- Ако је кретање праволинијско или у равни по линији произвољног облика, онда је погодно користити се Декартовим координатним системом:

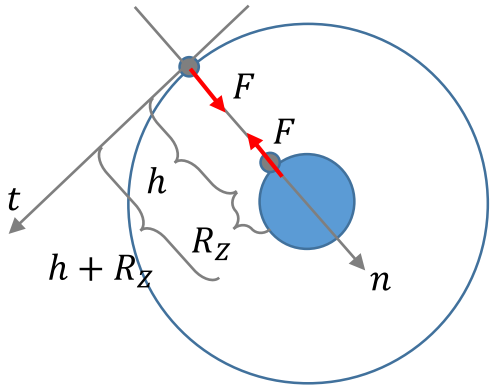
$$m\vec{a} = \vec{F} \Rightarrow \begin{cases} ma_x = F_x \\ ma_y = F_y \end{cases}$$

- Ако је кретање кружно, онда је погодно користити се природним координатним системом:

$$m\vec{a} = \vec{F} \Rightarrow \begin{cases} ma_t = F_t \\ ma_n = F_n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m\dfrac{dv}{dt} = F_t \\ m\dfrac{v^2}{R} = F_n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} mR\varepsilon = F_t \\ mR\omega^2 = F_n \end{cases}$$

**ЗАДАТАК БРОЈ 1**

На коју висину у односу на површину Земље треба избацити вјештачки Земљин сателит да би он за посматрача који се обрће заједно са Земљом изгледао као непокретан? Маса Земље је $5{,}976 \cdot 10^{24}$ kg, а њен полупречник 6371 km. Гравитациона константа износи $f = 6{,}672 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{Nm^2/kg^2}$.




$$m_s\vec{a} = \vec{F} \Rightarrow \begin{cases} m_s a_t = 0 \\ m_s a_n = F \end{cases}$$

$$m_s a_n = F$$

$$m_s a_n = f\frac{m_s m_Z}{(h+R_Z)^2}$$

$$m_s\frac{v_s^2}{h+R_Z} = f\frac{m_s m_Z}{(h+R_Z)^2}$$

$$\boxed{\frac{v_s^2}{h+R_Z} = f\frac{m_Z}{(h+R_Z)^2}}$$

Услов задатка је да се посматрач и сателит око средишта Земље обрћу истом угаоном брзином $\omega$.

$$\boxed{\begin{aligned} v_P &= R_Z\omega \\ v_s &= (h+R_Z)\omega \end{aligned}}$$

$$v_s = (h+R_Z)\omega$$

Земља око своје осе направи један пуни обртај за 24 часа:

$$\omega = \frac{2\pi\ \mathrm{rad}}{24 \cdot 60 \cdot 60\ \mathrm{s}}$$

$$\frac{v_s^2}{h+R_Z} = f\frac{m_Z}{(h+R_Z)^2}$$

$$\frac{(h+R_Z)^2\omega^2}{h+R_Z} = f\frac{m_Z}{(h+R_Z)^2}$$

$$(h+R_Z)^3\omega^2 = fm_Z$$

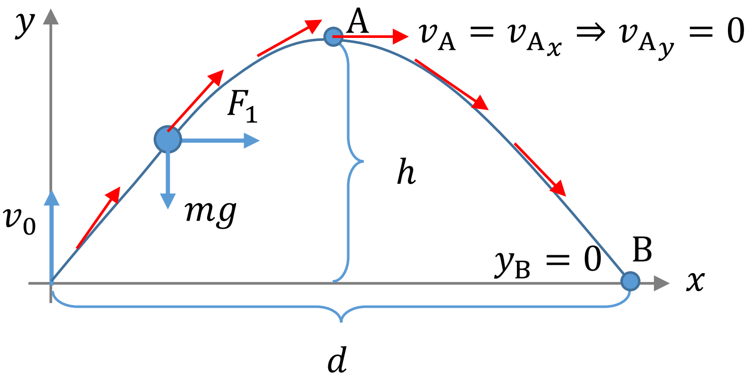
$$h+R_Z = \sqrt[3]{\frac{fm_Z}{\omega^2}}$$

$$\boldsymbol{h = \sqrt[3]{\frac{fm_Z}{\omega^2}} - R_Z}$$

$$\boldsymbol{h} = \sqrt[3]{\frac{6{,}672\cdot 10^{-11}\cdot 5{,}976\cdot 10^{24}}{\left(\frac{2\pi}{24\cdot 60\cdot 60}\right)^2}} - 6371\cdot 10^3 = 35874273\ \mathrm{m} \approx \mathbf{36000\ km}$$

