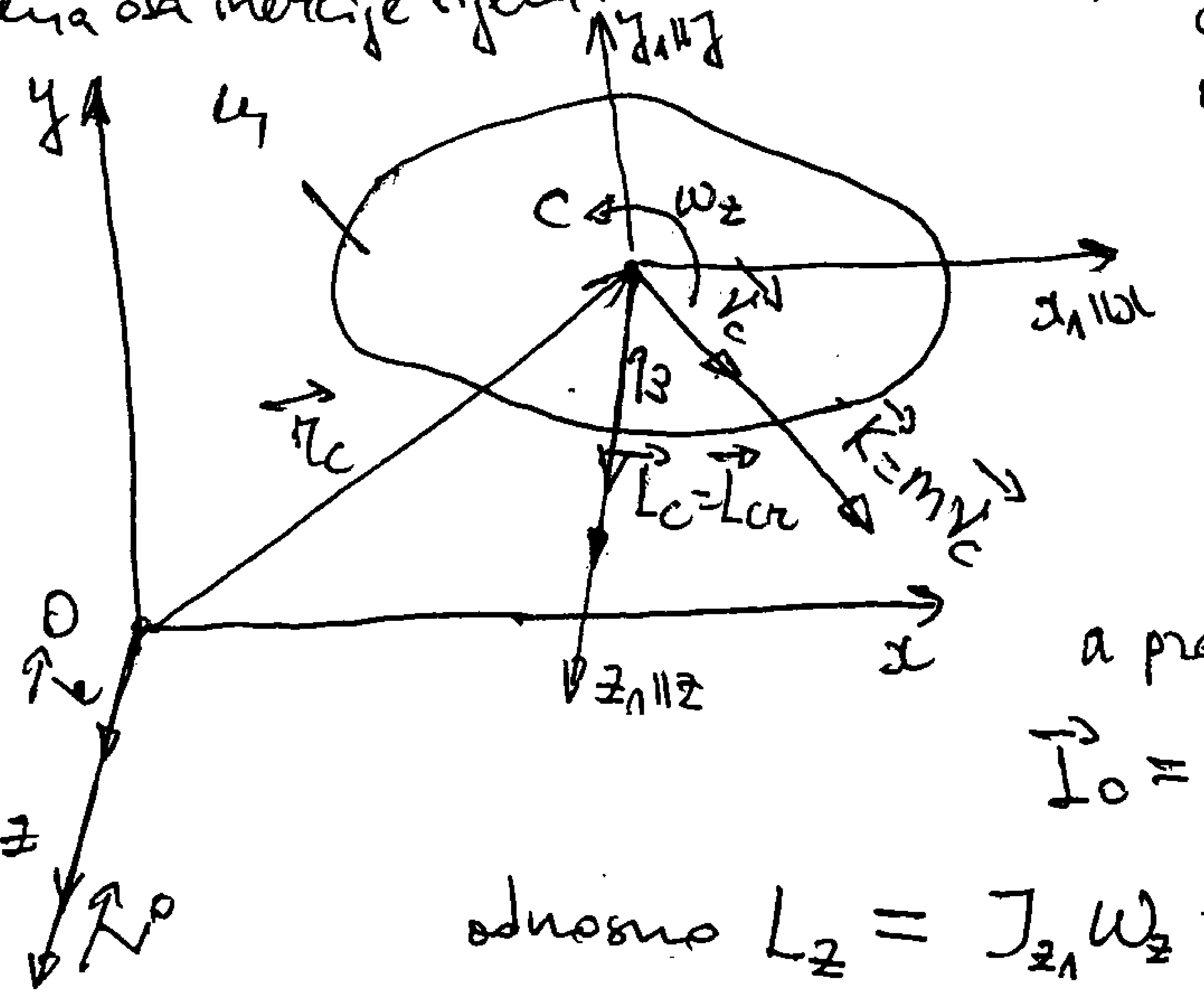
$$L_x=-J_{xz}\omega_z,\quad L_y=-J_{yz}\omega_z,\quad L_z=J_z\omega_z \qquad (1)$$

N: U prethodnim izvođenjima ose koordinatnog sistema mogu biti kako nepokretne tako i pokretne.

Vektor $\vec{L}_O$ nema pravac obrtne ose (vektora ugaone brzine). Samo onda kada je $J_{xz}=J_{yz}=0$, tj. kada je obrtna osa <u>glavna osa inercije</u> tijela, biće $\vec{L}_O=L_z\vec{k}=J_z\vec{\omega}$, i tj. vektor $\vec{L}_O$ biće usmjeren duž obrtne ose.

c) ravno kretanje tijela

Poznato je iz kinematike da je ravno kretanje takvo kretanje tijela pri kome se sve njegove tačke kreću paralelno prema nekoj nepokretnoj ravni. Ta ravan se zove ravan kretanja i kretanje tijela se svodi na kretanje ravne figure u toj ravni. Pretpostavićemo da je Oxy ravan kretanja i da je ona ravan materijalne simetrije tijela. Tada centar inercije C tijela leži u toj ravni, a osa koja prolazi kroz tačku C i upravna je na ravan kretanja je glavna centralna osa inercije tijela. Razložimo kretanje tijela na translatorno određeno kretanjem centra inercije C i na relativno kretanje u odnosu na centar inercije, koje je, u ovom slučaju, obrtanje oko ose koja prolazi kroz tačku C, a normalna je na ravan kretanja (osa z_1).



Na osnovu (6.2.1) biće

$$\vec L_C = \vec L_{Cr} = J_{z_1}\omega_z \vec k = J_{z_1}\vec\omega,$$

a prema (6.1.7):

$$\vec L_O = J_{z_1}\vec\omega + \vec M_O^{m\vec v_C},$$

odnosno $$L_z = J_{z_1}\omega_z + M_z^{m\vec v_C}$$

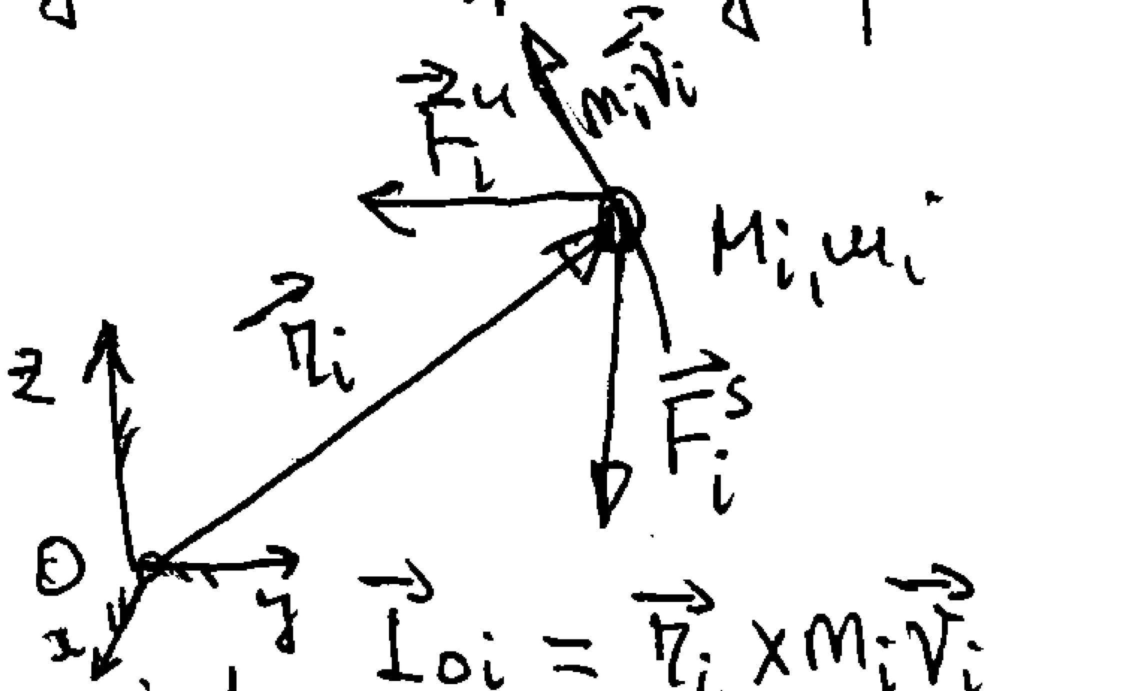
Napomena 1: Umjesto J_{z_1} obično se piše J_{Cz} ili, još češće, samo J_C.

Napomena 2: Ukoliko ravan kretanja Oxy ne bi bila ravan materijalne simetrije to bi kinetički moment $\vec L_C$ imao komponente po x_1 i y_1 osi (v. 6.2.1).

6.3 Zakon o promjeni momenta količina kretanja

Zakon o promjeni momenta količine kretanja materijalne tačke, primijenjen na tačku M_i, mase m_i, iz datog sistema glasi

$$\frac{d\vec L_{Oi}}{dt} = \vec M_O^{\vec F_i^s} + \vec M_O^{\vec F_i^u}$$



gdje su $\vec F_i^s$ i $\vec F_i^u$ rezultante svih spoljašnjih i unutrašnjih sila, koje djeluju na datu tačku. $\vec L_{Oi} = \vec r_i \times m_i\vec v_i$ Ako postavimo ovakve jednačine za svaku tačku sistema, a zatim sve te jednačine saberemo, dobićemo

$$\frac{d}{dt}\underbrace{\left(\sum \vec L_{Oi}\right)}_{=\vec L_O} = \underbrace{\sum \vec M_O^{\vec F_i^s}}_{=\vec M_O^s} + \underbrace{\cancelto{0}{\sum \vec M_O^{\vec F_i^u}}}_{=\vec M_O^u}$$

glavni moment unutrašnjih sila je jednak nuli (v. odjeljak 1)

odnosno

$$\boxed{\frac{d\vec L_O}{dt} = \vec M_O^s} \qquad (1)$$

Dobijena relacija izražava zakon o promjeni momenta količine kretanja sistema: Izvod po vremenu momenta količine kretanja sistema za neku nepokretnu tačku jednak je glavnom momentu spoljašnjih sila (vektorskom zbiru momenata svih spoljašnjih sila) za istu tačku.

Vektorskoj jednačini (1) odgovaraju tri skalarne jednačine u obliku

$$\left.\begin{aligned} \frac{dL_x}{dt} &= M_x^s = \sum M_x^{\vec F_i^s} \\ \frac{dL_y}{dt} &= M_y^s = \sum M_y^{\vec F_i^s} \\ \frac{dL_z}{dt} &= M_z^s = \sum M_z^{\vec F_i^s} \end{aligned}\right\} \quad (1')$$

koje izražavaju zakone o promjeni momenta količine kretanja sistema za odgovarajuće nepokretne ose: Izvod po vremenu kinetičkog momenta sistema za neku nepokretnu osu, jednak je zbiru momenata svih spoljašnjih sila za tu osu.

Iz dokazanog zakona proističu sljedeće važne posledice:

1) Unutrašnje sile ne utiču direktno na promjenu kinetičkog momenta.

2) Zakon o održanju momenta količine kretanja.

Ako je $\vec M_O^s = 0 \xRightarrow{(1)} \vec L_O = \overrightarrow{const}$

Kada je glavni moment spoljašnjih sila za neku nepokretnu tačku jednak nuli, onda je moment količine kretanja sistema za istu tačku konstantan (i po pravcu i po intezitetu).

3) Zakon o održanju kinetičkog momenta za osu.

Ako je $\vec M_O^s \neq 0$, $M_x^s = 0 \xRightarrow{(1')_1} L_x = const$

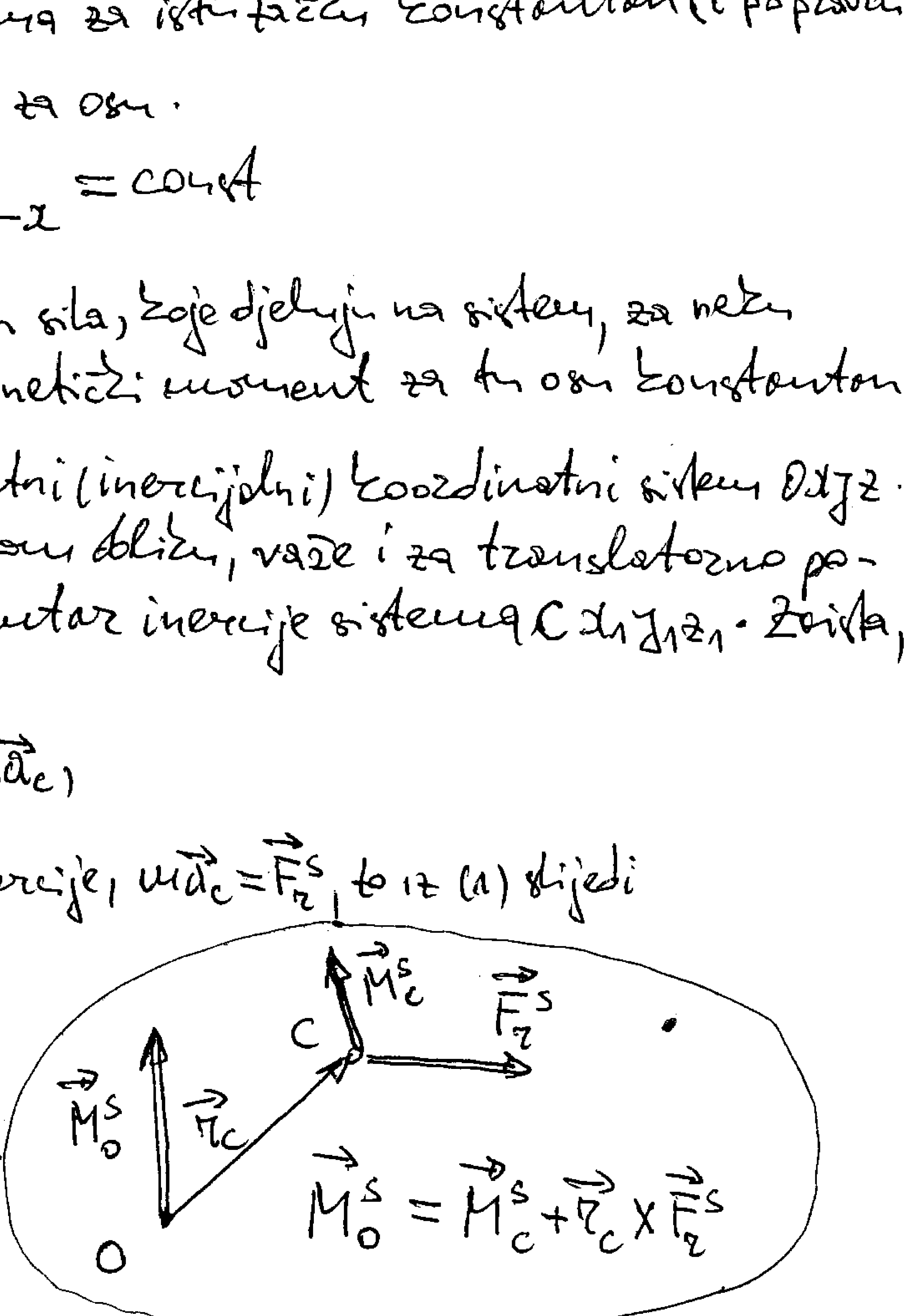
Kada je zbir momenata svih spoljašnjih sila, koje djeluju na sistem, za neku nepokretnu osu jednak nuli, onda je kinetički moment za tu osu konstantan.

Relacije (1) i (1') izvedene su za nepokretni (inercijalni) koordinatni sistem $Oxyz$. Važno je primijetiti da one, u potpuno istom obliku, važe i za translatorno pokretni koordinatni sistem vezan za centar inercije sistema $Cx_1y_1z_1$. Zaista, polazeći od relacije (6.1.7), imamo

$$\frac{d\vec L_O}{dt} = \frac{d\vec L_C}{dt} + \underbrace{\cancel{\vec v_C \times m\vec v_C}}_{0} + \vec r_C \times m\vec a_C,$$

a pošto je, na osnovu zakona o kretanju centra inercije, $m\vec a_C = \vec F_R^s$, to iz (1) slijedi

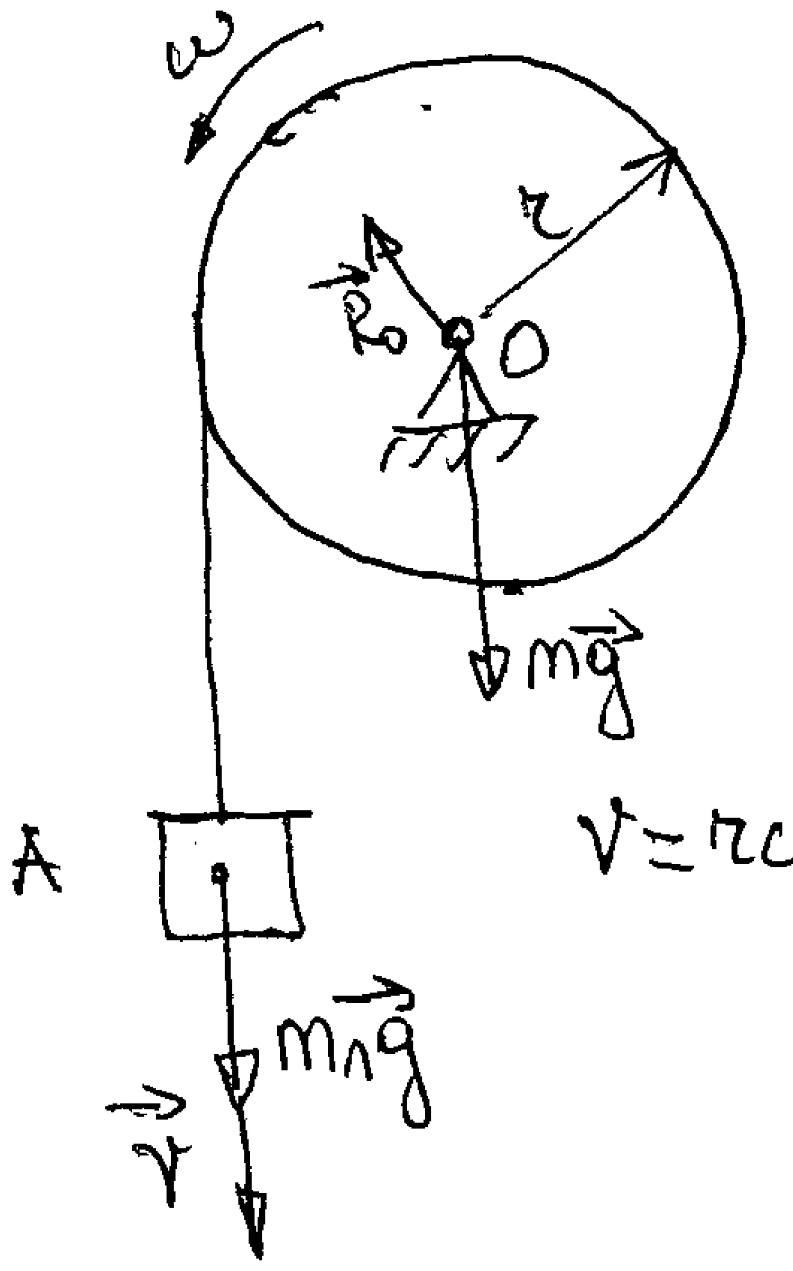
$$\frac{d\vec L_C}{dt} = \underbrace{\vec M_O^s - \vec r_C \times \vec F_R^s}_{=\vec M_C^s},$$



odnosno

$$\boxed{\frac{d\vec L_C}{dt} = \vec M_C^s} \quad (2)$$

Pr. Na kotur, koji se može smatrati homogenim kružnim diskom mase m i poluprečnika r, namotan je konopac na čijem je kraju A obješen teret mase m_1. Zanemarujući masu konopca i trenje u ležištu, odrediti ugaono ubrzanje kotura pri vertikalnom spuštanju tereta. Konopac smatrati nerastegljivim.



