- Ако је кретање праволинијско или у равни по линији произвољног облика, онда је погодно користити се Декартовим координатним системом:

$$m\vec{a} = \vec{F} \Rightarrow \begin{cases} ma_x = F_x \\ ma_y = F_y \end{cases}$$

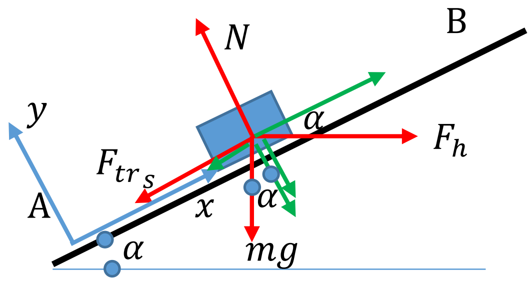
- Ако је кретање кружно, онда је погодно користити се природним координатним системом:

$$m\vec{a} = \vec{F} \Rightarrow \begin{cases} ma_t = F_t \\ ma_n = F_n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m\dfrac{dv}{dt} = F_t \\ m\dfrac{v^2}{R} = F_n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} mR\varepsilon = F_t \\ mR\omega^2 = F_n \end{cases}$$

$$a_x = \text{const} \vee a_x = a_x(v_x) \Rightarrow \begin{cases} a_x = \dfrac{dv_x}{dt}, \qquad [v_x(t), x(t)] \\ a_x = \dfrac{dv_x}{dt}\dfrac{dx}{dx}, \qquad [v_x(x)] \end{cases}$$

ЗАДАТАК БРОЈ 1

Хоризонтална сила од 200 N дјелује на кутију масе 5 kg која је постављена на стрму раван нагиба $\alpha = 30°$. Почетна брзина кутије је једнака нули. Статички коефицијент трења је 0,6, а динамички 0,5. Да ли ће се кутија кретати уз стрму раван или ће остати да мирује на њој? Ако се креће, одредити вријеме за које пређе пут дужине 1 m.



<u>Услов да би се постигло стање мировања</u>

$$\vec{0} = \vec{F} \Rightarrow \begin{cases} 0 = F_h \cos\alpha - mg\sin\alpha - F_{tr_s} \dots (1) \\ 0 = N - F_h \sin\alpha - mg\cos\alpha \dots (2) \end{cases}$$

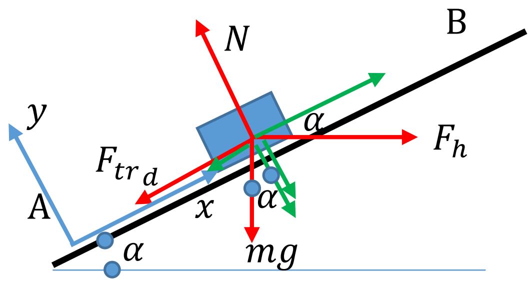
$$(2) \Rightarrow N = F_h \sin\alpha + mg\cos\alpha$$

$$(1) \Rightarrow F_h \cos\alpha - mg\sin\alpha - \mu_s(F_h \sin\alpha + mg\cos\alpha) = 0$$

$$200 \cdot 0{,}866 - 5 \cdot 9{,}81 \cdot 0{,}5 - 0{,}6(200 \cdot 0{,}5 + 5 \cdot 9{,}81 \cdot 0{,}866) = 0$$

$$63{,}19 = 0$$

Дакле, оствариће се кретање кутије уз стрму раван.



$$m\vec{a} = \vec{F} \Rightarrow \begin{cases} ma_x = F_h \cos\alpha - mg\sin\alpha - F_{tr_d} \dots (3) \\ m\underbrace{a_y}_{0} = N - F_h \sin\alpha - mg\cos\alpha \dots (4) \end{cases}$$

$$(4) \Rightarrow N = F_h \sin\alpha + mg\cos\alpha$$

$$(3) \Rightarrow ma_x = F_h \cos\alpha - mg\sin\alpha - \mu_d(F_h \sin\alpha + mg\cos\alpha)$$

$$a_x = \frac{F_h \cos\alpha - mg\sin\alpha - \mu_d(F_h \sin\alpha + mg\cos\alpha)}{m}$$

$$a_x = \frac{200 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - 5 \cdot 9{,}81 \cdot \frac{1}{2} - 0{,}5\left(200\frac{1}{2} + 5 \cdot 9{,}81 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{5} = 15{,}49$$

