Закон о промјени момента количине кретања

Момент силе за тачку

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

Момент количине кретања за тачку

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{K}$$

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{K}, \qquad \frac{d}{dt}$$

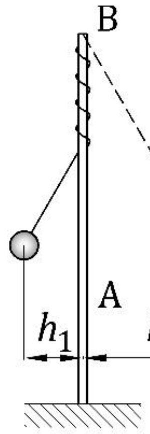
$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\vec{r} \times \vec{K}\right) = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{K} + \vec{r} \times \frac{d\vec{K}}{dt} = \underbrace{\vec{v} \times m\vec{v}}_{\vec{0}} + \vec{r} \times \frac{d(m\vec{v})}{dt} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{M}$$

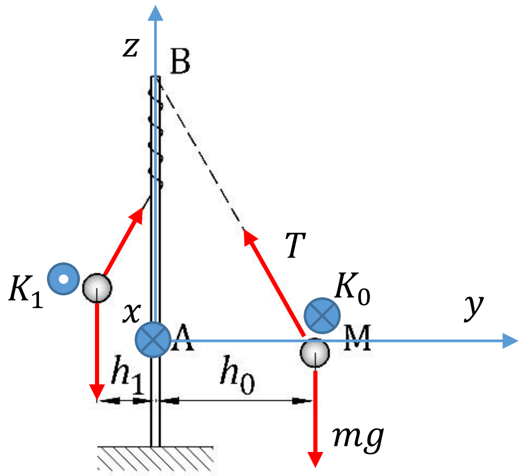
$$\boxed{\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}}$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{dL_x}{dt} = M_x \\ \dfrac{dL_y}{dt} = M_y \\ \dfrac{dL_z}{dt} = M_z \end{cases}$$

ЗАДАТАК БРОЈ 1

Куглица М привезана за конац ВМ креће се тако да се конац намотава на танки вертикални штап. Почетно растојање куглице од штапа једнако је h_0, а почетна брзина је v_0 и управна је на раван АВМ. Занемарујући дебљину штапа, одредити брзину куглице v_1 у тренутку када је њено растојање од штапа једнако h_1.





Сила mg је паралелна оси z, па не може да направи момент за њу.

Сила T сијече осу z, па не може да направи момент за њу.

$$\left.\begin{aligned} M_z &= 0 \\ \frac{dL_z}{dt} &= M_z \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{dL_z}{dt} = 0 \Rightarrow L_z = \text{const.} \Rightarrow L_{z0} = L_{z1}$$

$$L_{z0} = L_{z1}$$

$$K_0 h_0 = K_1 h_1$$

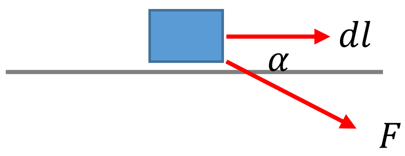
$$m v_0 h_0 = m v_1 h_1$$

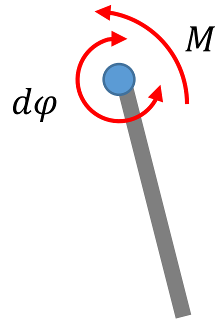
$$\boldsymbol{v_1 = v_0 \frac{h_0}{h_1}}$$

Закон о промјени кинетичке енергије

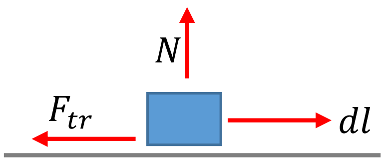
$$E_{k_1} - E_{k_0} = A_{01}$$

$$E_k = \frac{mv^2}{2}, \qquad A^F = \int \vec{F} \cdot d\vec{l}, \qquad A^M = \int \vec{M} \cdot d\vec{\varphi}$$