$v = r\omega$

spoljašnje sile: $m_1\vec g$, $m\vec g$, $\vec R_O$

Ako primijenimo zakon o promjeni kinetičkog momenta za osu O, biće

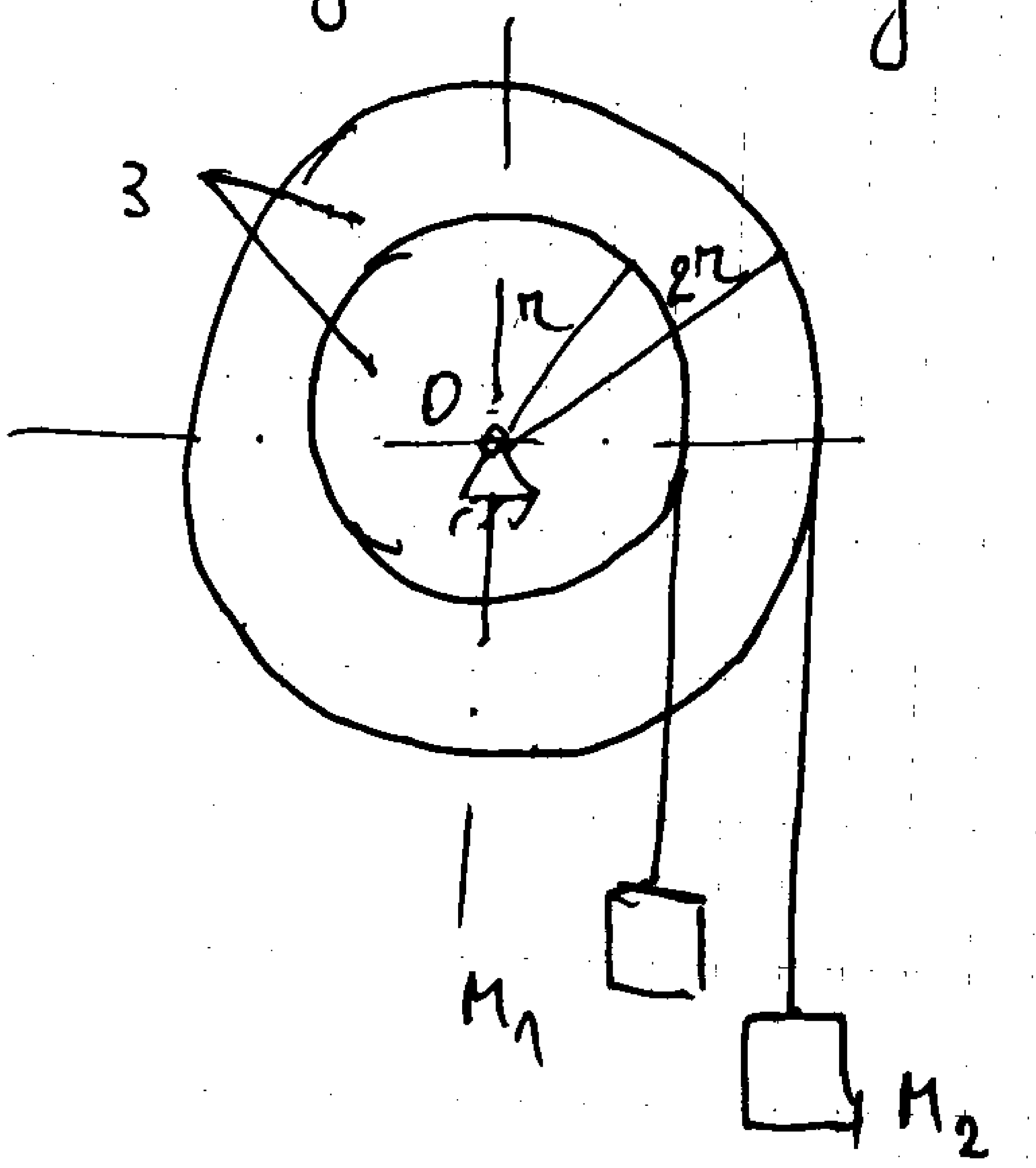
$$\frac{dL_O}{dt} = M_O^{m_1\vec g} + \cancel{M_O^{m\vec g}}^{\,0} + \cancel{M_O^{\vec R_O}}^{\,0}$$

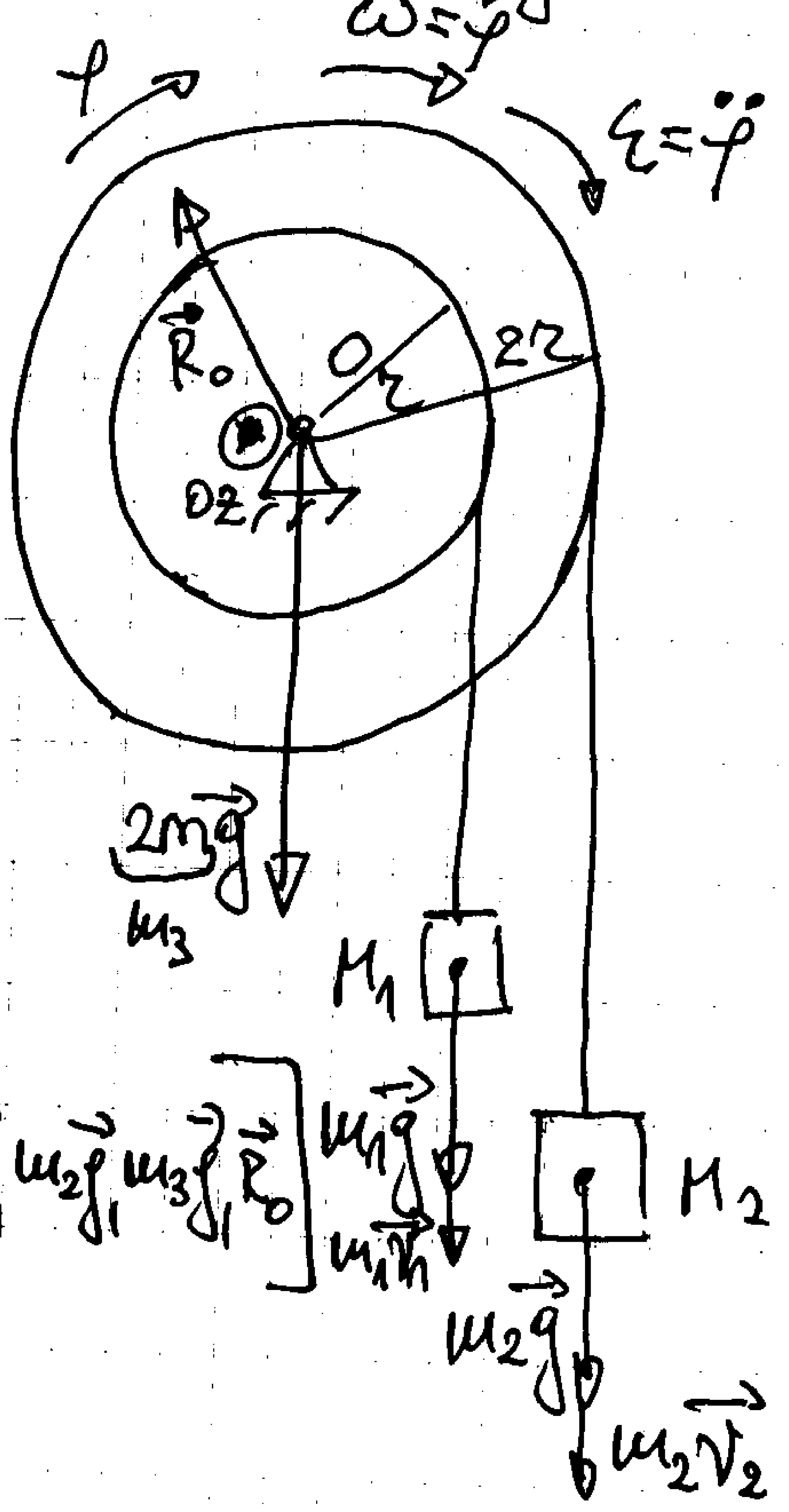
$$\overset{+}{\curvearrowleft}\; L_O = \underset{\substack{\| \\ J_O\omega \\ \| \\ \frac{mr^2}{2}}}{L_O^{(m)}} + \underset{\substack{\| \\ M_O^{m_1\vec v} = m_1 v r}}{L_O^{(m_1)}} = \left(\frac{m}{2} + m_1\right) r^2 \omega$$

$$\overset{+}{\curvearrowleft}\; M_O^{m_1\vec g} = m_1 g \cdot r$$

$$\Rightarrow \quad \frac{m+2m_1}{2} r^2 \frac{d\omega}{dt} = m_1 g r \quad \Rightarrow \quad \varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \boxed{\frac{2m_1 g}{(m+2m_1)r}}$$

① Tereti M_1 i M_2, masa $m_1 = 2m$ i $m_2 = m$, vezani su za krajeve nerastegljivih užadi koja su namotana na dva homogena koaksijalna, međusobno kruto vezana cilindra poluprečnika r i $2r$ i ukupne mase $m_3 = 2m$. Cilindri se obrću oko nepokretne horizontalne ose simetrije za koju je njihov poluprečnik inercije $i_0 = r\sqrt{2}$. Odrediti ugaono ubrzanje cilindara.





Spoljašnje sile koje deluju na sistem: $m_1\vec{g}$, $m_2\vec{g}$, $m_3\vec{g}$, $\vec{R}_0$

$$\sum M_{Oz}^{\vec{F}_i^s} = m_1 g r + m_2 g 2r = 4mgr$$

$$L_{Oz} = L_{Oz}^{(1)} + L_{Oz}^{(2)} + L_{Oz}^{(3)}$$

$$L_{Oz}^{(1)} = M_{Oz}^{m_1\vec{v}_1} = m_1 v_1 r, \quad v_1 = r\omega, \quad L_{Oz}^{(1)} = m_1 r^2 \omega = 2mr^2\omega$$

$$L_{Oz}^{(2)} = M_{Oz}^{m_2\vec{v}_2} = m_2 v_2 2r, \quad v_2 = 2r\omega, \quad L_{Oz}^{(2)} = 4mr^2\omega$$

$$L_{Oz}^{(3)} = J_{Oz}^{(3)}\omega, \quad J_{Oz}^{(3)} = m_3 i_0^2 = 4mr^2 \Rightarrow L_{Oz}^{(3)} = 4mr^2\omega$$

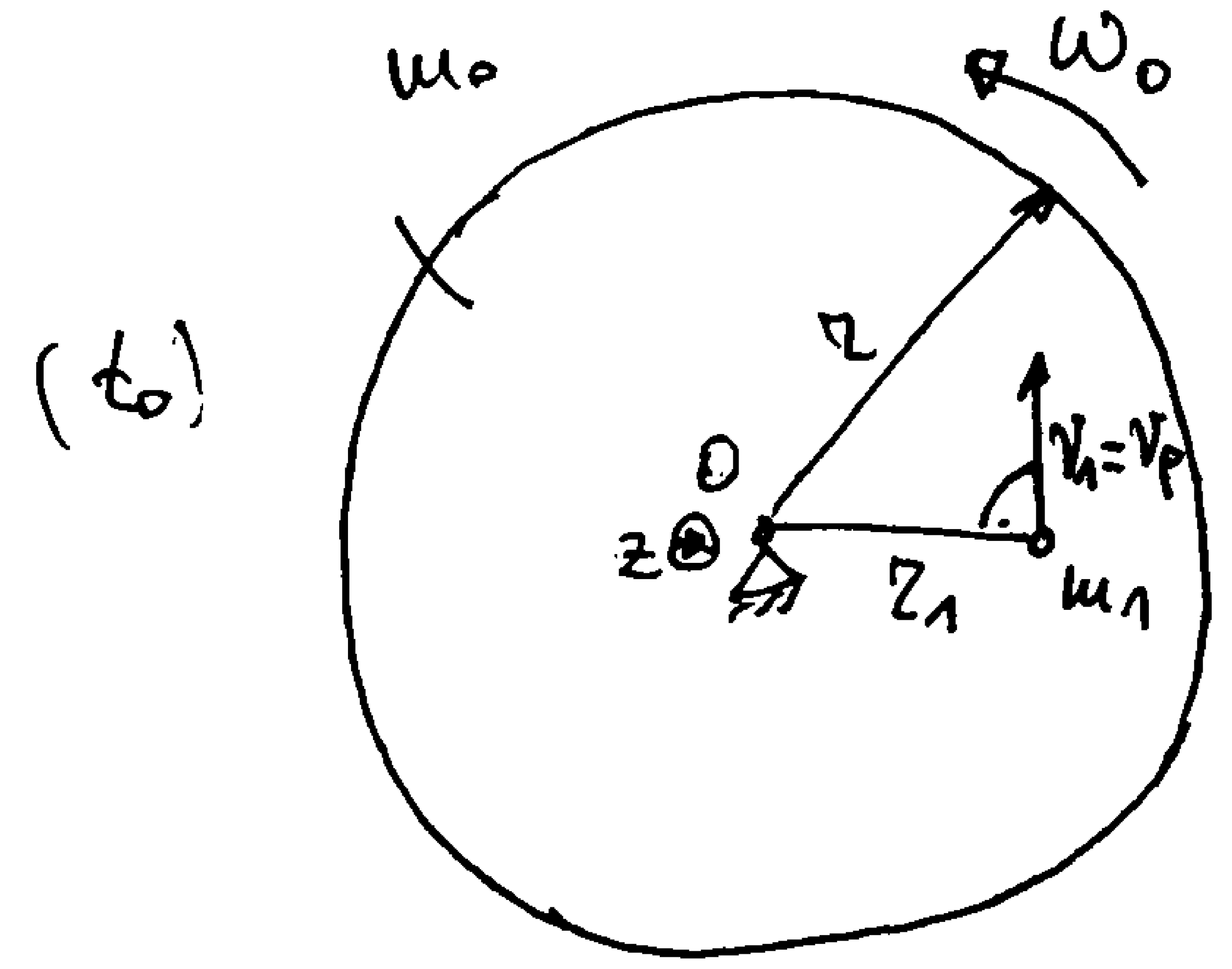
$$\Rightarrow L_{Oz} = 10mr^2\omega$$

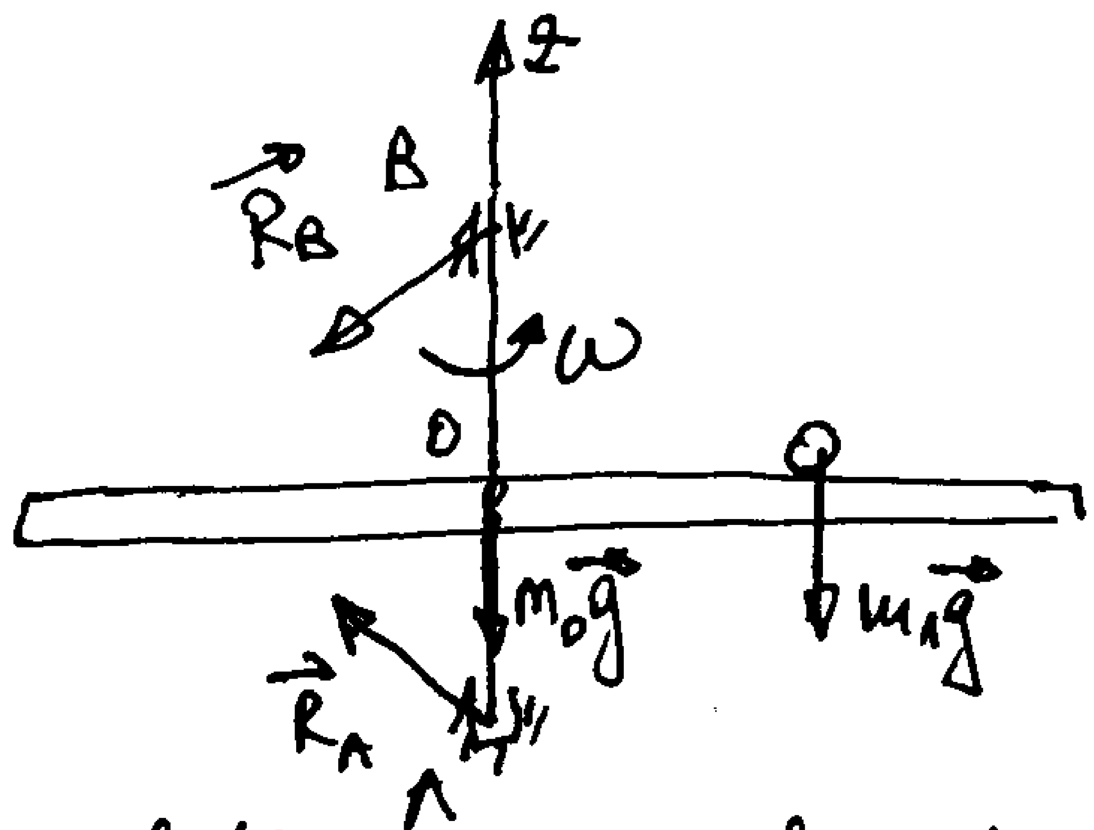
$$\frac{dL_{Oz}}{dt} = \sum M_{Oz}^{\vec{F}_i^s} \Rightarrow 10mr^2 \underbrace{\frac{d\omega}{dt}}_{\varepsilon} = 4mgr$$