## ЗАДАТАК БРОЈ 2

Тачка масе $m$ избачена је са површине земље вертикално навише почетном брзином $v_0$. На тачку дјелује сила константног хоризонталног правца сразмјерна растојању тачке од површине земље (са коефицијентом пропорционалности $k$). Одредити коефицијент $k$ ако је тијело пало на земљу на растојању од почетног положаја које је једнако максималној висини пењања тијела. Кретање се врши у хомогеном пољу Земљине теже. Отпор ваздуха занемарити.




$$F_1 = ky$$

$$\boldsymbol{h = d}$$

$$\boldsymbol{y_A = h}, \qquad \boldsymbol{x_B = d}$$

$$m\vec{a} = \vec{F} \Rightarrow \begin{cases} ma_x = F_1 \\ ma_y = -mg \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ma_x = ky \ldots (1) \\ a_y = -g \ldots (2) \end{cases}$$

$$(2) \Rightarrow \frac{dv_y}{dt} = -g \Rightarrow dv_y = -gdt \Rightarrow \int_{v_{y_0}=v_0}^{v_y} dv_y = -g\int_0^t dt$$

$$\boxed{v_y = v_0 - gt}$$

$$\frac{dy}{dt} = v_0 - gt \Rightarrow dy = (v_0 - gt)dt \Rightarrow \int_{y_0=0}^{y} dy = \int_0^t (v_0 - gt)dt$$

$$\boxed{y = v_0 t - \frac{gt^2}{2}}$$

$$(1) \Rightarrow m\frac{dv_x}{dt} = ky \Rightarrow m\frac{dv_x}{dt} = k\left(v_0 t - \frac{gt^2}{2}\right)$$

$$m dv_x = k\left(v_0 t - \frac{gt^2}{2}\right) dt \Rightarrow m \int_{v_{x_0}=0}^{v_x} dv_x = k \int_0^y \left(v_0 t - \frac{gt^2}{2}\right) dt \Rightarrow$$

$$\boxed{v_x = \frac{k}{m}\left(\frac{v_0 t^2}{2} - \frac{gt^3}{6}\right)}$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{k}{m}\left(\frac{v_0 t^2}{2} - \frac{gt^3}{6}\right) \Rightarrow dx = \frac{k}{m}\left(\frac{v_0 t^2}{2} - \frac{gt^3}{6}\right) dt \Rightarrow$$

$$\int_{x_0=0}^{x} dx = \frac{k}{m}\int_0^t \left(\frac{v_0 t^2}{2} - \frac{gt^3}{6}\right) dt \Rightarrow$$

$$\boxed{x = \frac{k}{m}\left(\frac{v_0 t^3}{6} - \frac{gt^4}{24}\right)}$$

За тачку A знамо да је $v_{y_\mathrm{A}} = 0$, па слиједи:

$$0 = v_0 - g t_\mathrm{A} \Rightarrow t_\mathrm{A} = \frac{v_0}{g}$$

$$y_\mathrm{A} = v_0 t_\mathrm{A} - \frac{g {t_\mathrm{A}}^2}{2} = v_0 \frac{v_0}{g} - \frac{g}{2}\frac{v_0^2}{g^2} = \frac{v_0^2}{2g}$$

За тачку B знамо да је $y_\mathrm{B} = 0$, па слиједи:

$$0 = v_0 t_\mathrm{B} - \frac{g {t_\mathrm{B}}^2}{2} \Rightarrow 0 = v_0 - \frac{g t_\mathrm{B}}{2} \Rightarrow t_\mathrm{B} = \frac{2v_0}{g}$$

$$x_\mathrm{B} = \frac{k}{m}\left(\frac{v_0 t_\mathrm{B}^3}{6} - \frac{g t_\mathrm{B}^4}{24}\right) = \frac{k}{m}\left(\frac{v_0}{6}\frac{8v_0^3}{g^3} - \frac{g}{24}\frac{16v_0^4}{g^4}\right) = \frac{k}{m}\left(\frac{4v_0^4}{3g^3} - \frac{2v_0^4}{3g^3}\right) = \frac{k}{m}\frac{2v_0^4}{3g^3}$$

