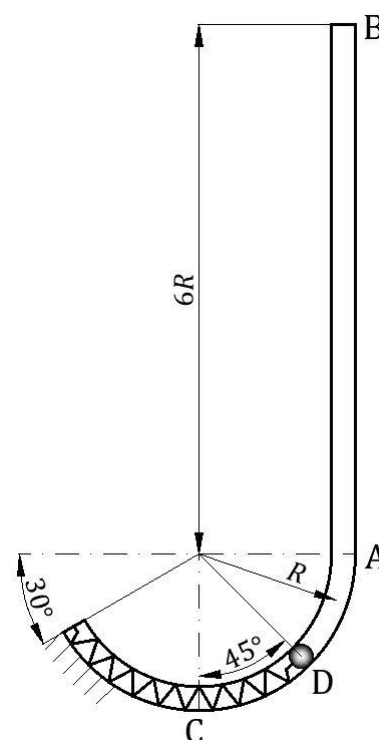


ПРВИ КОЛОКВИЈУМ ИЗ ДИНАМИКЕ СА ТЕОРИЈОМ ОСЦИЛАЦИЈА

1. Са висине h у односу на подлогу куглици масе 2 kg саопштава се хоризонтална брзина од 4 m/s . Све вријеме током кретања на њу дјелује вертикална сила отпора пропорционална вертикалној компоненти брзине с коефицијентом пропорционалности $0,5$.
- Одредити висину h са које је започето кретање ако се зна да куглици треба 10 s да дође до подлоге.
 - Колико пута је дуже вријеме путовања куглице у том случају у односу на ситуацију када су сви отпори занемарљиви?

2. Куглици масе 2 kg саопштава се кретање у вертикалној равни без почетне брзине дејством силе у опрузи која је ненапрегнута у положају А.
- Користећи се законом о промјени кинетичке енергије тачке одредити крутост опруге ако се зна да куглица напушта цијев брзином од 1 m/s , а да је кретање започето из положаја С. Куглица није везана за опругу, а сви отпори су занемарљиви.
 - Одредити инерцијалну силу у положају D.

Дато је: $R = 2,234 \text{ m}$.

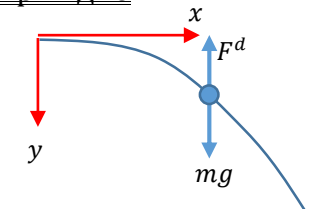


ПРВИ ЗАДАТАК

Са висине h у односу на подлогу куглици масе 2 kg саопштава се хоризонтална брзина од 4 m/s . Све вријеме током кретања на њу дјелује вертикална сила отпора пропорционална вертикалној компоненти брзине с коефицијентом пропорционалности $0,5$.

- Одредити висину h са које је започето кретање ако се зна да куглици треба 10 s да дође до подлоге.
- Колико пута је дуже вријеме путовања куглице у том случају у односу на ситуацију када су сви отпори занемарљиви?

Први дио



$$m\vec{a} = \vec{F} \Rightarrow \begin{cases} ma_x = 0 \\ ma_y = mg - F^d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ma_x = 0 \\ ma_y = mg - kv_y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = g - \frac{k}{m}v_y \end{cases}$$

$$\left. \begin{aligned} a_y &= g - \frac{k}{m}v_y \\ a_y &= \frac{dv_y}{dt} \end{aligned} \right\} \Rightarrow dv_y = \left(g - \frac{k}{m}v_y \right) dt$$

Претходни израз не може да се интегрални у овом облику, јер на десној страни имамо и v_y и t , а v_y се мијења са промјеном времена t , али не знамо на који начин се мијења. Међутим, на лијевој страни се интеграција врши по v_y , па ћемо израз унутар заграде пребацити лијево.

$$\frac{dv_y}{g - \frac{k}{m}v_y} = dt \Rightarrow \int_0^{v_y} \frac{dv_y}{g - \frac{k}{m}v_y} = \int_0^t dt \Rightarrow \frac{1}{-\frac{k}{m}} \int_0^{v_y} \frac{-\frac{k}{m}dv_y}{g - \frac{k}{m}v_y} = \int_0^t dt$$

$$-\frac{m}{k} \left(\ln \left| g - \frac{k}{m}v_y \right| - \ln |g| \right) = t \Rightarrow \ln \frac{\left| g - \frac{k}{m}v_y \right|}{g} = -\frac{kt}{m} \Rightarrow \frac{\left| g - \frac{k}{m}v_y \right|}{g} = e^{-\frac{kt}{m}}$$

$$\frac{k}{m}v_y = g - ge^{-\frac{kt}{m}} \Rightarrow v_y = \frac{mg}{k} \left(1 - e^{-\frac{kt}{m}} \right)$$

$$\left. \begin{aligned} v_y &= \frac{mg}{k} \left(1 - e^{-\frac{kt}{m}} \right) \\ v_y &= \frac{dy}{dt} \end{aligned} \right\} \Rightarrow dy = \frac{mg}{k} \left(1 - e^{-\frac{kt}{m}} \right) dt \Rightarrow \int_0^h dy = \frac{mg}{k} \int_0^{t^\#} \left(1 - e^{-\frac{kt}{m}} \right) dt$$

$$h = \frac{mg}{k} \left(t^\# + \frac{m}{k} \left(e^{-\frac{t^\#k}{m}} - 1 \right) \right) = \frac{2 \cdot 9,81}{0,5} \left(10 + \frac{2}{0,5} \left(e^{-\frac{10 \cdot 0,5}{2}} - 1 \right) \right) = 248,324 \text{ m}$$