$$\boxed{\varepsilon = \frac{2}{5}\frac{g}{r}}$$

(2) Kružna horizontalna platforma mase m_0 i poluprečnika r obrće se oko vertikalne ose ugaonom brzinom ω_0. Na platformi na rastojanju r_1 od obrtne ose stoji čovjek mase m_1. Odrediti, zanemarujući trenje u ležištima platforme, ugaonu brzinu ω_1 kojom će se obrtati platforma kada čovjek počne da se kreće relativnom brzinom v_r po kružnici radijusa r_1 u stranu obrtanja platforme. Platformu smatrati homogenim kružnim diskom a čovjeka materijalnom tačkom. Dato je $\omega_0 = 10$ ob/min; $m_0 = 200$ kg, $m_1 = 70$ kg, $r = 2$ m, $r_1 = 1,5$ m; $v_r = 2\ \frac{m}{s}$

(t_0)





$v_1 = v_p = r_1\omega_0$ (čovjek miruje u odnosu na platformu)

U sistemu platforma + čovjek spoljašnje sile su: $m_1\vec g$, $m_0\vec g$, $\vec R_A$, $\vec R_B$. Momenti svih ovih sila za obrtnu osu z su jednaki nuli pa važi zakon o održanju momenta količine kretanja za obrtnu osu.

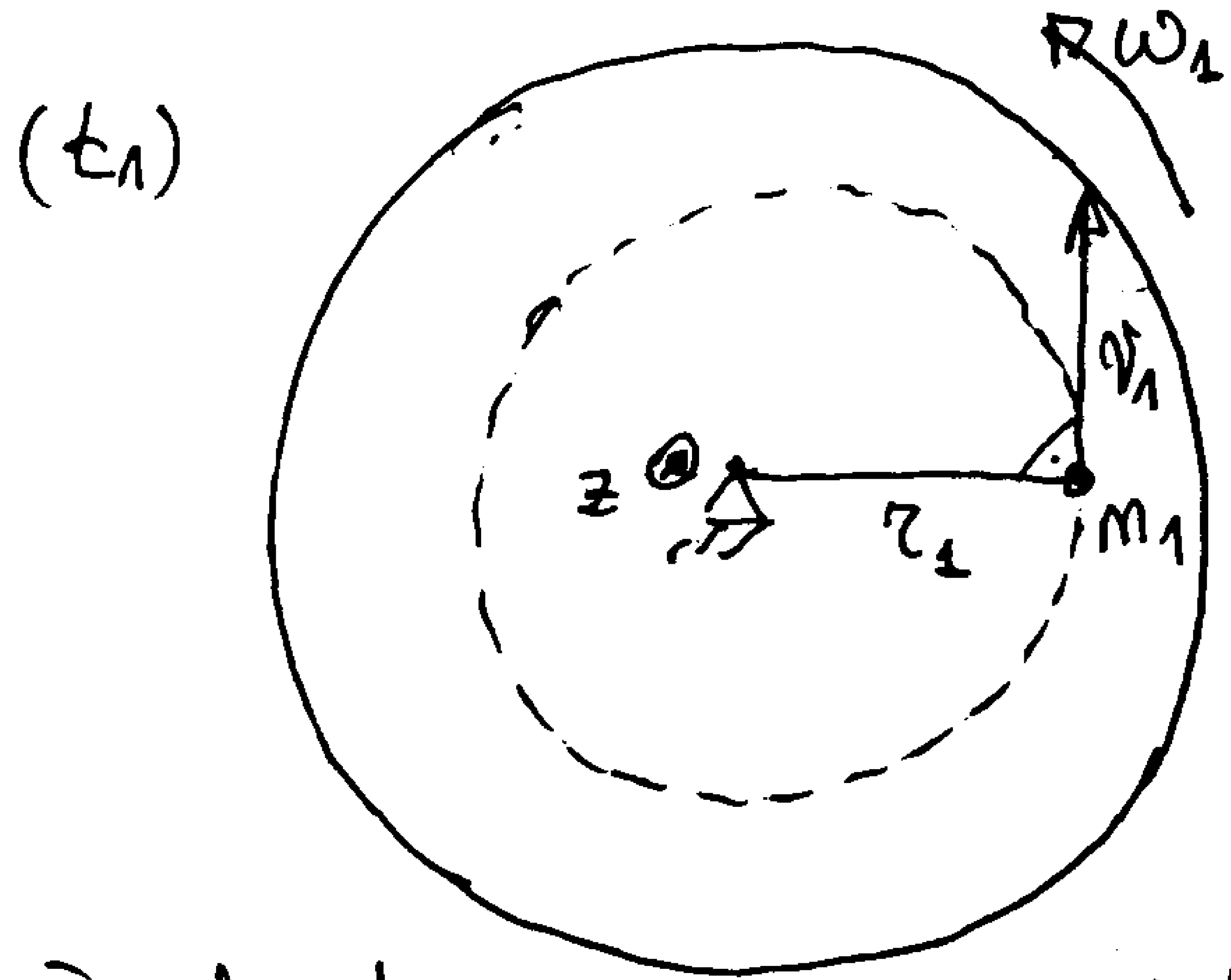
$$\frac{dL_z}{dt} = M_z^{m_1\vec g} + M_z^{m_0\vec g} + M_z^{\vec R_A} + M_z^{\vec R_B} \equiv 0 \Rightarrow L_z = const$$

$$L_{z0} = L_{z1}$$

$$L_{z0} = L_{z0}^{(m_0)} + L_{z0}^{(m_1)} = J_z\omega_0 + \overbrace{M_z^{m_1\vec v_1}}^{= m_1 v_1 r_1}, \quad J_z = \frac{m_0 r^2}{2}$$

$$L_{z0} = \left(\frac{m_0 r^2}{2} + m_1 r_1^2\right)\omega_0$$

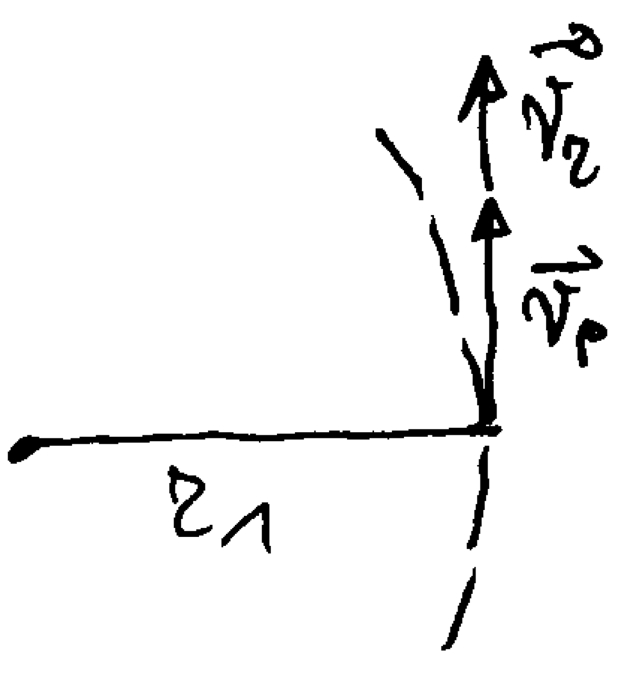
(t_1)



$$L_{z1} = L_{z1}^{(m_0)} + L_{z1}^{(m_1)} = J_z\omega_1 + M_z^{m_1\vec v_1} = J_z\omega_1 + m_1 \overbrace{v_1}^{r_1\omega_1 + v_r} r_1$$

$$L_{z1} = \left(\frac{m_0 r^2}{2} + m_1 r_1^2\right)\omega_1 + m_1 r_1 v_r$$

čovjek se kreće po kružnici relativnom brzinom v_r: $\vec v_1 = \vec v_p + \vec v_r$



$v_1 = v_p + v_r$, $v_p = r_1\omega_1$

$$\boxed{v_1 = r_1\omega_1 + v_r}$$

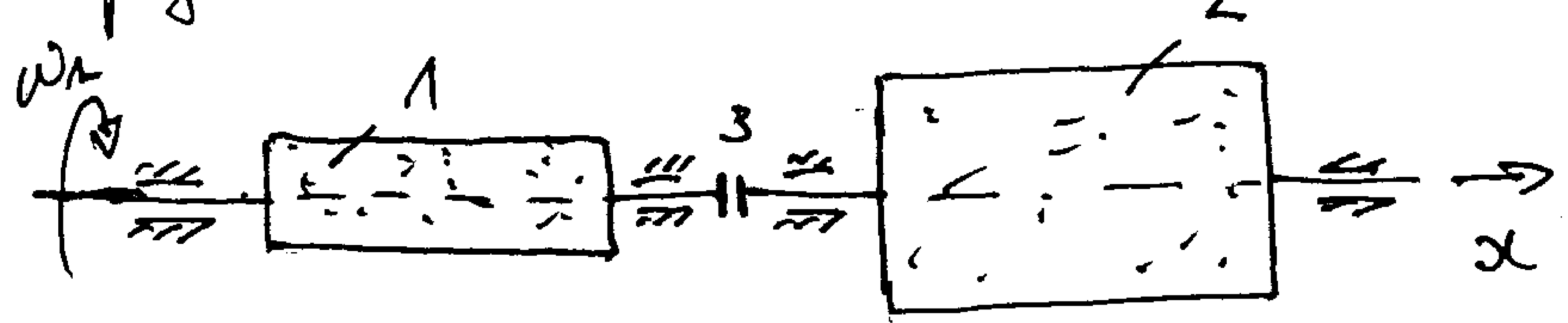
$$L_{z1} = L_{z0} \Rightarrow \omega_1 = \omega_0 - \frac{2m_1 r_1 v_r}{m_0 r^2 + 2m_1 r_1^2}$$

za brojne podatke:

$$\omega_0 = 10\cdot\frac{2\pi}{60}\ \frac{rad}{s} = 1,047\ \frac{rad}{s}$$

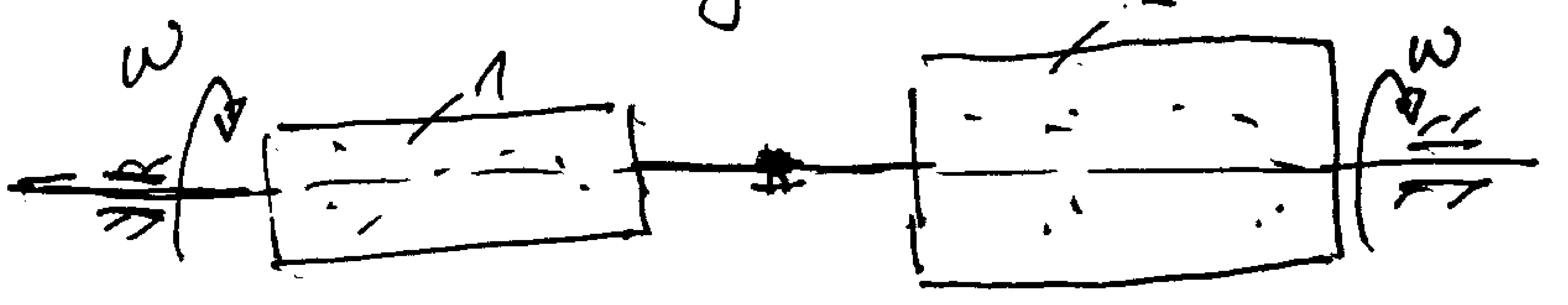
$$\omega_1 = 0,67\ \frac{rad}{s} = 0,67\cdot\frac{60}{2\pi}\ \frac{ob}{min} = \boxed{6,4\ \frac{ob}{min}}$$

③ Vratilo 1 čiji je moment inercije za obrtnu osu $J_x^{(1)} = 1\,kgm^2$ obrće se konstantnom ugaonom brzinom $\omega_1 = 40\,rad/s$, a vratilo 2 miruje. Naći ugaonu brzinu vratila poslije uključenja spojnice 3, ako je moment inercije vratila 2 za obrtnu osu $J_x^{(2)} = 4\,kgm^2$. Otpore obrtanju i masu spojnice zanemariti.



$$\sum M_x^{\vec{F}_i^s} = 0 \rightarrow L_x = const$$

prije uključenja spojnice ($\omega_2 = 0$): $L_{x0} = J_x^{(1)} \omega_1$

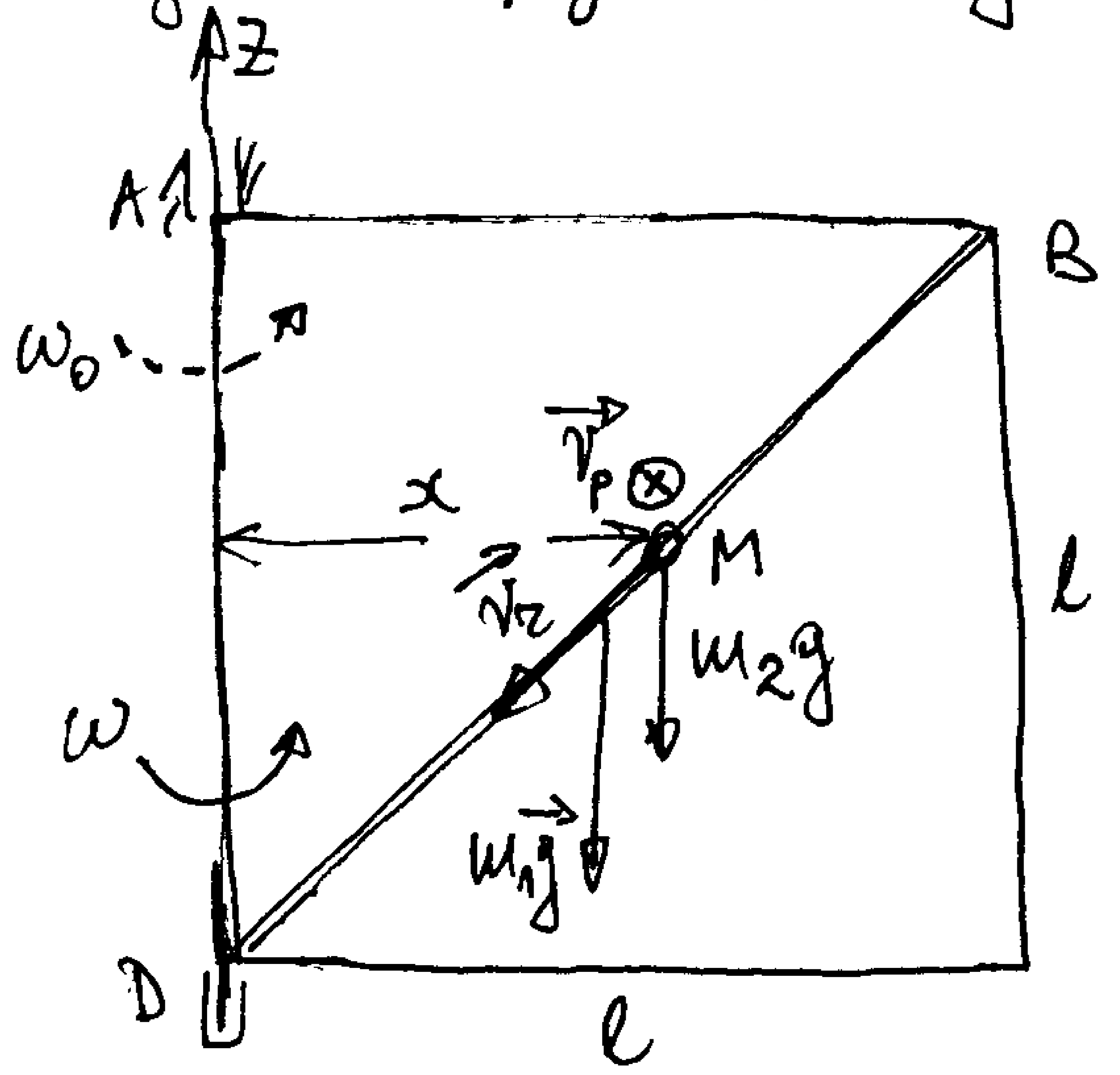


$$L_{x1} = (J_x^{(1)} + J_x^{(2)})\omega$$

nakon uključenja spojnice oba vratila se obrću kao jedno kruto tijelo momenta inercije za obrtnu osu $J_x^{(1)} + J_x^{(2)}$ ~~i[illegible]~~ ugaonom brzinom ω

$$L_{x0} = L_{x1} \Rightarrow \omega = \frac{J_x^{(1)}}{J_x^{(1)} + J_x^{(2)}}\omega_1 = 8\,\frac{rad}{s}$$