$$\left.\begin{aligned} a_x &= \frac{dv_x}{dt} \\ a_x &= 15{,}49 \end{aligned}\right\} \Rightarrow dv_x = 15{,}49dt \Rightarrow \int_0^{v_x} dv_x = 15{,}49 \int_0^t dt$$

$$v_x = 15{,}49t$$

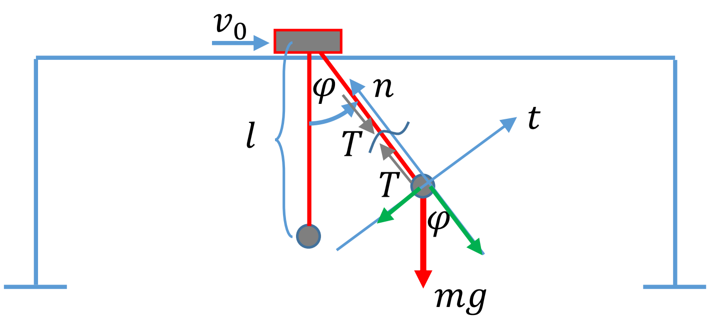
$$\left.\begin{aligned} v_x &= \frac{dx}{dt} \\ v_x &= 15{,}49t \end{aligned}\right\} \Rightarrow dx = 15{,}49tdt \Rightarrow \int_0^{x} dx = 15{,}49 \int_0^t tdt$$

$$x = 7{,}744t^2$$

$$t = \sqrt{\frac{x}{7{,}744}} \Rightarrow t^* = \sqrt{\frac{x^*}{7{,}744}} \Rightarrow \boldsymbol{t^*} = \sqrt{\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{7,744}}} = \mathbf{0,359\ s}$$

ЗАДАТАК БРОЈ 2

Терет масе 10 t помјера се заједно са колицима на хоризонталној греди мостовског крана брзином од 1 m/s. Растојање тежишта терета од тачке вјешања је 5 m. Зауставе ли се нагло колица, терет ће по инерцији продужити кретање и започети клаћење око тачке вјешања. Одредити максималну вриједност затезне силе у ужету.



$$m\vec{a} = \vec{F} \Rightarrow \begin{cases} ma_t = -mg\sin\varphi \\ ma_n = T - mg\cos\varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m\dfrac{dv}{dt} = -mg\sin\varphi \ldots (1) \\ m\dfrac{v^2}{l} = T - mg\cos\varphi \ldots (2) \end{cases}$$

$$(1) \Rightarrow m\frac{dv}{dt} = -mg\sin\varphi$$

$$\cancel{mdv = -mg\sin\varphi\, dt}$$

$$\frac{dv}{\boxed{dt}}\frac{\boxed{d\varphi}}{d\varphi} = -g\sin\varphi$$

$$\omega dv = -g\sin\varphi\, d\varphi$$

$$\frac{v}{l}dv = -g\sin\varphi\, d\varphi$$

$$\frac{1}{l}\int_{v_0}^{v} vdv = -g\int_{0}^{\varphi}\sin\varphi\, d\varphi$$

$$\frac{1}{l}\left(\frac{v^2}{2} - \frac{v_0^2}{2}\right) = g(\cos\varphi - \cos 0)$$

$$\boxed{\frac{v^2}{l} = \frac{v_0^2}{l} + 2g(\cos\varphi - 1)}$$

$$(2) \Rightarrow T = m\frac{v^2}{l} + mg\cos\varphi$$

$$T = m\frac{v_0^2}{l} + 2mg\cos\varphi - 2mg + mg\cos\varphi$$

$$\boxed{T = m\frac{v_0^2}{l} + 3mg\cos\varphi - 2mg}$$

Пошто $\cos\varphi$ може узимати вриједности само из интервала $[-1; 1]$, његова максимална вриједност је 1, па ће та вриједност дати максималну силу T.