Услов који слиједи из поставке задатка:

$$y_\mathrm{A} = x_\mathrm{B}$$

$$\frac{v_0^2}{2g} = \frac{k}{m}\frac{2v_0^4}{3g^3}$$

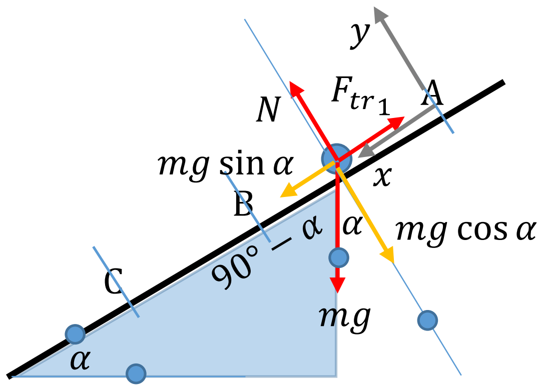
$$\boldsymbol{k = \frac{3mg^2}{4v_0^2}}$$

$m$ – маса

m – метар

**ЗАДАТАК БРОЈ 3**

Материјална тачка може да се креће низ храпаву стрму раван нагиба $\alpha$ у односу на хоризонталу. На дијелу стрме равни $\overline{\mathrm{AB}} = l_1$ коефицијент трења је $\mu_1 = 0{,}5\,\mathrm{tg}\,\alpha$, а на дијелу $\overline{\mathrm{BC}} = l_2$, $\mu_2 = 2\,\mathrm{tg}\,\alpha$. Ако је тачка кренула из стања мировања из положаја A, одредити однос дужина $l_1$ и $l_2$ при коме ће се тачка зауставити у положају C.




<u>Посматрамо само дионицу A – B</u>

Из поставке знамо:

$$v_{\mathrm{A}} = 0, \qquad x_{\mathrm{B}} = l_1$$

$$m\vec{a} = \vec{F} \Rightarrow \begin{cases} ma_x = mg\sin\alpha - F_{tr_1} \\ m\underbrace{a_y}_{0} = N - mg\cos\alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ma_x = mg\sin\alpha - F_{tr_1} \\ N = mg\cos\alpha \end{cases}$$

$$ma_x = mg\sin\alpha - \mu_1 N$$

$$ma_x = mg\sin\alpha - \mu_1 mg\cos\alpha$$

$$\left.\begin{aligned} a_x &= g(\sin\alpha - \mu_1\cos\alpha) \\ a_x &= \frac{dv_x}{\boxed{dt}}\frac{\boxed{dx}}{dx} = \frac{v_x dv_x}{dx} \end{aligned}\right\} \Rightarrow v_x dv_x = g(\sin\alpha - \mu_1\cos\alpha)dx$$

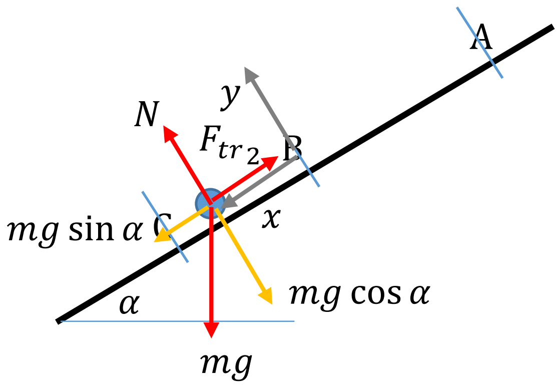
$$\int_{v_{x\mathrm{A}} = v_{\mathrm{A}} = 0}^{v_{x\mathrm{B}}} v_x dv_x = g(\sin\alpha - \mu_1\cos\alpha)\int_{x_{\mathrm{A}}=0}^{x_{\mathrm{B}}=l_1} dx$$

$$\frac{v_{x\mathrm{B}}^2}{2} = g(\sin\alpha - \mu_1\cos\alpha)l_1$$

$$v_{x\mathrm{B}}^2 = 2g(\sin\alpha - 0{,}5\,\mathrm{tg}\,\alpha\cos\alpha)l_1$$

$$\boxed{v_{x\mathrm{B}}^2 = g\sin\alpha\, l_1}$$

Посматрамо само дионицу B – C




Знамо:

$$v_{\mathrm{C}} = 0, \qquad x_{\mathrm{C}} = l_2, \qquad v_{x\mathrm{B}}^2 = g\sin\alpha\, l_1$$

$$m\vec{a} = \vec{F} \Rightarrow \begin{cases} ma_x = mg\sin\alpha - F_{tr_2} \\ m\underbrace{a_y}_{0} = N - mg\cos\alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ma_x = mg\sin\alpha - F_{tr_2} \\ N = mg\cos\alpha \end{cases}$$

$$ma_x = mg\sin\alpha - \mu_2 N$$

$$ma_x = mg\sin\alpha - \mu_2 mg\cos\alpha$$

$$\left.\begin{aligned} a_x &= g(\sin\alpha - \mu_2\cos\alpha) \\ a_x &= \frac{dv_x \boxed{dx}}{\boxed{dt}\ dx} = \frac{v_x dv_x}{dx} \end{aligned}\right\} \Rightarrow v_x dv_x = g(\sin\alpha - \mu_2\cos\alpha)dx$$

$$\int_{v_{x\mathrm{B}}=\sqrt{g\sin\alpha l_1}}^{v_{x\mathrm{C}}=0} v_x dv_x = g(\sin\alpha - \mu_2\cos\alpha)\int_{x_{\mathrm{B}}=0}^{x_{\mathrm{C}}=l_2} dx$$

$$-\frac{g\sin\alpha\, l_1}{2} = g(\sin\alpha - \mu_2\cos\alpha)l_2$$

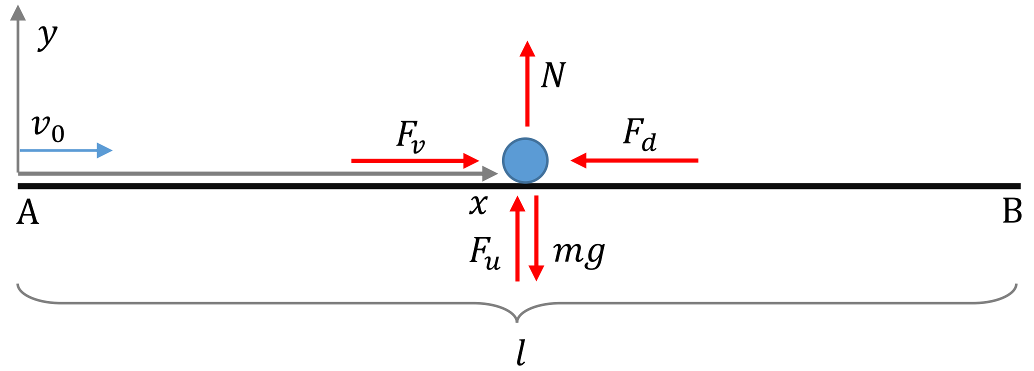
$$-\frac{g\sin\alpha\, l_1}{2} = g(\sin\alpha - 2\,\mathrm{tg}\,\alpha\cos\alpha)l_2$$

$$-\frac{g\sin\alpha\, l_1}{2} = -g\sin\alpha\, l_2$$

$$\boldsymbol{\frac{l_1}{l_2} = 2}$$

**ЗАДАТАК БРОЈ 4**

За полијетање са палубе носача авиона употребљавају се посебни катапулти чиме се скраћује стаза узлијетања авиона. При кретању по палуби, на авион дјелују константна вучна (потисна) сила $F_v = kmg$, сила отпора кретању $F_d = k_1 v^2$ и сила узгона $F_u = k_2 v^2$ ($k, k_1, k_2$ – константе, $m$ – маса авиона, $v$ – брзина авиона, $g$ – убрзање Земљине теже). Одредити брзину $v_0$ послије дејства катапулта потребну да авион узлети са палубе дужине $l$. Занемарити брзину носача авиона и трење између авиона и узлетне писте.