④ Kvadratna homogena ploča mase $m_1 = 3m$ i ivice l može se obrtati oko vertikalne ose AD. U ploči je urezan po dijagonali BD žijeb u kome se nalazi kuglica mase $m_2 = m$. U nekom trenutku, kada se kuglica nalazila u tački B, ploči se saopšti ugaona brzina ω_0. Kolika će biti ugaona brzina ploče kada kuglica dospije u položaj D. Uzeti da je moment inercije ploče za obrtnu osu $J_z^{(1)} = \frac{ml^2}{3}$



$$\frac{dL_z}{dt} = 0 \rightarrow L_z = const$$

Nađimo L_z u proizvoljnom trenutku tokom kretanja kuglice kroz žijeb kada je ugaona brzina ploče ω

$$L_z = L_z^{(1)} + L_z^{(2)}, \quad L_z^{(1)} = J_z^{(1)}\omega = \frac{m_1 l^2}{3}\omega$$

$$L_z^{(2)} = M_z^{m_2\vec{v}_M}, \quad \vec{v}_M = \vec{v}_p + \vec{v}_r, \quad v_p = x\omega$$

$$M_z^{m_2\vec{v}_M} = \underbrace{M_z^{m_2\vec{v}_p}}_{= x m_2 v_p = m_2 x^2 \omega} + \cancel{M_z^{m_2\vec{v}_r}} = 0$$

$$\Rightarrow L_z = \left(\frac{m_1 l^2}{3} + m_2 x^2\right)\omega = m(l^2 + x^2)\omega$$

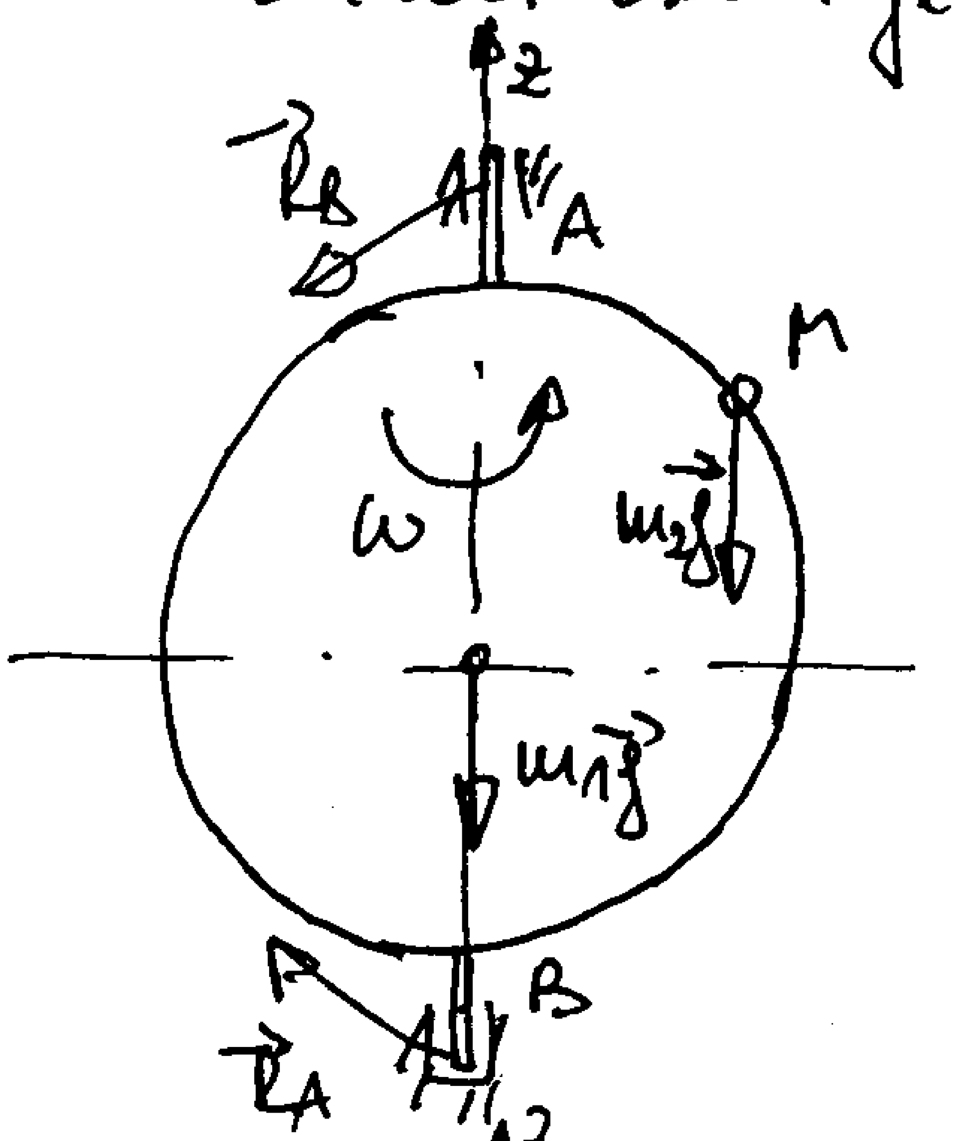
Kada je kuglica u položaju B ($x = l$, $\omega = \omega_0$): $L_{z0} = 2ml^2\omega_0$

Kada je kuglica u položaju D ($x = 0$, $\omega = \omega_1$): $L_{z1} = ml^2\omega_1$

$$L_{z0} = L_{z1}$$

$$\Rightarrow \boxed{\omega_1 = 2\omega_0}$$

5. Homogeni disk mase m_1 i poluprečnika r obrće se oko vertikalne ose AB ugaonom brzinom ω_0. Iz tačke A po obodu diska počinje kretanje tačka M mase m_2. Odrediti ugaonu brzinu diska u trenutku kada je tačka M na najvećem udaljenju od ose obrtanja.

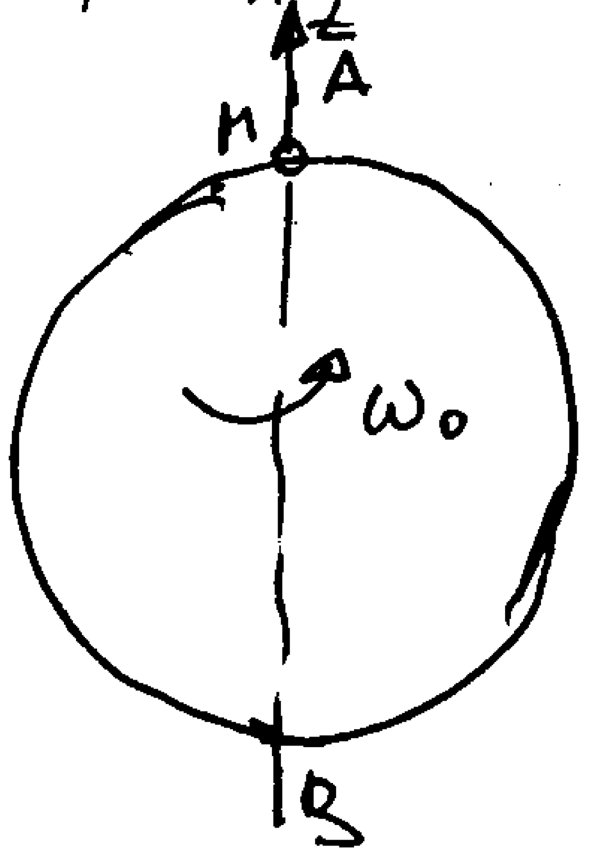


$$\sum M_z^{\vec F_i^s} \equiv 0 \Rightarrow L_z = const$$

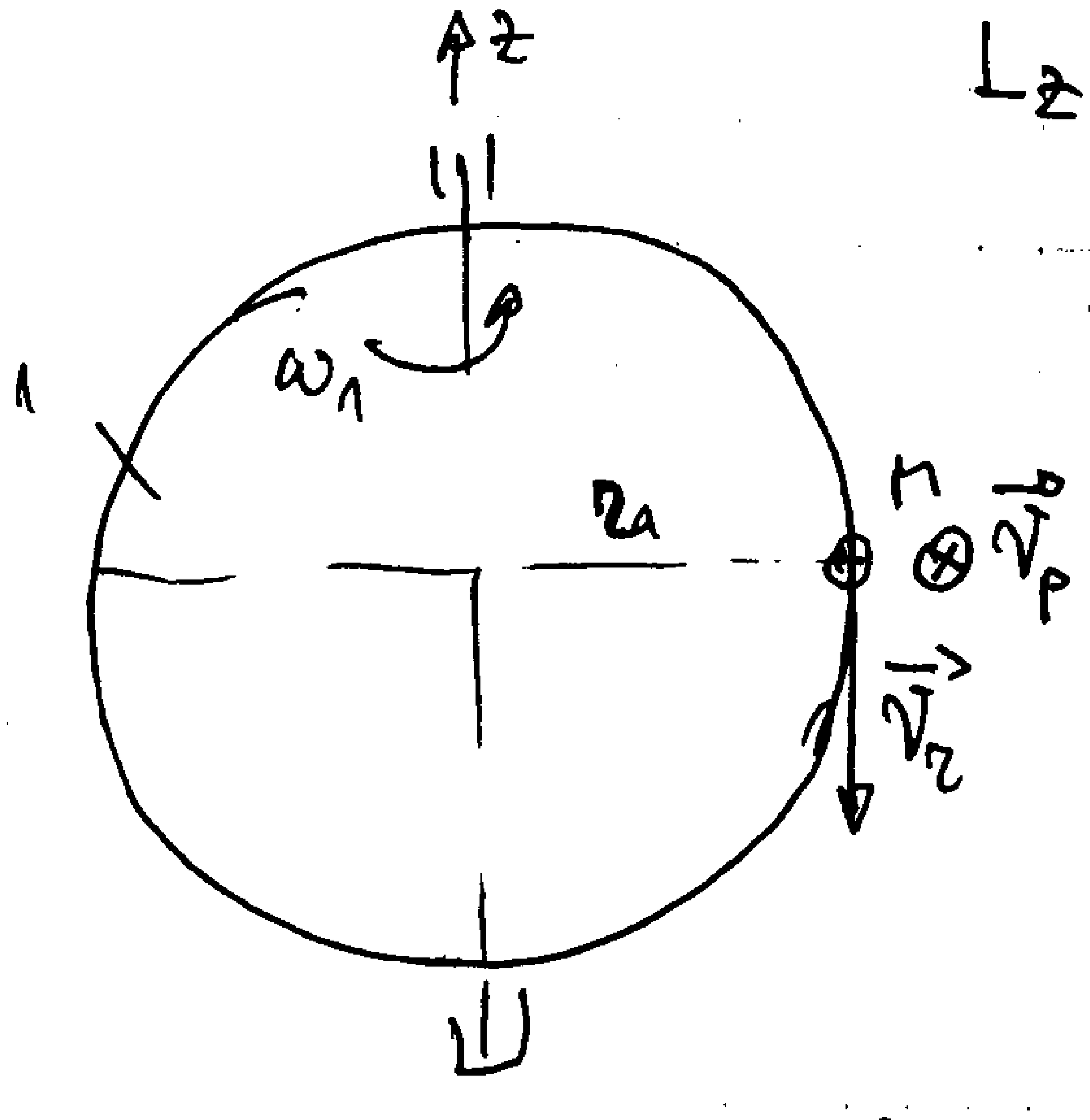
$$L_{z0} = L_{z0}^{(1)} + \cancel{L_{z0}^{(2)}}$$ 0 jer je tačka M na obrtnoj osi

$$L_{z0} = J_z^{(1)}\omega_0 , \quad J_z^{(1)} = \frac{m_1 r^2}{4}$$ - moment inercije homogenog kružnog diska za centralnu osu u ravni diska (v. predavanja)

(t_0)



(t_1)



$$L_{z1} = L_{z1}^{(1)} + L_{z1}^{(2)} , \quad L_{z1}^{(1)} = J_z^{(1)}\omega_1$$

$$L_{z1}^{(2)} = M_z^{m_2\vec v_M} , \quad \vec v_M = \vec v_p + \vec v_r , \quad v_p = r\omega_1$$

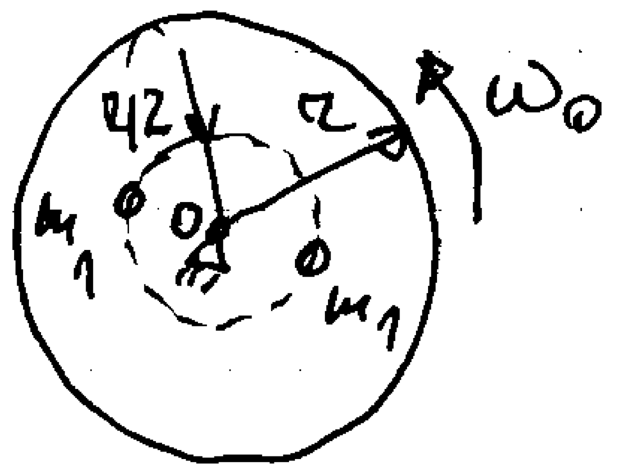
$$= \underbrace{M_z^{m_2\vec v_p}}_{= r m_2 v_p} + \underbrace{\cancel{M_z^{m_2\vec v_r}}}_{0}$$

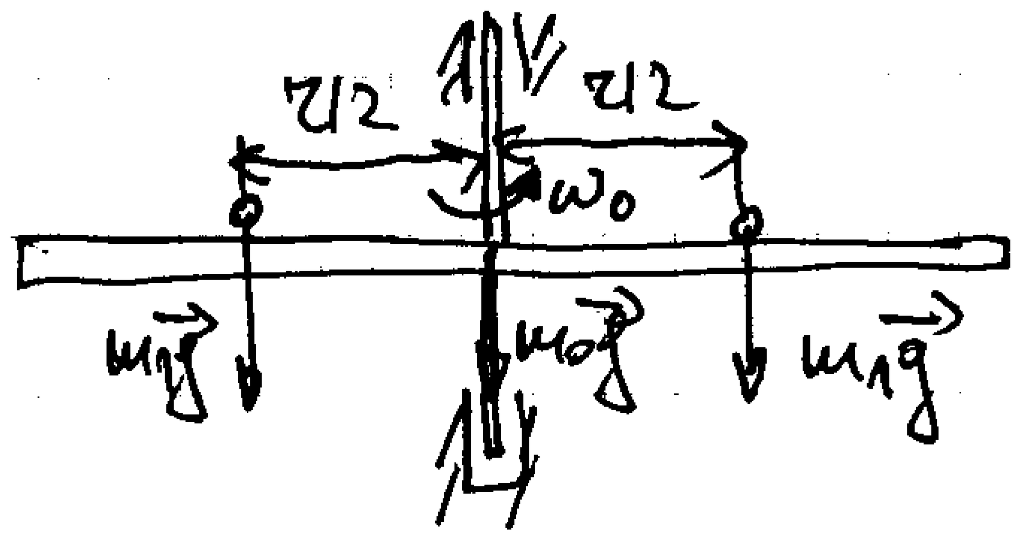
$$r m_2 v_p = m_2 r^2 \omega_1$$

$$L_{z0} = L_{z1} \Rightarrow \left(\frac{m_1 r^2}{4} + m_2 r^2\right)\omega_1 = \frac{m_1 r^2}{4}\omega_0$$