$$T_{\max} = m\frac{v_0^2}{l} + mg$$

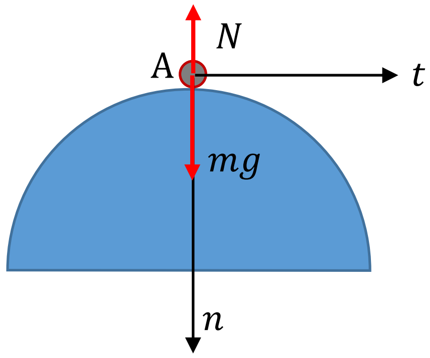
$$T_{\max} = m\left(\frac{v_0^2}{l} + g\right)$$

$$T_{\max} = 10000\left(\frac{1}{5} + 9{,}81\right)$$

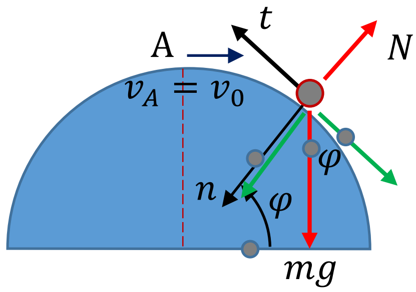
$$\boldsymbol{T_{\max} = 100100\ \mathrm{N} = 100{,}1\ \mathrm{kN}}$$

ЗАДАТАК БРОЈ 3

Куглици која се налази на највишој тачки полукугласте глатке куполе полупречника R саопштена је почетна брзина v_0 у хоризонталном правцу. На ком ће мјесту куглица напустити куполу?



$$m\vec{a} = \vec{F} \Rightarrow \begin{cases} ma_t = 0 \\ ma_n = mg - N \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cancel{m\left(\frac{dv}{dt}\right)_{\mathrm{A}} = 0} \\ m\frac{v_{\mathrm{A}}^2}{R} = mg - N_{\mathrm{A}} \end{cases}$$



$$m\vec{a} = \vec{F} \Rightarrow \begin{cases} ma_t = -mg\cos\varphi \\ ma_n = mg\sin\varphi - N \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_t = -g\cos\varphi \\ a_n = g\sin\varphi - \dfrac{N}{m} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{dv}{dt} = -g\cos\varphi \ldots (1) \\ \dfrac{v^2}{R} = g\sin\varphi - \dfrac{N}{m} \ldots (2) \end{cases}$$

$$(1) \Rightarrow \frac{vdv}{R} = -g\cos\varphi\, d\varphi \Rightarrow \int_{v_{\mathrm{A}}=-v_0}^{v} \frac{vdv}{R} = -g \int_{\varphi_{\mathrm{A}}=\frac{\pi}{2}}^{\varphi} \cos\varphi\, d\varphi$$

$$\frac{v^2}{2R} - \frac{v_0^2}{2R} = -g\left(\sin\varphi - \sin\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\boxed{\frac{v^2}{R} = \frac{v_0^2}{R} - 2g(\sin\varphi - 1)}$$

$$(2) \Rightarrow \frac{v_0^2}{R} - 2g(\sin\varphi - 1) = g\sin\varphi - \frac{N}{m}$$

$$\frac{v_0^2}{R} - 3g\sin\varphi + 2g = -\frac{N}{m}$$

$$\frac{v_0^2}{R} - 3g\sin\varphi^* + 2g = -\frac{N^*}{m}$$

$$\frac{v_0^2}{R} - 3g\sin\varphi^* + 2g = 0$$

$$\sin\varphi^* = \frac{2}{3} + \frac{v_0^2}{3gR}$$

$$\boldsymbol{\varphi^* = \arcsin\left(\frac{2}{3} + \frac{v_0^2}{3gR}\right)}$$

д'Аламбер принцип за тачку

$$m\vec{a} = \vec{F}_{\text{akt.}} + \vec{F}_{\text{rek.}}$$

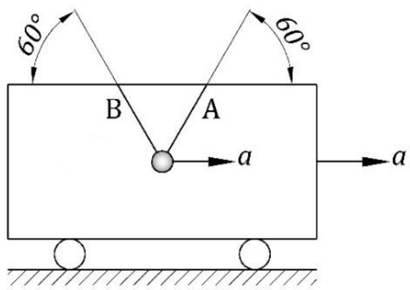
$$\vec{0} = \vec{F}_{\text{akt.}} + \vec{F}_{\text{rek.}} - m\vec{a}$$

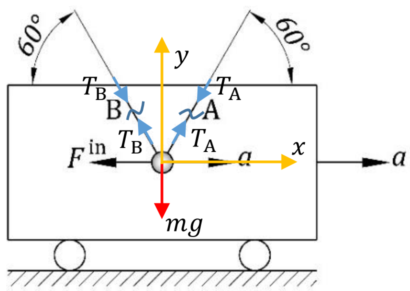
$$\vec{0} = \vec{F}_{\text{akt.}} + \vec{F}_{\text{rek.}} + \vec{F}_{in}$$

$$"\vec{F}_r = \vec{0}"$$

ЗАДАТАК БРОЈ 4

Кугла масе m везана је ужадима A и B за колица која се крећу по хоризонталној подлози. Положај ужади у односу на колица је дат на слици. Одредити убрање колица за које ће сила у ужету A бити два пута већа од силе у ужету B.