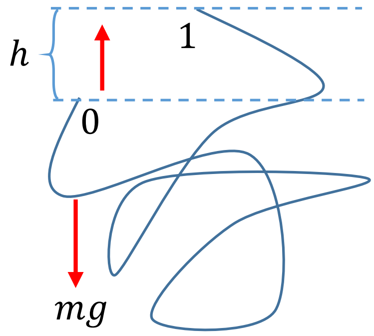




$$A^F = \int F \cos\alpha \, dl, \qquad A^M = \pm \int M d\varphi$$



сила	рад силе
mg	$\pm mgh$
N	0
F_{tr}	$-\int F_{tr} dl$
F_e	$\frac{1}{2}c(\Delta_0^2 - \Delta_1^2)$

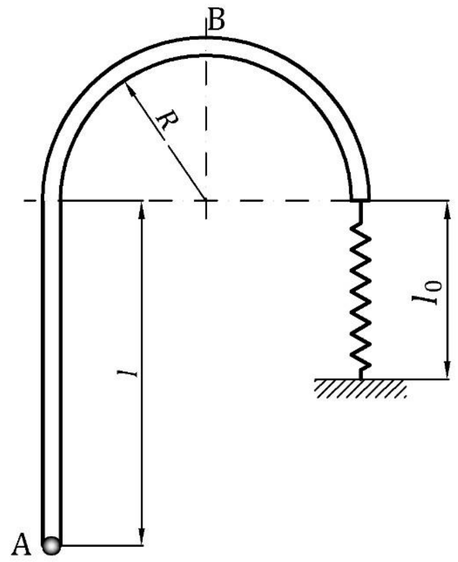


Закон о одржању механичке енергије

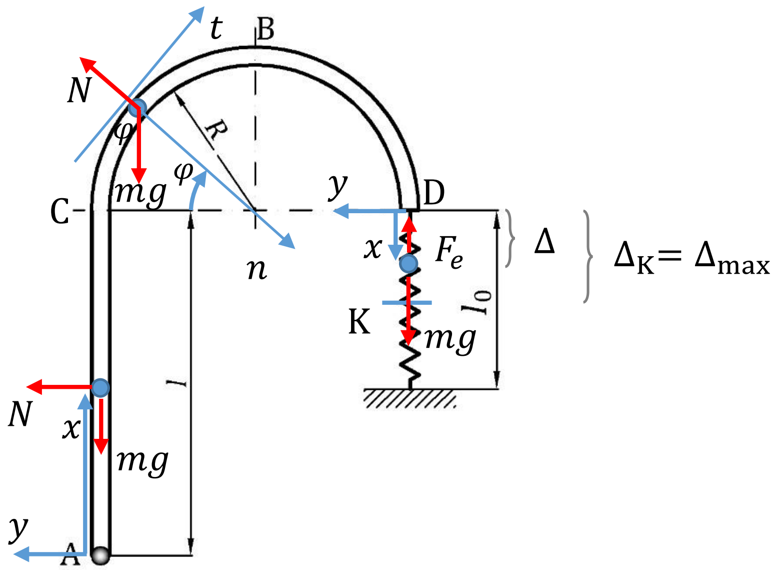
$$E = E_k + E_p = \text{const}$$

ЗАДАТАК БРОЈ 2

Кугла масе 0,5 kg убаци се почетном брзином $v_0 = 4\sqrt{gR}$ у отвор A непокретне глатке цијеви, облика и димензија датих на слици, која лежи у вертикалној равни. Одредити брзину кугле и реакцију везе у положају B, а потом највеће сабијање вертикалне опруге крутости $c = 300\ \mathrm{N/m}$ након што кугла напушти цијев у положају C, ако је l_0 дужина недеформисане опруге. Дато је: $l = 3R$ и $R = 1$ m.



Други Њутнов закон



A − C

$$m\vec{a} = \vec{F} \Rightarrow \begin{cases} ma_x = -mg \\ m\underbrace{a_y}_{0} = N \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_x = -g \\ N = 0 \end{cases}$$

$$\left.\begin{aligned} a_x &= -g \\ a_x &= \frac{dv_x}{\boxed{dt}}\frac{\boxed{dx}}{dx} = \frac{v_x dv_x}{dx} \end{aligned}\right\} \Rightarrow v_x dv_x = -g dx \Rightarrow \int_{v_\mathrm{A}=4\sqrt{gR}}^{v_\mathrm{C}} v_x dv_x = -g \int_{x_\mathrm{A}=0}^{x_\mathrm{C}=l} dx$$