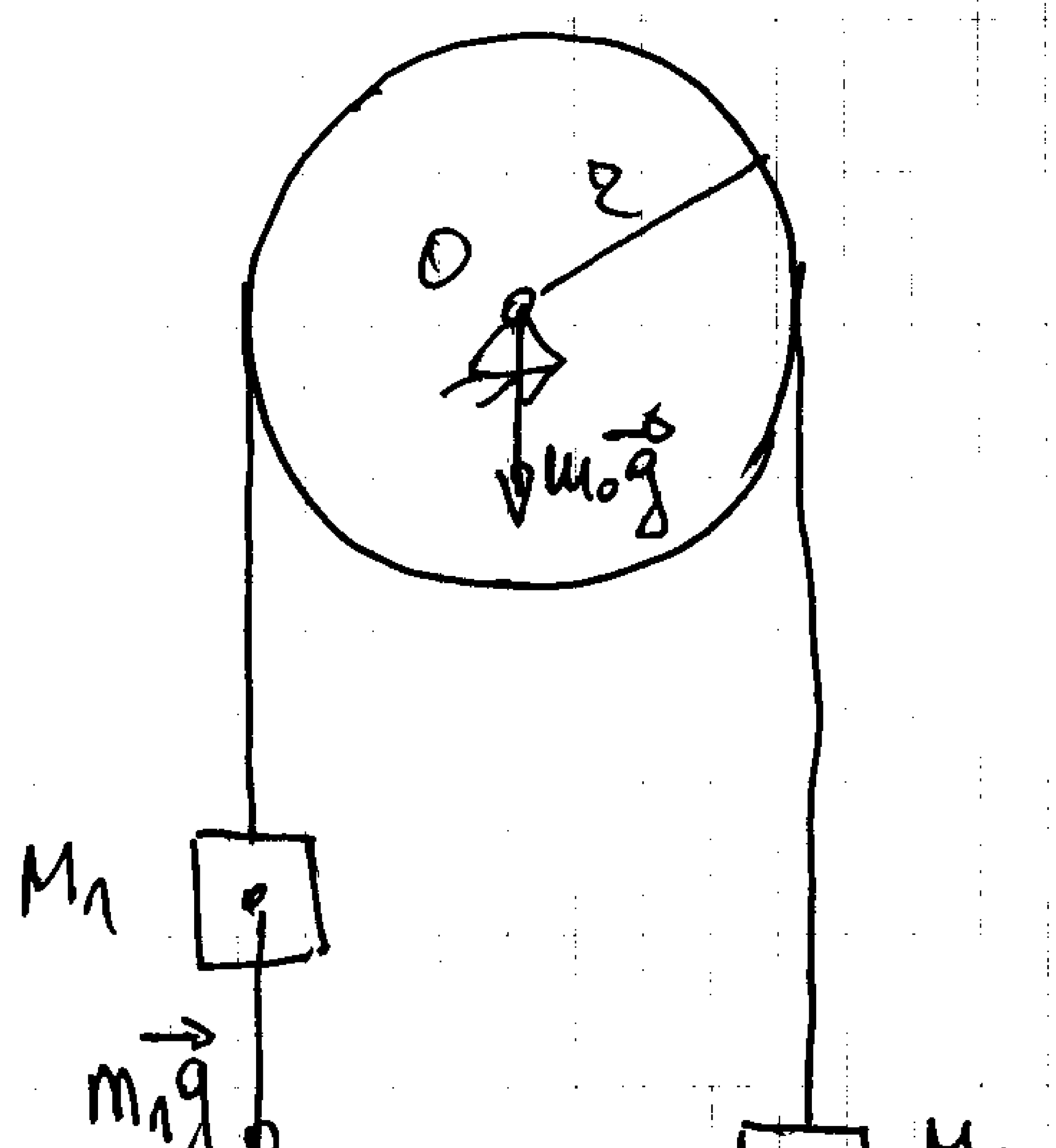
$$\boxed{\omega_1 = \frac{m_1}{m_1 + 4m_2}\omega_0}$$

6. Kružna horizontalna platforma, mase m_0 i poluprečnika r, obrće se oko vertikalne ~~ose~~ centralne ose konstantnom ugaonom brzinom ω_0. Na platformi, na rastojanju $r/2$ od obrtne ose, stoje dva čovjeka jednakih masa m_1. Odrediti ugaonu brzinu kojom će se obrtati platforma kada ljudi počnu da se kreću relativnom brzinom v_r po kružnici u smjeru suprotnom od smjera obrtanja platforme. Ljude smatrati materijalnim tačkama, a platformu homogenim kružnim diskom.





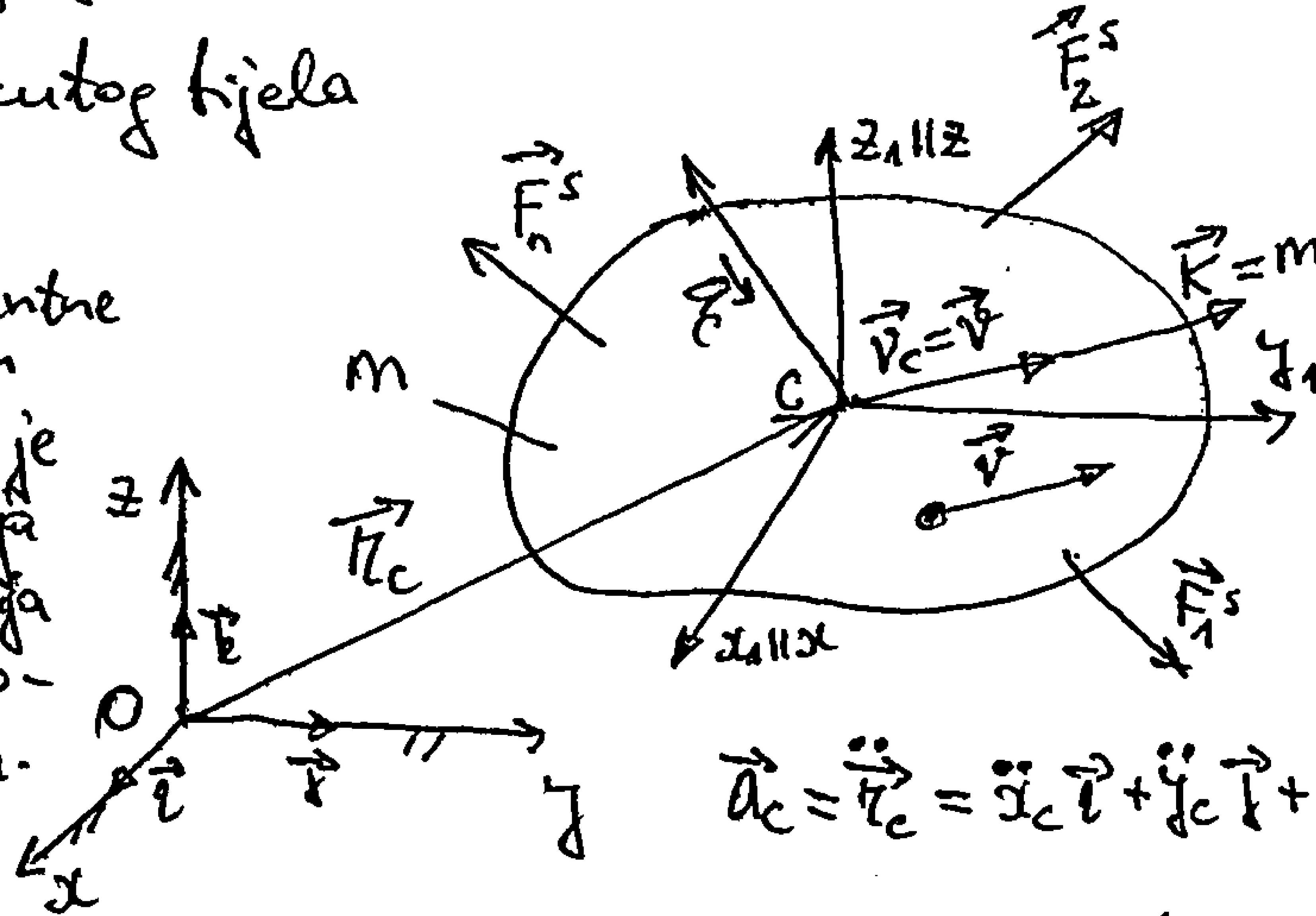
7. Tegovi M_1 i M_2, masa m_1 i m_2, vezani su za krajeve nerastegljivog užeta koje je prebačeno preko kotura (homogeni kružni disk mase m_0 i poluprečnika r) koji se može obrtati oko nepokretne horizontalne ose O. Odrediti ugaono ubrzanje kotura.



7. Dinamika krutog tijela

Kruto tijelo predstavlja specijalan slučaj sistema materijalnih tačaka čija su međusobna rastojanja nepromjenljiva tokom kretanja. Polazeći od zakona o kretanju centra inercije i zakona o promjeni kinetičkog momenta, može se doći do dinamičkih jednačina za pojedine vrste kretanja krutog tijela, na osnovu kojih se, analogno dinamici tačke, mogu rešavati dva osnovna zadatka dinamike (prvi zadatak – određivanje sila na osnovu zadanog zakona kretanja tijela; drugi zadatak – određivanje kretanja, a u slučaju neslobodnog tijela i reakcija veza, pri zadanim silama).

7.1 Translatorno kretanje krutog tijela



Pri translatornom kretanju tijela trajektorije svih tačaka su kongruentne (podudarne) krive i sve tačke imaju jednake brzine i ubrzanja. Zato je za poznavanje translatornog kretanja tijela dovoljno znati zakon kretanja jedne tačke tijela, a za tu tačku pogodno je uzeti centar inercije C tijela.

$$\vec{a}_C = \ddot{\vec{r}}_C = \ddot{x}_C\vec{i} + \ddot{y}_C\vec{j} + \ddot{z}_C\vec{k}$$

U odnosu na translatorno pokretni koordinatni sistem $Cx_1y_1z_1$, vezan za centar inercije tijela, brzine tačaka tijela su jednake nuli pa je

$$\vec{L}_C = \vec{L}_{Cr} = 0$$

Ako primijenimo zakon o kretanju centra inercije sistema (5.4.1) i zakon o promjeni momenta količine kretanja sistema za centar inercije (6.3.2), imaćemo

$$m\ddot{\vec{r}}_C = \sum \vec{F}_i^s \qquad (1)$$

$$\frac{d\vec{L}_C}{dt} = 0 = \sum \vec{M}_C^{\vec{F}_i^s} \qquad (2)$$

Poslednja vektorska jednačina pokazuje da je pri translatornom kretanju tijela glavni moment sila koje djeluju na tijelo, za centar inercije, jednak nuli. Tijelo će izvoditi translatorno kretanje ako sile koje na njega djeluju zadovoljavaju uslov (2) i ako je početna ugaona brzina tijela jednaka nuli.

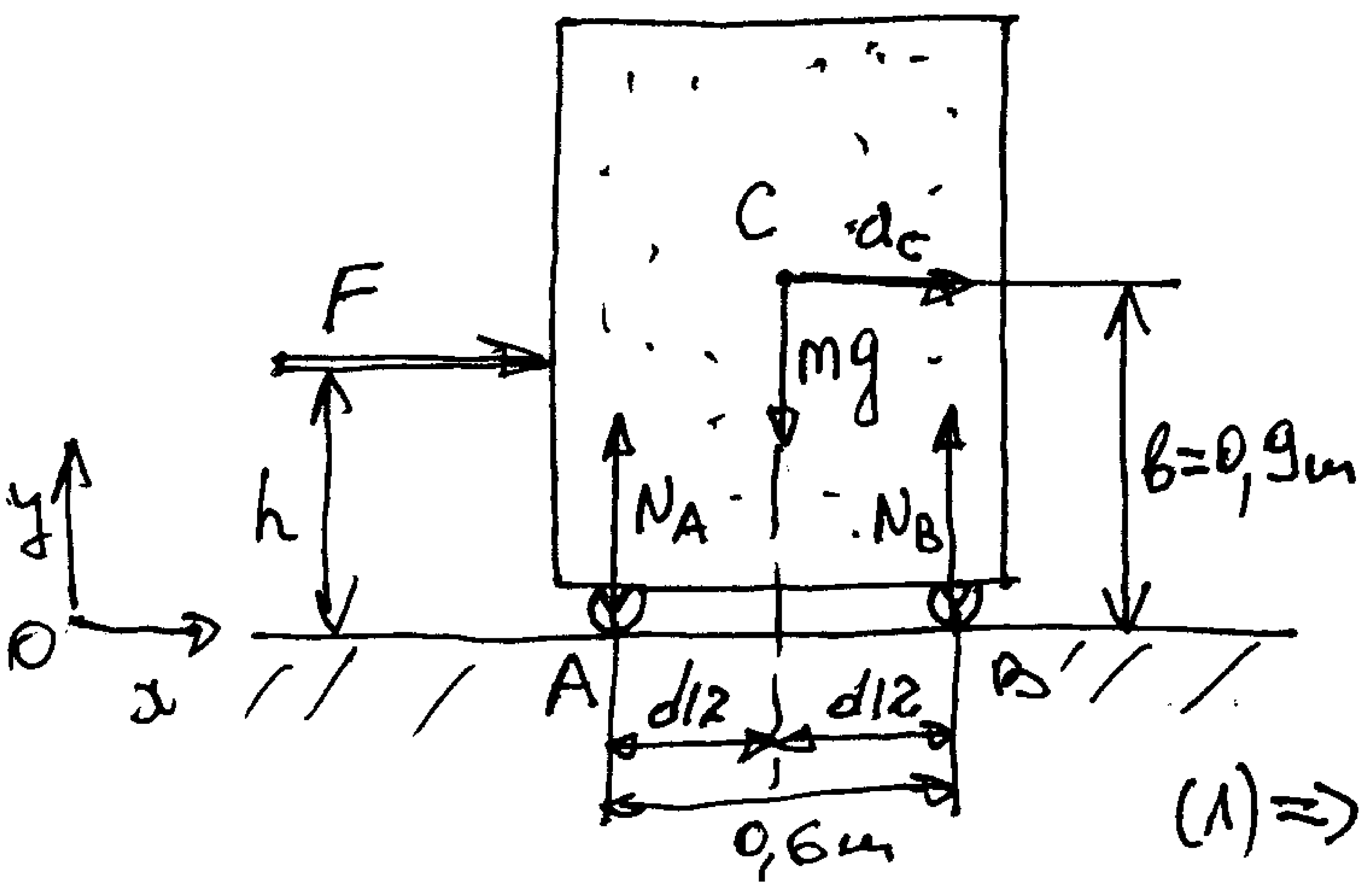
Vektorskoj jednačini (1), koja je identična sa osnovnom jednačinom dinamike tačke, odgovara sledeći sistem skalarnih jednačina

$$m\ddot{x}_C = \sum F_{ix}^s, \quad m\ddot{y}_C = \sum F_{iy}^s, \quad m\ddot{z}_C = \sum F_{iz}^s \qquad (1')$$

koje predstavljaju diferencijalne jednačine translatornog kretanja krutog tijela.

Translatorno kretanje k.t. (zadaci)

1. Ormar mase $m = 20\,kg$, montiran na točkiće koji mu omogućavaju da se kreće bez trenja po horizontalnom podu, gura se horizontalnom silom $F = 100\,N$ (v. sl.). Odrediti: a) ubrzanje ormara; b) Uslov koji treba da zadovoljava rastojanje h da se ormar ne prevrne. Dimenzije točkića zanemariti.



$$m\vec{a}_C = \vec{F} + m\vec{g} + \vec{N}_A + \vec{N}_B$$

$$x:\ m a_C = F \qquad (1)$$

$$y:\ m\cdot 0 = -mg + N_A + N_B \qquad (2)$$

Sanduk se kreće translatorno, pa mora biti zadovoljen uslov:

$$\sum M_C^{\vec{F}_i^s} = 0 \Rightarrow N_A\frac{d}{2} - N_B\frac{d}{2} - F(b-h) = 0 \qquad (3)$$

$$(1) \Rightarrow a_C = \frac{F}{m} = \boxed{5\,\frac{m}{s^2}}$$

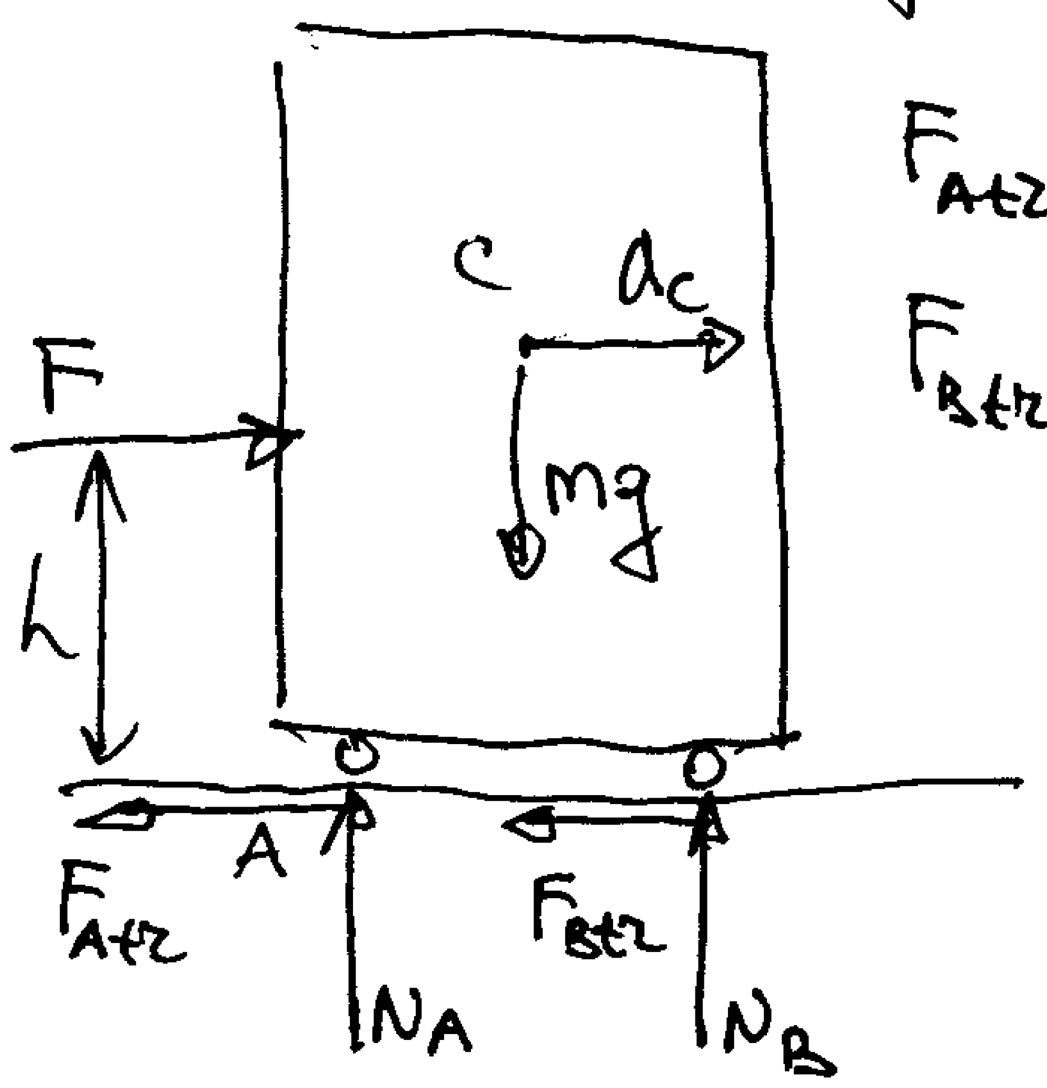
$$(2),(3) \Rightarrow N_A = \frac{mg}{2} + \frac{b-h}{d}F,\quad N_B = \frac{mg}{2} - \frac{b-h}{d}F$$