$$"\vec{F}_r = \vec{0}"$$

$$\underbrace{\vec{F}_{\text{akt.}}}_{m\vec{g}} + \underbrace{\vec{F}_{\text{rek.}}}_{\vec{T}_{\text{A}}+\vec{T}_{\text{B}}} + \vec{F}_{in} = \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} "F_{r_x} = 0" \\ "F_{r_y} = 0" \end{cases}$$

$$\begin{cases} "F_{r_x} = 0" \Rightarrow \boxed{T_{\text{A}}}\cos 60° - \boxed{T_{\text{B}}}\cos 60° - \boxed{F_{in}} = 0 \\ "F_{r_y} = 0" \Rightarrow -mg + \boxed{T_{\text{A}}}\sin 60° + \boxed{T_{\text{B}}}\sin 60° = 0 \end{cases}$$

$$\boxed{T_{\text{A}}} = 2\boxed{T_{\text{B}}}$$

$$\left.\begin{aligned} 2T_{\text{B}}\frac{1}{2} - T_{\text{B}}\frac{1}{2} - F_{in} = 0 \\ -mg + 2T_{\text{B}}\frac{\sqrt{3}}{2} + T_{\text{B}}\frac{\sqrt{3}}{2} = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} T_{\text{B}}\frac{1}{2} - F_{in} = 0 \\ T_{\text{B}}\frac{3\sqrt{3}}{2} - mg = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} -3\sqrt{3}T_{\text{B}} + 6\sqrt{3}F_{in} = 0 \\ 3\sqrt{3}T_{\text{B}} - 2mg = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$6\sqrt{3}F_{in} - 2mg = 0$$

$$3\sqrt{3}F_{in} = mg$$

$$F_{in} = \frac{mg}{3\sqrt{3}}$$

$$ma = \frac{mg}{3\sqrt{3}}$$

$$\boldsymbol{a = \frac{g}{3\sqrt{3}}}$$

Закон о промјени количине кретања

$$\vec{K} = m\vec{v}, \qquad \vec{I} = \int \vec{F} dt$$

$$m\vec{a} = \vec{F} \Rightarrow m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} \Rightarrow m\frac{d\left(\frac{\vec{K}}{m}\right)}{dt} = \vec{F} \Rightarrow m\frac{1}{m}\frac{d(\vec{K})}{dt} = \vec{F} \Rightarrow \frac{d\vec{K}}{dt} = \vec{F}$$

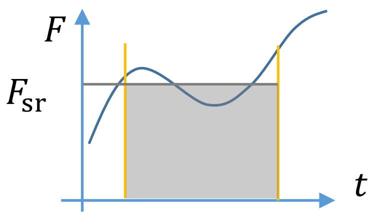
$$d\vec{K} = \vec{F}dt$$

$$\int d\vec{K} = \int \vec{F}dt$$

$$\int d\vec{K} = \vec{I}$$

$$\boxed{\boldsymbol{\vec{K}_1 - \vec{K}_0 = \vec{I}}}$$

$$\vec{F} = \text{const} \Rightarrow \vec{I} = \vec{F}\Delta t$$
$$\vec{F} \neq \text{const} \Rightarrow \vec{I} = \vec{F}_{\text{sr}}\Delta t$$

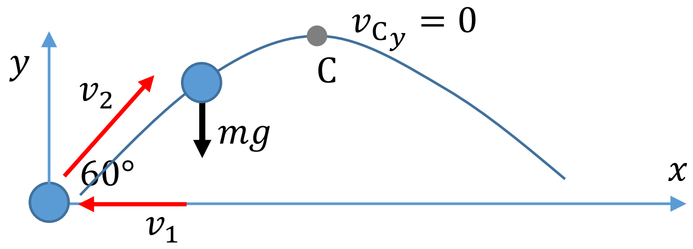


$$\vec{K}_1 - \vec{K}_0 = \vec{I} \Rightarrow \begin{cases} K_{1_x} - K_{0_x} = I_x \\ K_{1_y} - K_{0_y} = I_y \\ K_{1_z} - K_{0_z} = I_z \end{cases}$$

Ако је $I_x = 0$ онда је $K_{1_x} = K_{0_x} = \text{const}$.