Услов који треба да буде задовољен да би се тијело одвојило од поглоге јесте да нема нормалне реакције подлоге, јер тијело и подлога више нису у контакту. То даље значи да је:

$$N_{\mathrm{B}} = 0$$

Из поставке задатка имамо сљедећу информацију:

$$x_{\mathrm{B}} = l$$

$$m\vec{a} = \vec{F} \Rightarrow \begin{cases} ma_x = F_v - F_d \\ m\underbrace{a_y}_{0} = N + F_u - mg \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ma_x = kmg - k_1 v^2 \ldots (1) \\ 0 = N + k_2 v^2 - mg \ldots (2) \end{cases}$$

$$(1) \Rightarrow a_x = kg - \frac{k_1}{m} v^2$$

$$\frac{dv_x}{dt}\frac{dx}{dx} = kg - \frac{k_1}{m} v^2$$

$$v_x dv_x = \left(kg - \frac{k_1}{m} v^2\right) dx$$

$$v dv = \left(kg - \frac{k_1}{m} v^2\right) dx$$

$$\frac{v}{kg - \frac{k_1}{m} v^2} dv = dx$$

$$\int_{v_A=v_0}^{v_B} \frac{v}{kg-\frac{k_1}{m}v^2}dv = \int_{x_A=0}^{x_B=l} dx$$

$$\frac{-\frac{2k_1}{m}}{-\frac{2k_1}{m}}\int_{v_0}^{v_B} \frac{v}{kg-\frac{k_1}{m}v^2}dv = \int_0^l dx$$

$$-\frac{m}{2k_1}\int_{v_0}^{v_B} \frac{-\frac{2k_1}{m}v}{kg-\frac{k_1}{m}v^2}dv = \int_0^l dx$$

$$-\frac{m}{2k_1}\left(\ln\left|kg-\frac{k_1}{m}{v_B}^2\right| - \ln\left|kg-\frac{k_1}{m}v_0^2\right|\right) = l$$

$$\ln\frac{kg-\frac{k_1}{m}v_0^2}{kg-\frac{k_1}{m}{v_B}^2} = \frac{2k_1 l}{m}$$

$$e^{\frac{2k_1 l}{m}} = \frac{kg-\frac{k_1}{m}v_0^2}{kg-\frac{k_1}{m}{v_B}^2}$$

$$kg-\frac{k_1}{m}{v_B}^2 = \left(kg-\frac{k_1}{m}v_0^2\right)e^{-\frac{2k_1 l}{m}}$$

$$\boxed{{v_B}^2 = \frac{m}{k_1}kg - \frac{m}{k_1}\left(kg-\frac{k_1}{m}v_0^2\right)e^{-\frac{2k_1 l}{m}}}$$

$$(2) \Rightarrow 0 = \underbrace{N_B}_{0} + k_2 v_B^2 - mg$$

$$k_2 v_B^2 - mg = 0$$

$$v_B^2 = \frac{mg}{k_2}$$

$$\frac{m}{k_1}kg - \frac{m}{k_1}\left(kg-\frac{k_1}{m}v_0^2\right)e^{-\frac{2k_1 l}{m}} = \frac{mg}{k_2}$$

$$\left(kg-\frac{k_1}{m}v_0^2\right)e^{-\frac{2k_1 l}{m}} = kg - \frac{k_1 g}{k_2}$$

$$kg-\frac{k_1}{m}v_0^2 = \left(kg-\frac{k_1 g}{k_2}\right)e^{\frac{2k_1 l}{m}}$$

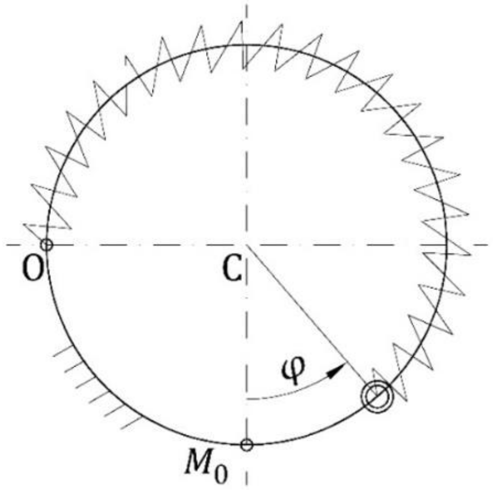
$$v_0^2 = \frac{kmg}{k_1} - \left(\frac{kmg}{k_1} - \frac{mg}{k_2}\right) e^{\frac{2k_1 l}{m}}$$