Uslovi neprevrtanja: $N_A > 0$, $N_B > 0$

$$\Rightarrow b - \frac{d}{2}\frac{mg}{F} < h < b + \frac{d}{2}\frac{mg}{F}$$

$$\boxed{0{,}31\,m < h < 1{,}49\,m}$$

2. Riješiti prethodni zadatak pretpostavljajući da su točkići blokirani i da se klizaju po podu pri čemu je $\mu = 0{,}25$

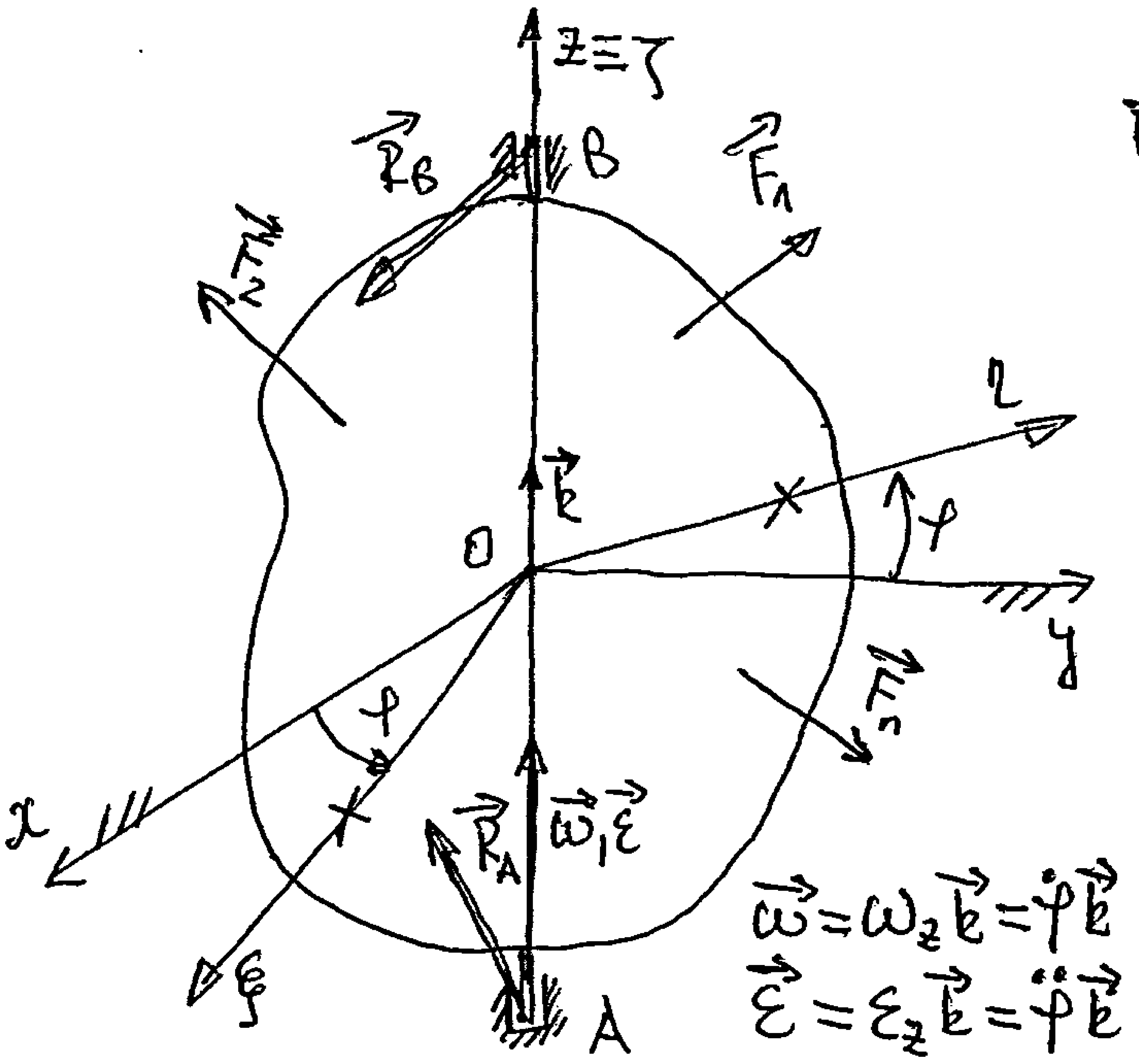


$F_{Atr} = \mu N_A$

$F_{Btr} = \mu N_B$

R: $h < 1{,}05\,m$

7.2 Diferencijalna jednačina obrtanja krutog tijela oko nepokretne ose



$\vec{\omega}=\omega_z\vec{k}=\dot{\varphi}\vec{k}$
$\vec{\varepsilon}=\varepsilon_z\vec{k}=\ddot{\varphi}\vec{k}$

Neka se tijelo pod dejstvom datog sistema sila $\vec{F}_1,\dots,\vec{F}_n$ obrće oko nepokretne ose z, pri čemu je nepokretnost ose obrtanja obezbijeđena sa dva ležišta. Položaj tijela je određen uglom φ između koordinatnih ravni xOz i ξOz (v. sl., $Oxyz$ - nepokretni koordinatni sistem; $O\xi\eta\zeta$ - pokretni koordinatni sistem čije su ose čvrsto vezane za tijelo).

Pošto je tijelo neslobodno, saglasno principu oslobađanja od veza, uticaje ležišta A i B zamjenjujemo reakcijama $\vec{R}_A$ i $\vec{R}_B$, koje zajedno sa datim silama $\vec{F}_i$ čine sistem spoljašnjih sila za posmatrano tijelo.

Ako primijenimo zakon o promjeni momenta količine kretanja za osu z, uzimajući u obzir da je $M_z^{\vec{R}_A}=0$ i $M_z^{\vec{R}_B}=0$, dobijamo

$$\frac{dL_z}{dt}=M_z^s=\sum M_z^{\vec{F}_i},$$

odnosno

$$J_z\ddot{\varphi}=\sum M_z^{\vec{F}_i}, \qquad (1)$$

jer je $L_z=J_z\omega_z=J_z\dot{\varphi}$ i J_z konstantna veličina.

Ovo je diferencijalna jednačina obrtanja krutog tijela oko nepokretne ose i glasi:
Proizvod momenta inercije tijela za nepokretnu osu i ugaonog ubrzanja jednak je zbiru momenata svih spoljašnjih sila za tu osu.

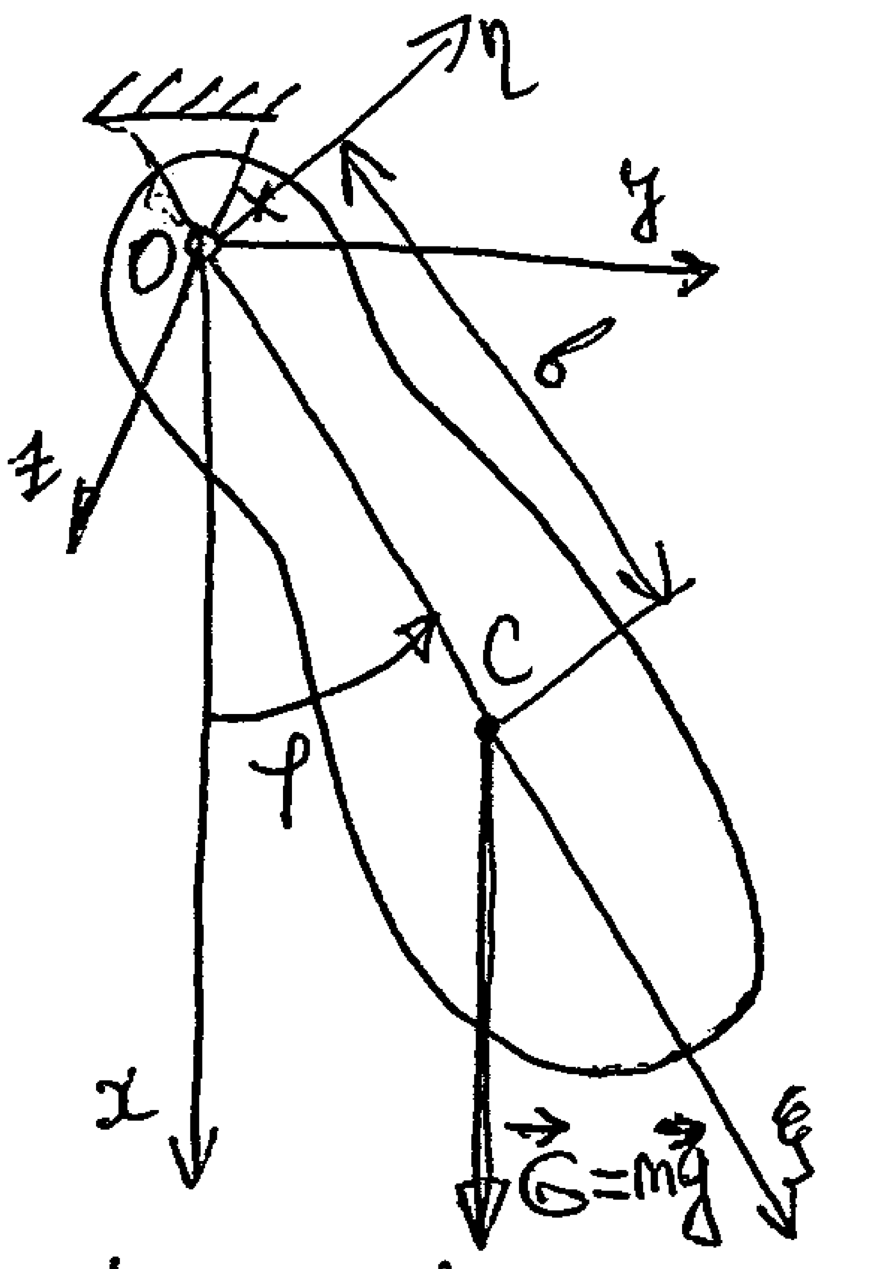
N: Obično se veličina M_z^s zove obrtni moment.

Jednačina (1) omogućuje da:

1) znajući zakon obrtanja tijela $\varphi=\varphi(t)$ i moment inercije J_z, odredimo obrtni moment M_z^s;

2) znajući obrtni moment, moment inercije i početne uslove ($\varphi(t_0)=\varphi_0$, $\dot{\varphi}(t_0)=\dot{\varphi}_0$), odredimo zakon obrtanja tijela $\varphi=\varphi(t)$.

7.2.1 Fizičko klatno



Fizičko klatno je kruto tijelo koje se obrće oko nepokretne horizontalne ose samo pod dejstvom sopstvene težine.

Diferencijalna jednačina kretanja (obrtanja) je

$$J_z\ddot{\varphi} = M_z^{\vec{G}}, \quad M_z^{\vec{G}} = -mgb\sin\varphi,$$

odnosno

$$\ddot{\varphi} + \omega_F^2\sin\varphi = 0, \qquad (1)$$

gdje je $\omega_F^2 = \dfrac{mgb}{J_z}$

Ako se zadržimo samo na malim kretanjima klatna oko ravnotežnog položaja $\varphi=0$, možemo uzeti da je $\sin\varphi \approx \varphi$ i jednačinu (1) zamijeniti prostijom linearnom diferencijalnom jednačinom

$$\ddot{\varphi} + \omega_F^2\varphi = 0, \qquad (2)$$

koja opisuje harmonijsko oscilatorno kretanje sa kružnom frekvencijom ω_F i periodom

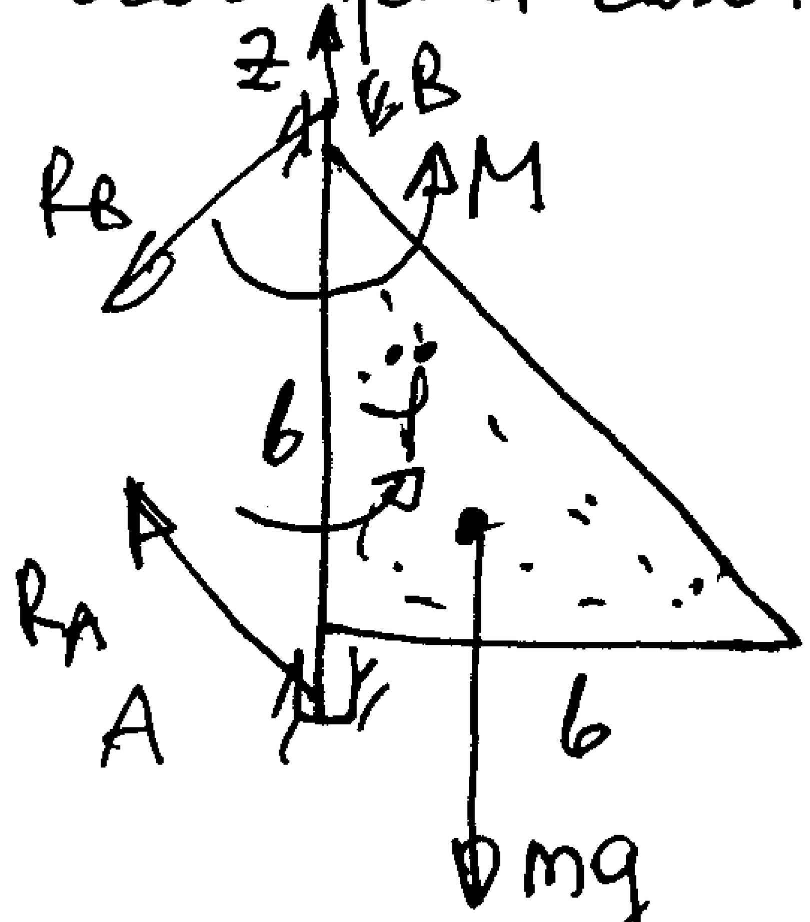
$$T_F = \frac{2\pi}{\omega_F} = 2\pi\sqrt{\frac{J_z}{mgb}} \qquad (3)$$

Na formuli (3) počiva jedan od eksperimentalnih metoda za određivanje momenata inercije tijela. Opitno tijelo postavi se tako da može da osciluje kao fizičko klatno oko ose za koju treba odrediti moment inercije. Mjereći period oscilovanja, pod uslovom da nam je poznato rastojanje b težišta od obrtne ose (ono može biti određeno, takođe, mjerenjem, npr. metodom vaganja), iz obrasca (3) dobijamo

$$J_z = \frac{mgbT_F^2}{4\pi^2}$$

· Obrtanje k.t. oko nepokretne ose (zadaci)

1. Homogena tanka ploča oblika jednakokrakog pravouglog trougla, mase m i katete dužine b, obrće se iz stanja mirovanja pod dejstvom sprega konstantnog momenta M oko vertikalne ose ~~za~~ koju je vezana svojom katetom. Zanemarujući otpor kretanju, odrediti zakon kretanja ploče. Uzeti da je moment inercije ploče za osu koja prolazi kroz njenu katetu $mb^2/6$.