$$\frac{v_\mathrm{C}^2}{2} - \frac{16gR}{2} = -gl$$

$$\boldsymbol{v_\mathrm{C}^2 = 10gR}$$

C – D

$$m\vec{a} = \vec{F} \Rightarrow \begin{cases} ma_t = -mg\cos\varphi \\ ma_n = -N + mg\sin\varphi \end{cases}$$

$$\left.\begin{aligned} a_t &= -g\cos\varphi \\ a_t &= \frac{dv}{\boxed{dt}}\frac{\boxed{d\varphi}}{d\varphi} = \frac{v}{R}\frac{dv}{d\varphi} \end{aligned}\right\} \Rightarrow vdv = -gR\cos\varphi\, d\varphi$$

$$\int_{v_\mathrm{C}=\sqrt{10gR}}^{v_\mathrm{D}} vdv = -gR \int_{\varphi_\mathrm{C}=0}^{\varphi_\mathrm{D}=\pi} \cos\varphi\, d\varphi$$

$$\frac{v_\mathrm{D}^2}{2} - \frac{10gR}{2} = -gR\left(\underbrace{\sin\pi - \sin 0}_{0}\right)$$

$$\frac{v_\mathrm{D}^2}{2} = \frac{10gR}{2}$$

$$\boldsymbol{v_\mathrm{D}^2 = 10gR}$$

D – K

$$m\vec{a} = \vec{F} \Rightarrow \begin{cases} ma_x = mg - F_e \\ m\underbrace{a_y}_{0} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ma_x = mg - c\Delta \\ 0 = 0 \end{cases}$$

$$\left.\begin{aligned} a_x &= g - \frac{c}{m}x \\ a_x &= \frac{dv_x}{\boxed{dt}}\frac{\boxed{dx}}{dx} = \frac{v_x dv_x}{dx} \end{aligned}\right\} \Rightarrow v_x dv_x = \left(g - \frac{c}{m}x\right)dx$$

$$\int_{v_{x\mathrm{D}}=\sqrt{10gR}}^{v_{x\mathrm{K}}=0} v_x\, dv_x = \int_{x_\mathrm{D}=0}^{x_\mathrm{K}=\Delta_\mathrm{max}=\Delta_\mathrm{K}} \left(g - \frac{c}{m}x\right)dx$$

$$-\frac{10gR}{2} = g\Delta_\mathrm{K} - \frac{c}{m}\frac{{\Delta_\mathrm{K}}^2}{2}$$

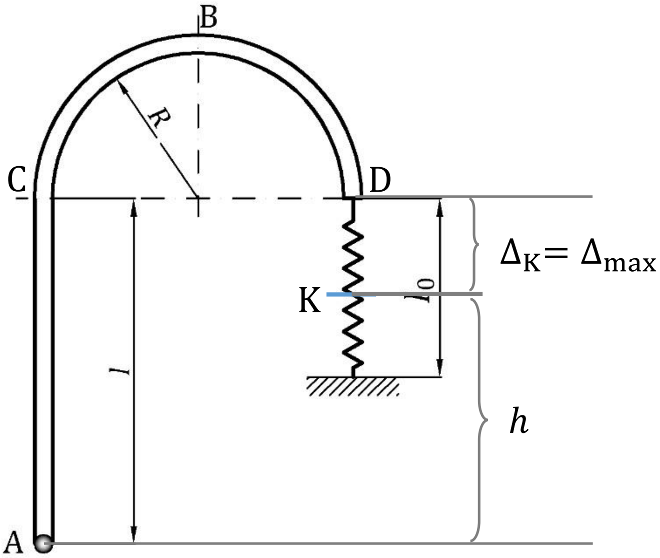
$$\frac{c}{m}\frac{{\Delta_{\mathrm{K}}}^2}{2}-g\Delta_{\mathrm{K}}-\frac{10gR}{2}=0$$