Други дио

$$m\vec{a} = \vec{F} \Rightarrow \begin{cases} ma_x = 0 \\ ma_y = mg \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = g \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} a_y = g \\ a_y = \frac{dv_y}{dt} \end{array} \right\} \Rightarrow dv_y = gdt \Rightarrow \int_0^{v_y} dv_y = g \int_0^t dt \Rightarrow v_y = gt$$

$$\left. \begin{array}{l} v_y = gt \\ v_y = \frac{dy}{dt} \end{array} \right\} \Rightarrow dy = gtdt \Rightarrow \int_0^h dy = g \int_0^{t^*} tdt \Rightarrow h = \frac{gt^{*2}}{2} \Rightarrow t^* = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 248,324}{9,81}} = 7,115 \text{ s}$$

$$\frac{t^\#}{t^*} = \frac{10}{7,115} = 1,405$$

ДРУГИ ЗАДАТАК

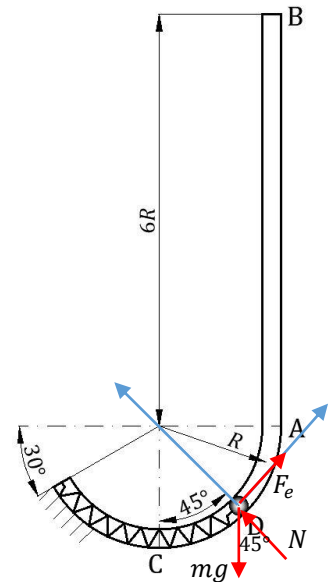
Куглици масе 2 kg саопштава се кретање у вертикалној равни без почетне брзине дејством силе у опрузи која је ненапрегнута у положају А.

- Користећи се законом о промјени кинетичке енергије тачке одредити крутост опруге ако се зна да куглица напушта цијев брзином од 1 m/s, а да је кретање започето из положаја С. Куглица није везана за опругу, а сви отпори су занемарљиви.
- Одредити инерцијалну силу у положају D.

Дато је: $R = 2,234$ m.

Први дио

$$\Delta_C = \frac{R\pi}{2}$$



$$E_{k_B} - \underbrace{E_{k_C}}_0 = A_{CB}^{mg} + \underbrace{A_{CB}^N}_0 + A_{CA}^{F_e}$$

$$\frac{mv_B^2}{2} = -mg(R + 6R) + \frac{1}{2}c(\Delta_C^2 - \underbrace{\Delta_A^2}_0)$$

$$mv_B^2 = -14mgR + c\Delta_C^2$$

$$c = \frac{mv_B^2 + 14mgR}{\frac{R^2\pi^2}{2^2}} = \frac{4m(v_B^2 + 14gR)}{R^2\pi^2} = \frac{8 \cdot (1^2 + 14 \cdot 9,81 \cdot 2,234)}{2,234^2 \cdot 3,14^2} = 50 \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

Други дио

$$m\vec{a}_D = \vec{F}_D \Rightarrow \begin{cases} ma_{tD} = F_{eD} - mg \sin 45^\circ \\ ma_{nD} = N_D - mg \cos 45^\circ \end{cases}$$

$$\boxed{a_{tD}} = \frac{F_{eD}}{m} - g \sin 45^\circ = \frac{c\Delta_D}{m} - g \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{cR\pi}{4m} - g \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{50 \cdot 2,234 \cdot 3,14}{4 \cdot 2} - 9,81 \frac{\sqrt{2}}{2} = \boxed{36,928 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}$$

$$E_{k_D} - \underbrace{E_{k_C}}_0 = A_{CD}^{mg} + \underbrace{A_{CD}^N}_0 + A_{CD}^{F_e}$$

$$\frac{mv_D^2}{2} = -mg(R - R \cos 45^\circ) + \frac{1}{2}c(\Delta_C^2 - \Delta_D^2)$$

$$v_D^2 = \frac{2}{m} \left(-mgR \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) + \frac{1}{2}c \left(\left(\frac{R\pi}{2} \right)^2 - \left(\frac{R\pi}{4} \right)^2 \right) \right)$$

$$v_D^2 = gR(\sqrt{2} - 2) + \frac{3}{16} \frac{c}{m} R^2 \pi^2 = 9,81 \cdot 2,234 \cdot (\sqrt{2} - 2) + \frac{3}{16} \frac{50}{2} \cdot 2,234^2 \cdot 3,14^2 = 218,053$$

$$\boxed{a_{nD}} = \frac{v_D^2}{R} = \frac{218,053}{2,234} = \boxed{97,607 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}$$

$$a_D = \sqrt{a_{tD}^2 + a_{nD}^2} = \sqrt{36,928^2 + 97,607^2} = 104,36 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$\mathbf{F_{inD}} = ma_D = \mathbf{208,72 \text{ N}}$$