Dif. jed. obrtanja krutog tijela oko nepokretne ose z:

$$J_z\ddot{\varphi}=\sum M_z^{\vec{F}_i^s} \Rightarrow J_z\ddot{\varphi}=M$$

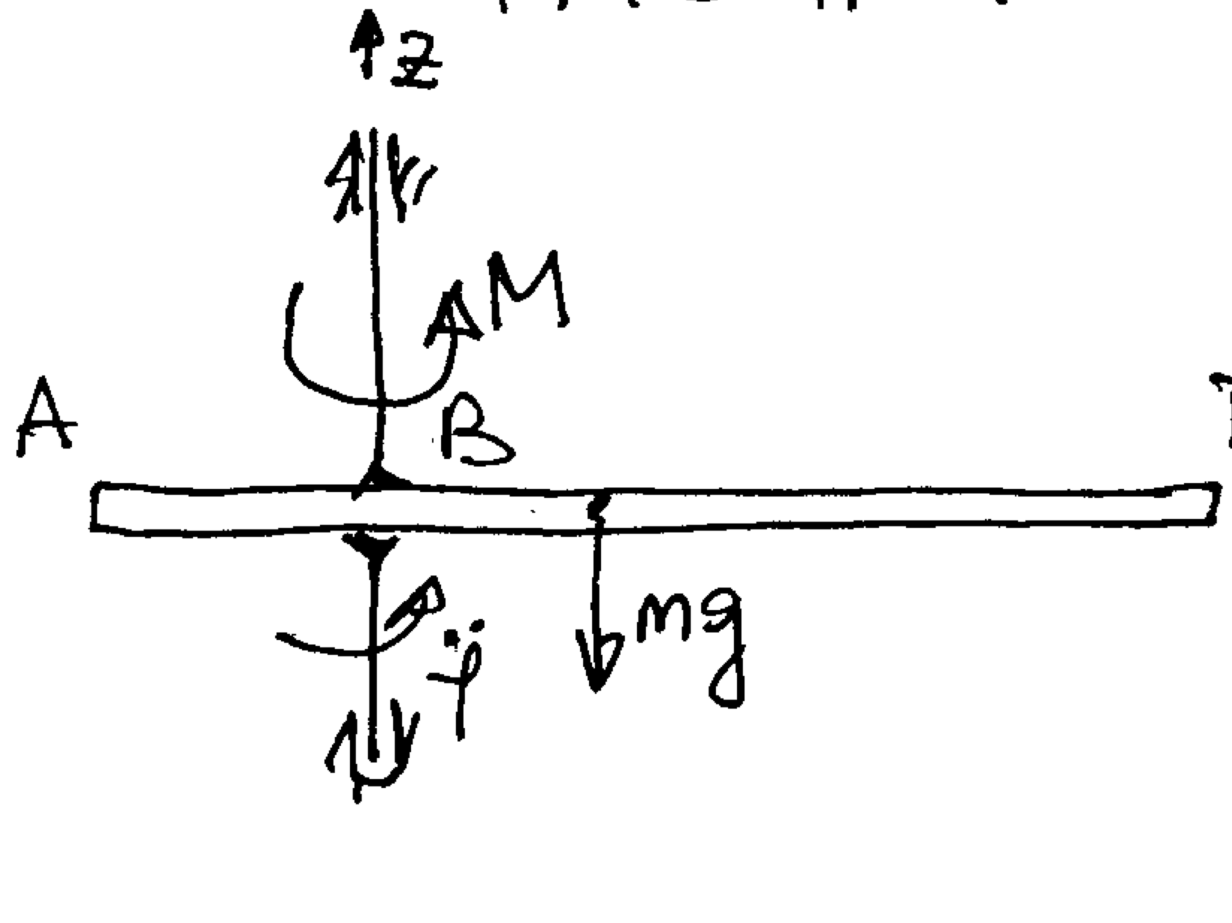
$$J_z=\frac{mb^2}{6}$$

$$\ddot{\varphi}=\frac{6M}{mb^2}=\varepsilon=\mathrm{const}$$ – jednakopromjenljivo obrtanje

$$\varphi=\varphi_0+\dot{\varphi}_0 t+\varepsilon\frac{t^2}{2}, \quad \varphi_0=0,\ \dot{\varphi}_0=0$$

$$\Rightarrow \boxed{\varphi=\frac{3M}{mb^2}t^2}$$ – zakon (konačne jednačine) obrtanja

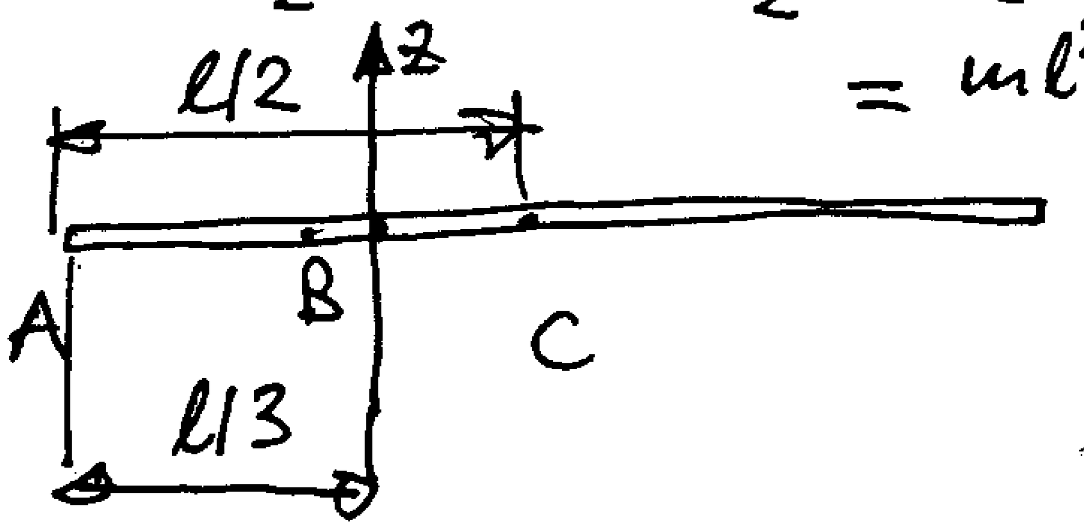
2. Homogeni štap AD, mase $m=1\,kg$ i dužine $l=2\,m$ kruto je vezan pod pravim uglom za vertikalnu osovinu tako da je: $\overline{AB}=l/3$. Zanemarujući trenje, odrediti ugaono ubrzanje štapa pod dejstvom sprega momenta $M=4\,Nm$.



$$J_z\ddot{\varphi}=M$$

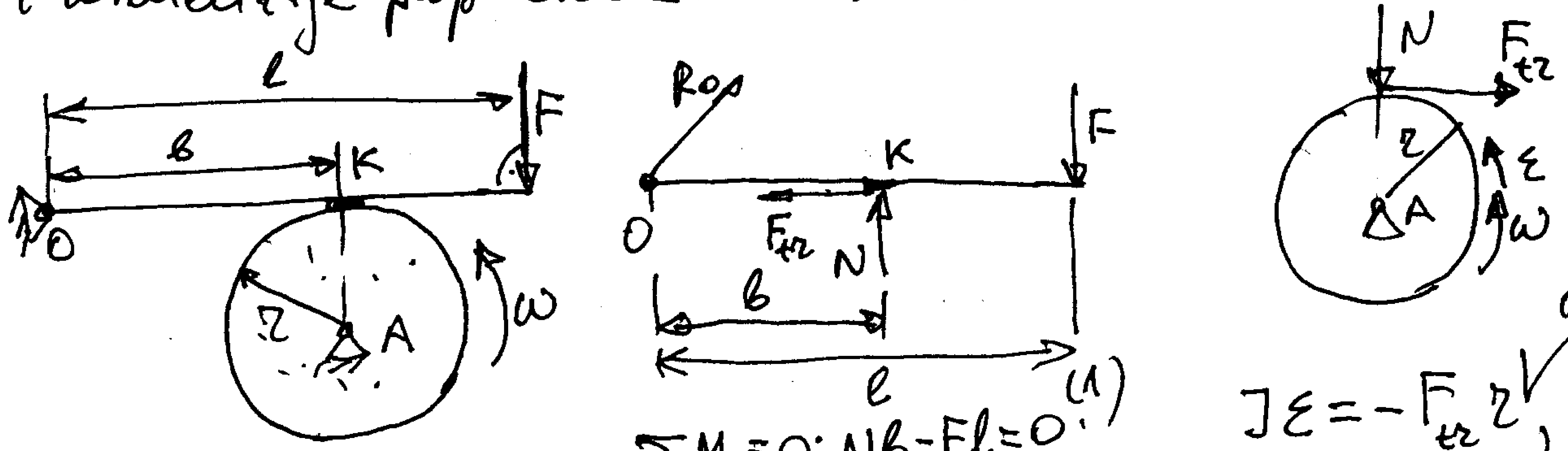
$$J_z=? \quad J_z=J_{Cz}+m\overline{BC}^2$$

$$=ml^2/12+m\left(\frac{l}{2}-\frac{l}{3}\right)^2=\frac{ml^2}{9}$$



$$\Rightarrow \varepsilon=\ddot{\varphi}=\frac{9M}{ml^2}=\boxed{9\,\frac{rad}{s^2}}$$

3. Točak A koji se obrće konstantnom ugaonom brzinom ω_0 počinje da se koči pomoću ručne kočnice. Kolikom silom F treba djelovati na ručicu da bi se točak zaustavio za vrijeme T, ako je koeficijent trenja između točka i papučice μ, dužina ručice l, $\overline{OK} = b$, moment inercije točka za obrtnu osu J a poluprečnik r. Masu ručice i dimenzije papučice zanemariti.



$$\Sigma M_O = 0 : Nb - Fl = 0 \quad (1)$$

$$J\varepsilon = -F_{tr}\, r \quad (2), \qquad F_{tr} = \mu N \quad (3)$$

$$(1) \Rightarrow N = F\frac{l}{b}, \quad (2) \Rightarrow \varepsilon = -\mu\frac{Flr}{bJ} = const$$

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} \rightarrow \omega(t) = \omega_0 + \varepsilon t,$$

uslov zadatka: $\omega(t=T) = 0 \Rightarrow 0 = \omega_0 - \frac{\mu F l r}{bJ} T = 0$

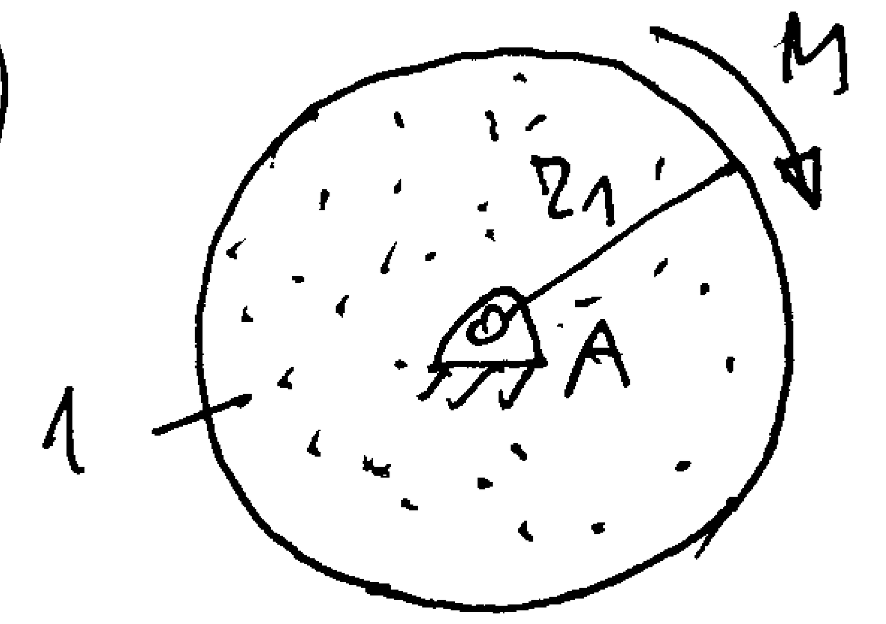
$$\boxed{F = \frac{bJ\omega_0}{\mu T l r}}$$

4. Zupčanik 1, mase $m_1 = 10$ kg i poluprečnika $r_1 = 20$ cm, obrće se oko nepokretne horizontalne ose A pod dejstvom obrtnog momenta $M = 1$ Nm.

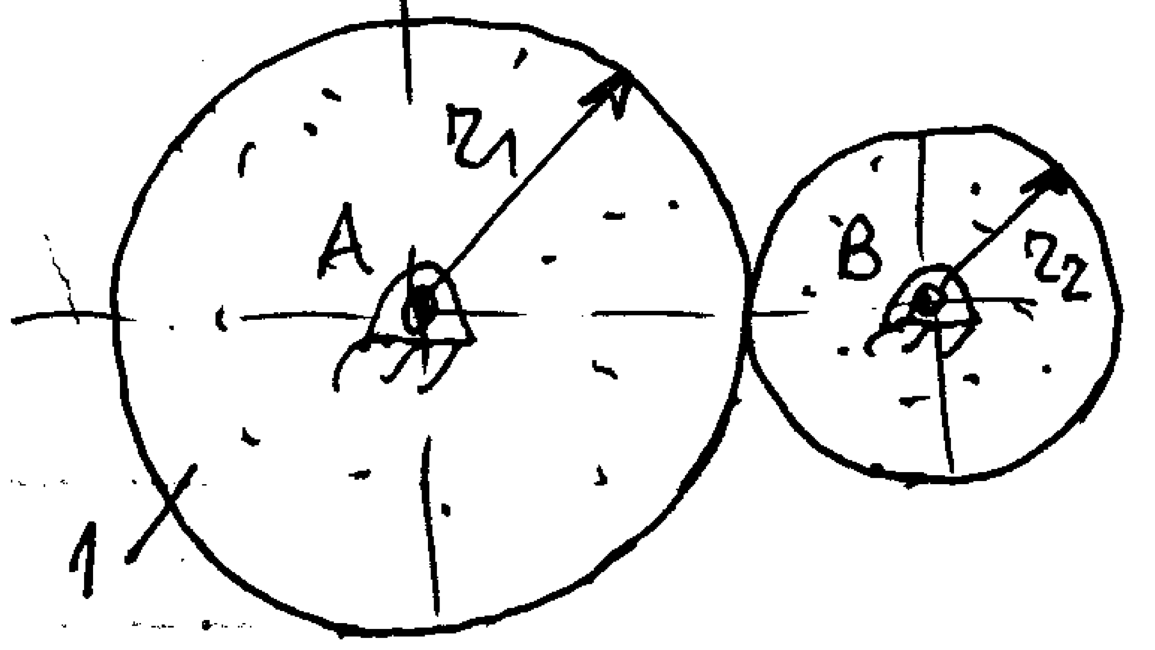
a) Odrediti ugaono ubrzanje, ugaonu brzinu i broj obrtaja zupčanika 1 nakon 3 sekunde od početka kretanja.

b) Koliko je ugaono ubrzanje zupčanika 1 i tangencijalna komponenta sile u tački dodira, nakon što se zupčanik 2, mase $m_2 = 5$ kg i poluprečnika $r_2 = 10$ cm, spregne sa zupčanikom 1. Obrtanju zupčanika 2 se suprostavlja konstantni otporni moment $M_{ot} = 0,2$ Nm. Zupčanike smatrati homogenim kružnim diskom.

a)

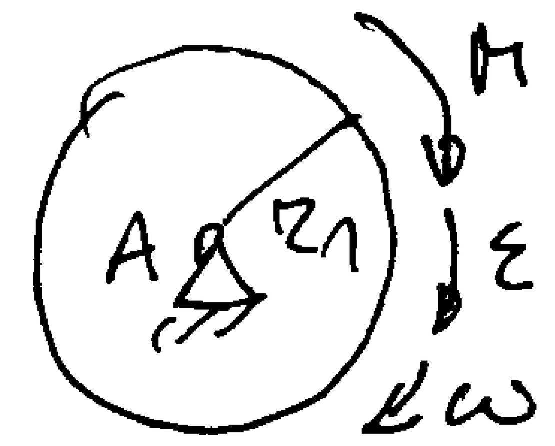


b)



---

a)



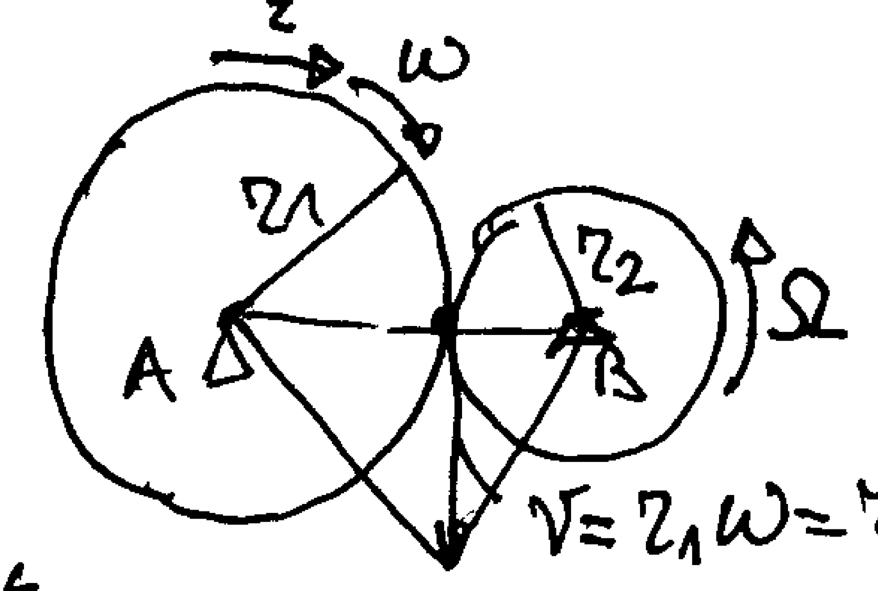
$J_A \varepsilon = M \Rightarrow \varepsilon = \frac{2M}{m_1 r_1^2} = \frac{2 \cdot 1}{10 \cdot 0,2^2} = \boxed{5\, s^{-2}}$

$J_A = \frac{m_1 r_1^2}{2}$

$\varepsilon = const \Rightarrow \omega = \cancelto{0}{\omega_0} + \varepsilon t, \quad \varphi = \cancelto{0}{\varphi_0} + \cancelto{0}{\omega_0} t + \varepsilon \frac{t^2}{2}$

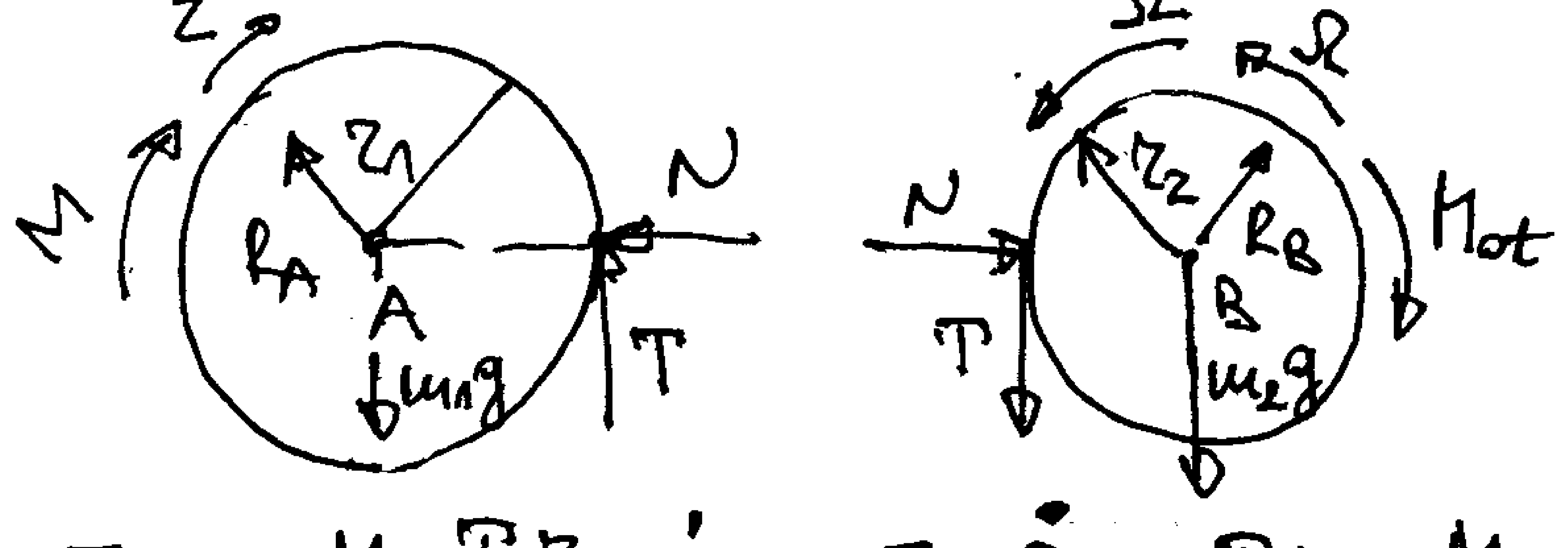
za $t = t_1 = 3$ s, $\omega_1 = \boxed{15\, s^{-1}}$, $\varphi_1 = 5 \cdot \frac{3^2}{2} = 22,5$ rad, $n_1 = \frac{\varphi_1}{2\pi} = \boxed{3,58 \text{ obrta}}$

b)