$$c{\Delta_{\mathrm{K}}}^2-2mg\Delta_{\mathrm{K}}-10mgR=0$$

$$\Delta_{\mathrm{K}_{1/2}}=\frac{2mg\pm\sqrt{4m^2g^2+40mgRc}}{2c}$$

$$\Delta_{\mathrm{K}_{1/2}}=\frac{2\cdot 0{,}5\cdot 9{,}81\pm\sqrt{4\cdot 0{,}5^2\cdot 9{,}81^2+40\cdot 0{,}5\cdot 9{,}81\cdot 1\cdot 300}}{2\cdot 300}=\begin{cases}\Delta_{\mathrm{K}_1}=-0{,}388\\ \boxed{\boldsymbol{\Delta_{\mathrm{K}_2}=0{,}421}}\end{cases}$$

<u>Закон о промјени кинетичке енергије</u>



$$h=\mathrm{AC}-\mathrm{DK}=l-\Delta_{\mathrm{K}}=3R-\Delta_{\mathrm{K}}$$

$$E_{k_{\mathrm{K}}}-E_{k_{\mathrm{A}}}=A_{\mathrm{AK}}$$

$$E_{k_{\mathrm{K}}}-E_{k_{\mathrm{A}}}=A_{\mathrm{AK}}^{mg}+\underbrace{A_{\mathrm{AD}}^{N}}_{0}+A_{\mathrm{DK}}^{F_e}$$

$$\underbrace{\frac{mv_{\mathrm{K}}^2}{2}}_{0}-\frac{mv_{\mathrm{A}}^2}{2}=-mg(3R-\Delta_{\mathrm{K}})+\frac{1}{2}c\left(\underbrace{\Delta_{\mathrm{D}}^2}_{0}-\Delta_{\mathrm{K}}^2\right)$$

$$-8mgR=-3mgR+mg\Delta_{\mathrm{K}}-\frac{1}{2}c\Delta_{\mathrm{K}}^2$$

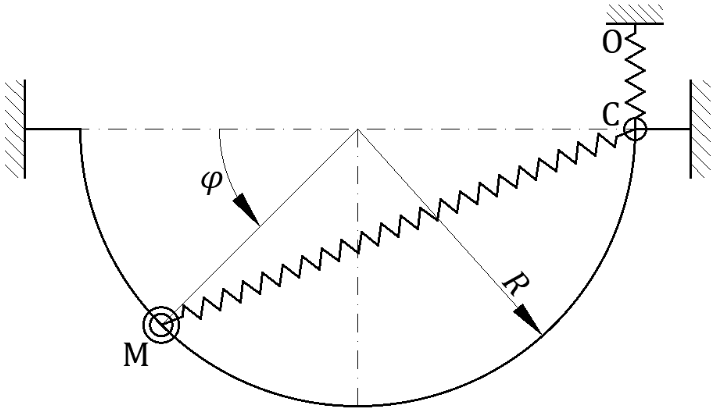
$$c\Delta_{\mathrm{K}}^2-2mg\Delta_{\mathrm{K}}-10mgR=0$$

$$\Delta_{\mathrm{K}_{1/2}}=\frac{2mg\pm\sqrt{4m^2g^2+40mgRc}}{2c}$$

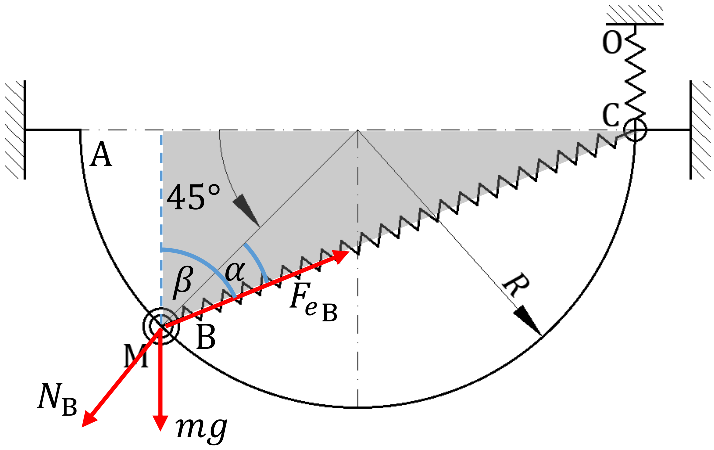
$$\Delta_{\mathrm{K}_{1/2}}=\frac{2\cdot 0{,}5\cdot 9{,}81\pm\sqrt{4\cdot 0{,}5^2\cdot 9{,}81^2+40\cdot 0{,}5\cdot 9{,}81\cdot 1\cdot 300}}{2\cdot 300}=\begin{cases}\Delta_{\mathrm{K}_1}=-0{,}388\\ \boxed{\boldsymbol{\Delta_{\mathrm{K}_2}=0{,}421}}\end{cases}$$