ЗАДАТАК БРОЈ 5

Лоптица масе 400 g удари брзином $v_1 = 35$ m/s хоризонтално о палицу B и одбије се увис под углом од 60° према хоризонтали тако да досегне висину од 50 m мјерено од висине палице. Одредити величину импулса ударне силе између лоптице и палице. Колика је средња ударна сила ако удар траје 1 s?



$$\vec{K}_2 - \vec{K}_1 = \vec{I}_{12} \Rightarrow \begin{cases} K_{2_x} - K_{1_x} = I_{12_x} \\ K_{2_y} - K_{1_y} = I_{12_y} \end{cases}$$

Након удара

$$m\vec{a} = \vec{F} \Rightarrow \begin{cases} ma_x = 0 \\ ma_y = -mg \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = -g \end{cases}$$

Из поставке задатка знамо да је $y_C = 50$ m и знамо да је $v_{C_y} = 0$.

$$\left.\begin{aligned} a_y &= -g \\ a_y &= \frac{dv_y}{\boxed{dt}}\frac{\boxed{dy}}{dy} = \frac{v_y dv_y}{dy} \end{aligned}\right\} \Rightarrow v_y dv_y = -g dy \Rightarrow \int_{v_2 \sin 60°}^{0} v_y dv_y = -g\int_0^{50} dy$$

$$-\frac{(v_2 \sin 60°)^2}{2} = -50g$$

$$v_2^2 \frac{3}{4} = 100g$$

$$\boxed{v_2 = \sqrt{\frac{400}{3}g} = 20\sqrt{\frac{g}{3}}}$$

$$\vec{K}_1 = m\vec{v}_1 = 0{,}4(-35\vec{\imath}) = -14\vec{\imath} \Rightarrow \begin{cases} K_{1_x} = -14 \\ K_{1_y} = 0 \end{cases}$$

$$\vec{K}_2 = m\vec{v}_2 = 0{,}4(v_2 \cos 60° \,\vec{\imath} + v_2 \sin 60° \,\vec{\jmath}) = 0{,}4\left(20\sqrt{\frac{g}{3}}\frac{1}{2}\vec{\imath} + 20\sqrt{\frac{g}{3}}\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{\jmath}\right)$$

$$\vec{K}_2 = \frac{4\sqrt{3}}{3}\sqrt{g}\vec{\imath} + 4\sqrt{g}\vec{\jmath} = \sqrt{g}\left(\frac{4\sqrt{3}}{3}\vec{\imath} + 4\vec{\jmath}\right) \Rightarrow \begin{cases} K_{2_x} = \dfrac{4\sqrt{3}}{3}\sqrt{g} \\ K_{2_y} = 4\sqrt{g} \end{cases}$$

$$\left.\begin{aligned} I_{12_x} &= K_{2_x} - K_{1_x} = \frac{4\sqrt{3}}{3}\sqrt{g} + 14 \\ I_{12_y} &= K_{2_y} - K_{1_y} = 4\sqrt{g} \end{aligned}\right\} \Rightarrow I_{12} = \sqrt{I_{12_x}^{\ 2} + I_{12_y}^{\ 2}}$$

$$\boldsymbol{I_{12}} = \sqrt{I_{12_x}^{\ 2} + I_{12_y}^{\ 2}} = \sqrt{\left(\frac{4\sqrt{3}}{3}\sqrt{g} + 14\right)^2 + \left(4\sqrt{g}\right)^2} = \mathbf{24,65\ Ns}$$

$$\vec{F} \neq \text{const} \Rightarrow \vec{I} = \vec{F}_{\text{sr}}\Delta t \Rightarrow \vec{F}_{\text{sr}} = \frac{\vec{I}}{\Delta t} = \frac{\left(\frac{4\sqrt{3}}{3}\sqrt{g} + 14\right)\vec{\imath} + 4\sqrt{g}\vec{\jmath}}{1}$$

$$\vec{F}_{\text{sr}} = \left(\frac{4\sqrt{3}}{3}\sqrt{g} + 14\right)\vec{\imath} + 4\sqrt{g}\vec{\jmath}$$

$$\boldsymbol{F}_{\mathbf{sr}} = \frac{I}{\Delta t} = \mathbf{24,65\ N}$$