Kinematičke veze: $r_2 \Omega = r_1 \omega \to \Omega = \frac{r_1}{r_2}\omega \to \dot{\Omega} = \frac{r_1}{r_2}\dot{\omega}$

$\dot{\Omega} = \frac{r_1}{r_2}\varepsilon \quad (*)$



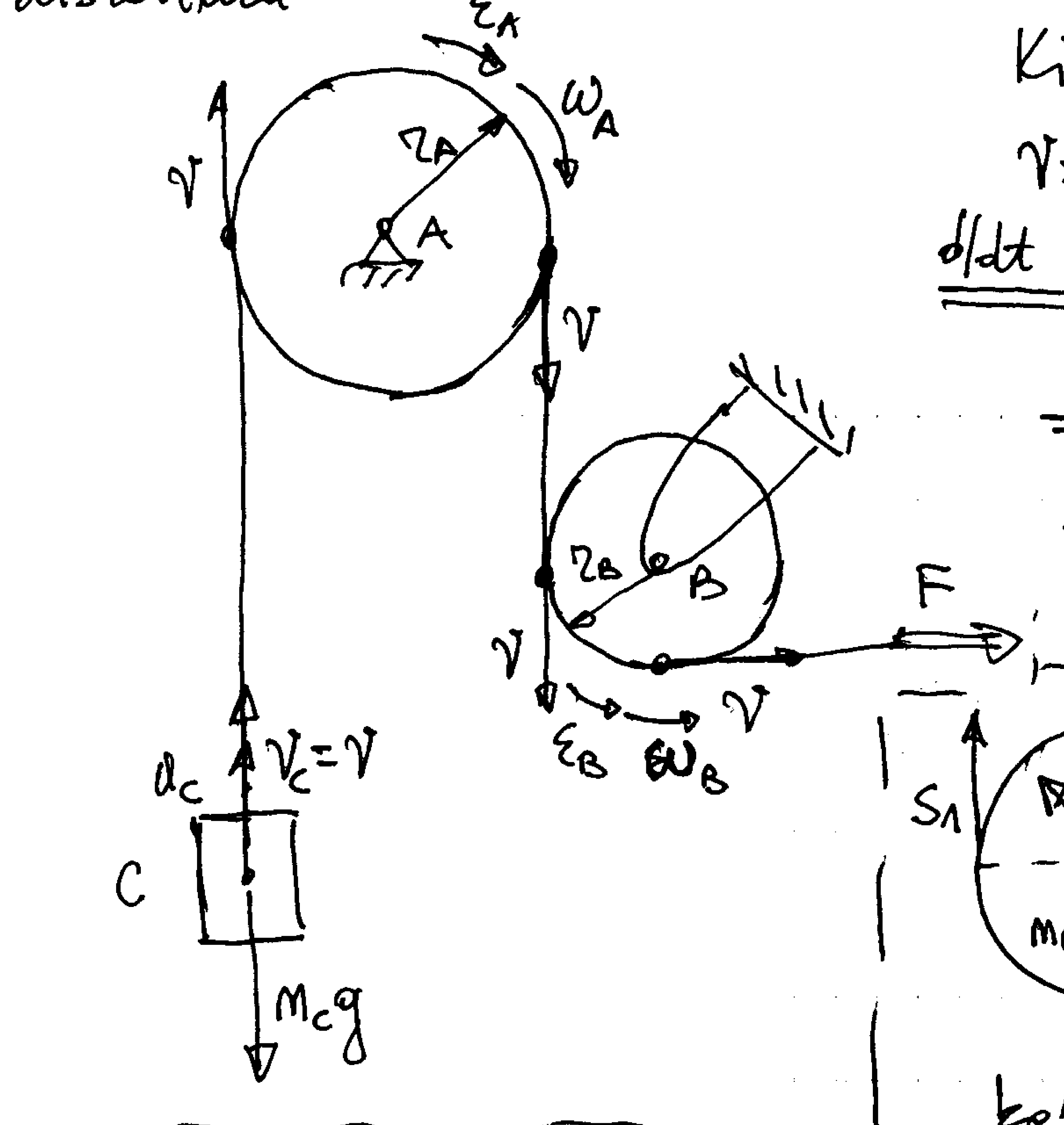
$J_A \varepsilon = M - T r_1, \quad J_B \dot{\Omega} = T r_2 - M_{ot}, \quad J_B = \frac{m_2 r_2^2}{2}$

$\Downarrow$

$\frac{m_1 r_1^2}{2}\varepsilon = M - T r_1; \quad \frac{m_2 r_2^2}{2} \cdot \frac{r_1}{r_2}\varepsilon = T r_2 - M_{ot} \Rightarrow \varepsilon = \frac{2}{(m_1 + m_2) r_1}\left(\frac{M}{r_1} - \frac{M_{ot}}{r_2}\right)$

$\varepsilon = 2\, s^{-2}$

5. Teret C, mase $m_C = 20\,kg$, podiže se pomoću nerastegljivog užeta prebačenog preko koturova A i B, masa $m_A = 10\,kg$ i $m_B = 5\,kg$ i poluprečnika $r_A = 30\,cm$ i $r_B = 20\,cm$, a čiji se slobodni kraj vuče u horizontalnom pravcu silom $F = 310\,N$. Zanemarujući masu užeta i smatrajući da nema proklizavanja između užeta i koturova, odrediti: a) ugaono ubrzanje kotura B; b) ubrzanje tereta C; c) silu u užetu u dijelu između tereta i kotura A. Koturove smatrati homogenim kružnim diskovima.



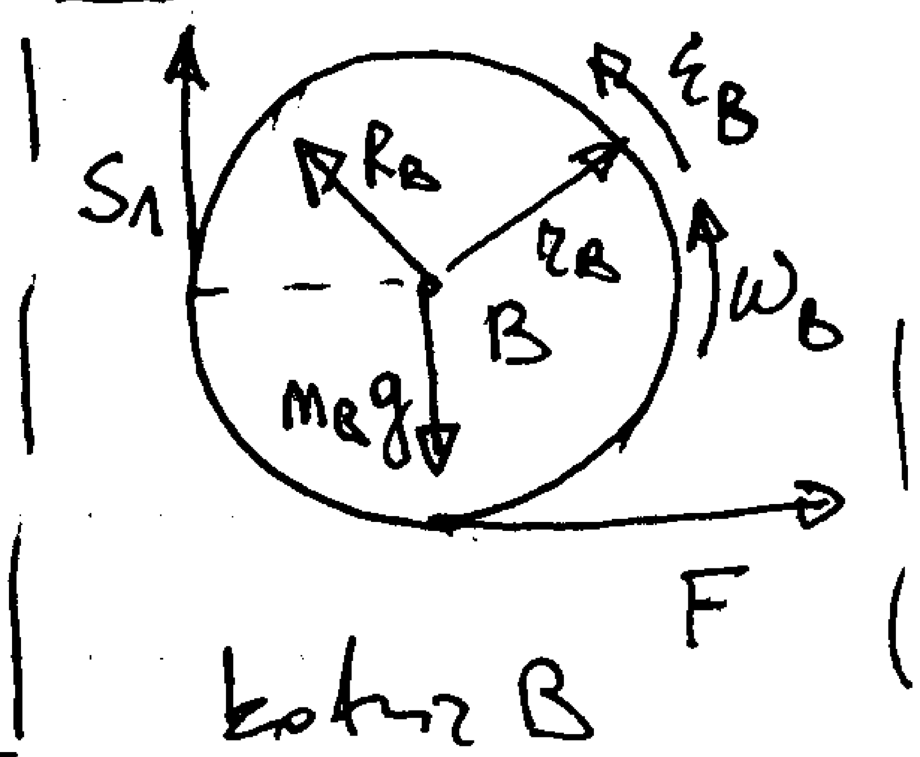
Kinematičke veze u datom sistemu:

$$v = r_B \omega_B = r_A \omega_A = v_C$$

$$\xrightarrow{d/dt} r_B \varepsilon_B = r_A \varepsilon_A = a_C$$

$$\Rightarrow \varepsilon_A = \frac{r_B}{r_A} \varepsilon_B, \quad a_C = r_B \varepsilon_B \quad (1)$$

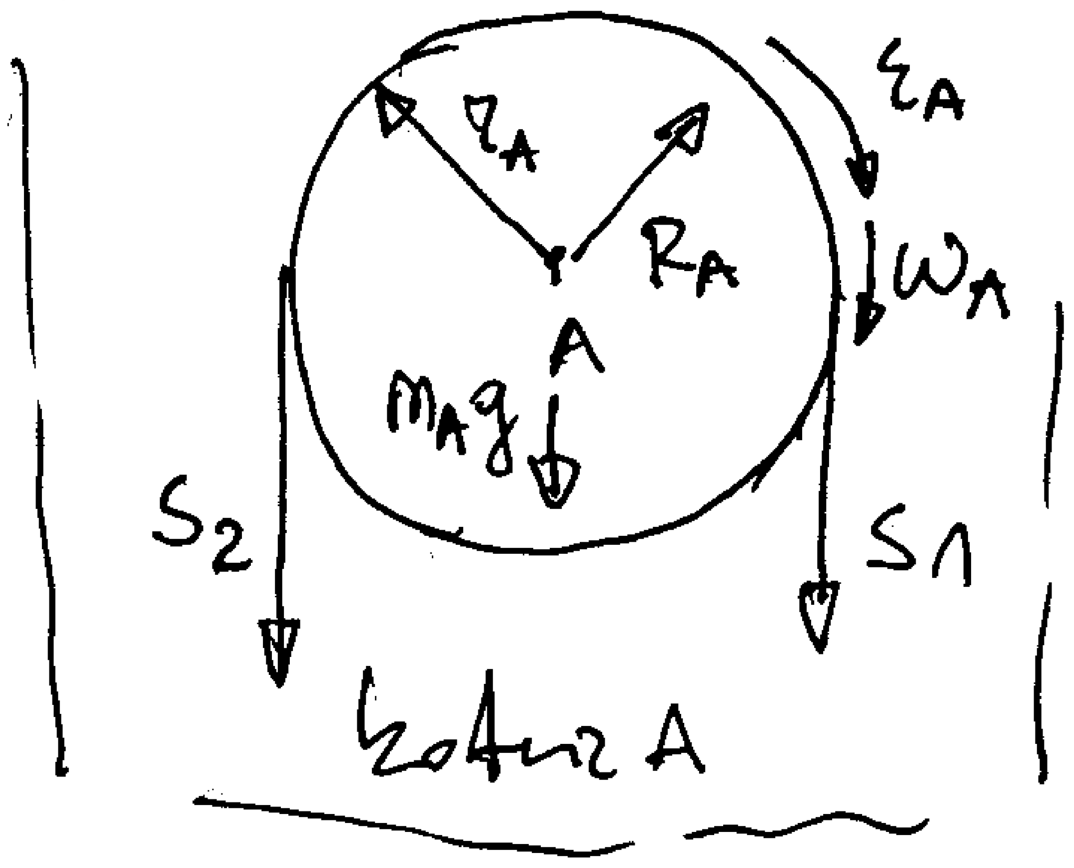
Izdvojimo tijela iz sistema



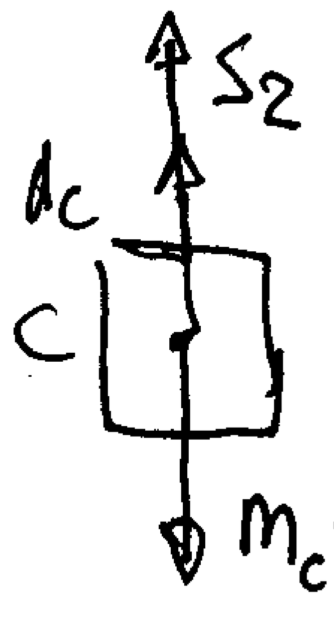
$$J_B \varepsilon_B = F r_B - S_1 r_B \quad (2)$$

$$J_A = \frac{m_A r_A^2}{2}$$

$$J_B = \frac{m_B r_B^2}{2}$$



$$J_A \varepsilon_A = S_1 r_A - S_2 r_A \quad (3)$$

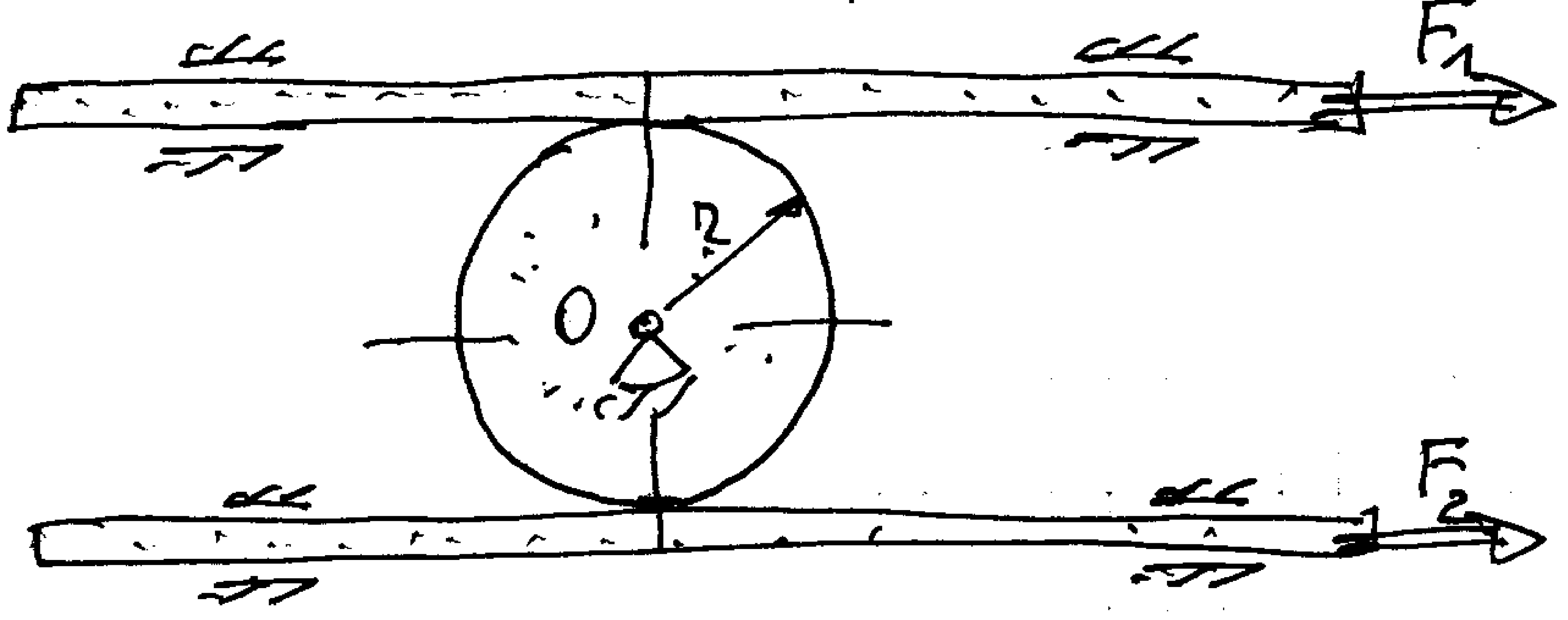


$$m_C a_C = S_2 - m_C g \quad (4)$$

$$(2),(3),(4) \xRightarrow{(1)} \varepsilon_B = \frac{2(F - m_C g)}{(m_A + m_B + 2m_C) r_B} = \boxed{20\,\frac{rad}{s^2}}, \quad a_C = r_B \varepsilon_B = \boxed{4\,\frac{m}{s^2}}$$

$$(4) \Rightarrow \boxed{S_2 = 280\,N}$$

6. Sistem prikazan na slici sastoji se od dvije translatorno pokretne u horizontalnom pravcu letve, masa m_1 i m_2, spregnute sa zupčanikom 3 koji može da se obrće oko nepokretne horizontalne ose O. Ako na letve djeluju sile horizontalne sile F_1 i F_2 usmjerene kao na slici, odrediti ugaono ubrzanje zupčanika. Zupčanik smatrati homogenim kružnim diskom mase m_3 i poluprečnika r. Dato je: $F_1 = 100N$, $F_2 = 200N$, $m_1 = 5\,kg$, $m_2 = 10\,kg$, $m_3 = 20\,kg$, $r = 0{,}2\,m$.



R: $\varepsilon = 20\,s^{-2}$