ЗАДАТАК БРОЈ 3

Прстен масе m може да клизи у вертикалној равни по непомичној кружно савијеној глаткој жици. За прстен је везана еластична опруга чија је крутост $c = mg/(2R)$ која је провучена кроз отвор C и везана за непомичну тачку O. Дужина неистегнуте опруге је OC. Ако је прстен започео кретање из положаја $\varphi_0 = 0$ без почетне брзине, одредити његову брзину у положају $\varphi^* = 45°$ и реакцију везе у том положају.



Закон о промјени кинетичке енергије



Брзина у тачки B

$$\Delta_{\mathrm{A}} = \mathrm{AC} = 2R$$

$$\Delta_{\mathrm{B}} = \mathrm{BC} = \sqrt{(R\sin 45°)^2 + (R + R\cos 45°)^2} = \sqrt{\frac{R^2}{2} + R^2\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = R\sqrt{2+\sqrt{2}}$$

$$E_{k_{\mathrm{B}}} - \underbrace{E_{k_{\mathrm{A}}}}_{0} = A_{\mathrm{AB}}^{mg} + \underbrace{A_{\mathrm{AB}}^{N}}_{0} + A_{\mathrm{AB}}^{F_e}$$

$$\frac{mv_{\mathrm{B}}^2}{2} = +mgR\sin 45° + \frac{1}{2}c\left(\Delta_{\mathrm{A}}^2 - \Delta_{\mathrm{B}}^2\right)$$

$$\frac{mv_{\mathrm{B}}^2}{2} = mgR\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}\frac{mg}{2R}\left(4R^2 - R^2\left(2+\sqrt{2}\right)\right)$$

$$v_{\mathrm{B}}^2 = \sqrt{2}gR + \frac{2-\sqrt{2}}{2}gR$$

$$\boldsymbol{v_{\mathrm{B}}^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + 1\right)gR}$$

Нормална реакција везе у тачки В

α – прва опција

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{R + R\cos 45^\circ}{R\sin 45^\circ} = \frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{2+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$

$$\alpha = \beta - 45^\circ$$

α – друга опција

$$\alpha = \frac{180^\circ - (180^\circ - 45)^\circ}{2} = \frac{45^\circ}{2}$$

$$m\vec{a}_{\mathrm{B}} = \vec{F}_{\mathrm{B}} \Rightarrow \begin{cases} m{a_t}_{\mathrm{B}} = \cdots \\ m{a_n}_{\mathrm{B}} = -N_{\mathrm{B}} - mg\sin 45^\circ + {F_e}_{\mathrm{B}}\cos\alpha \end{cases}$$

$$N_{\mathrm{B}} = -m\frac{v_{\mathrm{B}}^2}{R} - mg\sin 45^\circ + c\Delta_{\mathrm{B}}\cos\alpha$$

$$N_{\mathrm{B}} = -m\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+1\right)g - mg\frac{\sqrt{2}}{2} + cR\sqrt{2+\sqrt{2}}\cos\frac{45^\circ}{2}$$

$$N_{\mathrm{B}} = -\sqrt{2}mg - mg + \frac{mg}{2R}R\sqrt{2+\sqrt{2}}\cos\frac{45^\circ}{2}$$

$$\boldsymbol{N_{\mathrm{B}} = mg\left(-\sqrt{2} - 1 + \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}\cos\frac{45^\circ}{2}\right)}$$