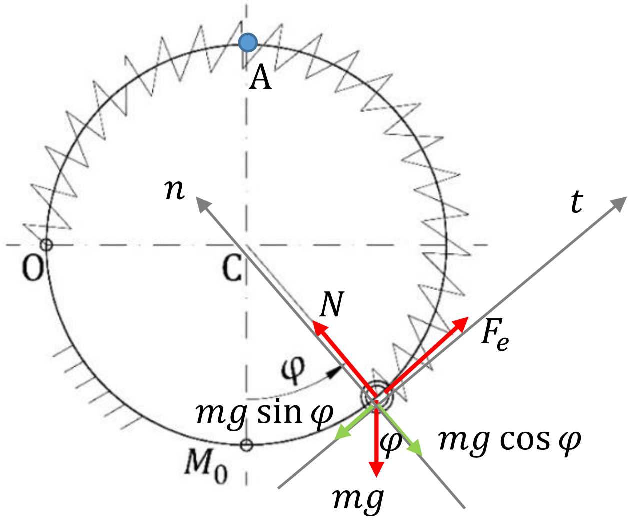
$$v_0^2 = \frac{mg}{k_1 k_2}\left(kk_2 - (kk_2 - k_1)e^{\frac{2k_1 l}{m}}\right)$$

$$\boldsymbol{v_0 = \sqrt{\frac{mg}{k_1 k_2}\left(kk_2 - (kk_2 - k_1)e^{\frac{2k_1 l}{m}}\right)}}$$

## ЗАДАТАК БРОЈ 5

У вертикалној равни по глаткој вези кружног облика креће се прстен масе $m$, занемарљивих димензија. Опруга крутости $c$ ненапрегнуте дужине $l_0 = R\pi/2$, везана је једним крајем за непокретну тачку O, а другим за прстен. Ако је у почетном тренутку прстен мировао у положају $M_0$, одредити реакцију везе у зависности од угла $\varphi$.




Недеформисана дужина опруге:

$$l_0 = \frac{R\pi}{2} = \frac{O}{4} = \frac{2R\pi}{4} = \frac{R\pi}{2}$$

Тачка A је тачка у којој опруга није деформисана и сила у опрузи је таква да тежи да опругу врати у тачку A.

$$F_e = c\Delta = c(\pi - \varphi)R$$

Код кружног кретања смо имали везу: $s = R\varphi$.

$$m\vec{a} = \vec{F} \Rightarrow \begin{cases} ma_t = F_e - mg\sin\varphi \\ ma_n = N - mg\cos\varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m\dfrac{dv}{dt} = c(\pi - \varphi)R - mg\sin\varphi \ldots (1) \\ m\dfrac{v^2}{R} = N - mg\cos\varphi \ldots (2) \end{cases}$$

$$(1) \Rightarrow \frac{dv}{dt} = \frac{c}{m}(\pi - \varphi)R - g\sin\varphi$$

$$\frac{dv}{\boxed{dt}}\frac{\boxed{d\varphi}}{d\varphi} = \frac{c}{m}(\pi - \varphi)R - g\sin\varphi$$

$$\omega dv = \left(\frac{c}{m}(\pi - \varphi)R - g\sin\varphi\right)d\varphi$$

$$\frac{v}{R}dv = \left(\frac{c}{m}(\pi - \varphi)R - g\sin\varphi\right)d\varphi$$

$$\frac{1}{R}\int_0^v v dv = \int_0^\varphi \left(\frac{c}{m}(\pi - \varphi)R - g\sin\varphi\right)d\varphi$$

$$\frac{1}{R}\frac{v^2}{2} = \left(\frac{c}{m}\left(\pi\varphi - \frac{\varphi^2}{2}\right)R + g(\cos\varphi - \cos 0)\right)$$

$$\boxed{\frac{v^2}{R} = 2\frac{cR}{m}\pi\varphi - \frac{cR}{m}\varphi^2 + 2g\cos\varphi - 2g}$$

$$(2) \Rightarrow m\frac{v^2}{R} = N - mg\cos\varphi$$

$$\frac{v^2}{R} = \frac{N}{m} - g\cos\varphi$$

$$2\frac{cR}{m}\pi\varphi - \frac{cR}{m}\varphi^2 + 2g\cos\varphi - 2g = \frac{N}{m} - g\cos\varphi$$

$$2\frac{cR}{m}\pi\varphi - \frac{cR}{m}\varphi^2 + 3g\cos\varphi - 2g = \frac{N}{m}$$

$$N = 2cR\pi\varphi - cR\varphi^2 + 3mg\cos\varphi - 2mg$$

$$\boldsymbol{N = cR\varphi(2\pi - \varphi) + mg(3\cos\varphi - 2)}$$