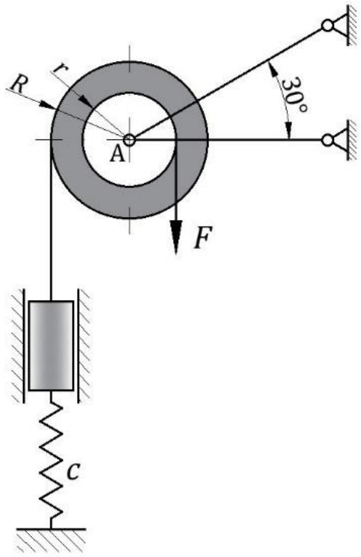
Универзитет Црне Горе
Машински факултет Подгорица 24. 12. 2025.

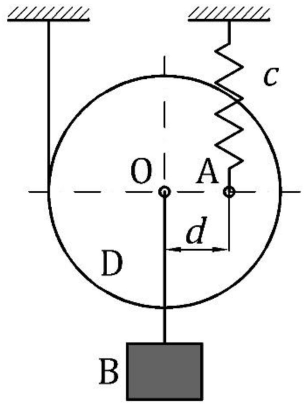
ДРУГИ КОЛОКВИЈУМ ИЗ ДИНАМИКЕ СА ТЕОРИЈОМ ОСЦИЛАЦИЈА

1. Котур се састоји од два хомогена коаксијална диска – већег масе 20 kg и полупречника $R = 0{,}4$ m и мањег масе 5 kg и полупречника $r = 0{,}2$ m. Котур се обрће у вертикалној равни око осе која пролази кроз зглоб А учвршћен лаким крутим штаповима. На већи диск је намотано неистегљиво уже за чији је слободни крај везан тег масе 6 kg који је с доње стране везан за аксијалну опругу крутости 10 N/m. На мањи диск је намотано уже чији се слободни крај вуче вертикалном силом $F = 124$ N. Ако је кретање почело из мира при чему опруга није била деформисана у том положају, одредити број обртаја диска до заустављања користећи се:

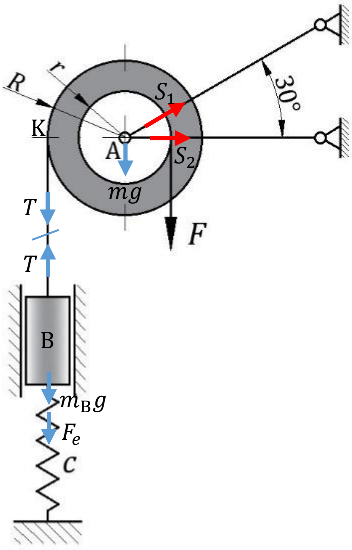


- диференцијалним једначинама кретања крутих тијела;
- законом о промјени кинетичке енергије система.

2. Лака неистегљива нит обмотана је око хомогеног кружног диска D масе $2m$ и полупречника $4R$ и везана за непомични ослонац. За центар инерције диска везано је тијело B масе $m/2$. Равнотежни положај система одржава опруга крутости c везана у тачки A. Систем може да врши мале осцилације у околини равнотежног положаја. Одредити коначну једначину осциловања ако се тијело B повуче наниже за 5 cm из равнотежног положаја и пусти да осцилује без почетне брзине. Дато је: $c = 100$ N/m, $m = 2$ kg, $R = 1{,}5$ m, $d = 1$ m.



ПРВИ ЗАДАТАК



Котур се састоји од два хомогена коаксијална диска – већег масе 20 kg и полупречника $R = 0{,}4$ m и мањег масе 5 kg и полупречника $r = 0{,}2$ m. Котур се обрће у вертикалној равни око осе која пролази кроз зглоб A учвршћен лаким крутим штаповима. На већи диск је намотано неистегљиво уже за чији је слободни крај везан тег масе 6 kg који је с доње стране везан за аксијалну опругу крутости 10 N/m. На мањи диск је намотано уже чији се слободни крај вуче вертикалном силом $F = 124$ N. Ако је кретање почело из мира при чему опруга није била деформисана у том положају, одредити број обртаја диска до заустављања користећи се:

- диференцијалним једначинама кретања крутих тијела;
- законом о промјени кинетичке енергије система.

<u>Диференцијалне једначине кретања крутих тијела</u>

$$\left.\begin{array}{l} v_\mathrm{K} = v_\mathrm{B} \\ v_\mathrm{K} = R\omega \end{array}\right\} \Rightarrow v_\mathrm{B} = R\omega \Rightarrow \begin{array}{l} a_\mathrm{B} = R\varepsilon \\ x_\mathrm{B} = R\varphi \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} I_\mathrm{A}\varepsilon = Fr - TR \\ m_\mathrm{B}a_\mathrm{B} = T - m_\mathrm{B}g - F_e \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \left(\dfrac{m_1R^2}{2} + \dfrac{m_2r^2}{2}\right)\varepsilon = Fr - TR \\ m_\mathrm{B}R\varepsilon = T - m_\mathrm{B}g - F_e \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \dfrac{1}{R}\left(\dfrac{m_1R^2}{2} + \dfrac{m_2r^2}{2}\right)\varepsilon = F\dfrac{r}{R} - T \\ m_\mathrm{B}R\varepsilon = T - m_\mathrm{B}g - F_e \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\left(\frac{m_1R}{2} + \frac{m_2r^2}{2R} + m_\mathrm{B}R\right)\varepsilon = F\frac{r}{R} - m_\mathrm{B}g - F_e \Rightarrow \varepsilon = \frac{F\frac{r}{R} - m_\mathrm{B}g - F_e}{\frac{m_1R}{2} + \frac{m_2r^2}{2R} + m_\mathrm{B}R} = \frac{124\frac{0{,}2}{0{,}4} - 6\cdot 9{,}81 - 10x_\mathrm{B}}{\frac{20\cdot 0{,}4}{2} + \frac{5\cdot 0{,}2^2}{2\cdot 0{,}4} + 6\cdot 0{,}4}$$

$$\left.\begin{array}{l} \varepsilon = 0{,}472 - 1{,}504x_\mathrm{B} = 0{,}472 - 0{,}602\varphi \\ \varepsilon = \dfrac{d\omega}{dt}\dfrac{d\varphi}{d\varphi} = \dfrac{\omega d\omega}{d\varphi} \end{array}\right\} \Rightarrow \int_0^0 \omega d\omega = \int_0^{\varphi^*} (0{,}472 - 0{,}602\varphi)d\varphi$$

$$0{,}472\varphi^* - 0{,}602\frac{\varphi^{*2}}{2} = 0 \Rightarrow \varphi^*\left(0{,}472 - 0{,}602\frac{\varphi^*}{2}\right) = 0 \Rightarrow \varphi^* = 2\frac{0{,}472}{0{,}602} = 1{,}57 \text{ rad} \Rightarrow \boldsymbol{N}^*\left(= \frac{\varphi^*}{2\pi}\right) = \boldsymbol{\frac{1}{4}}$$

<u>Закон о промјени кинетичке енергије система</u>

$$\Delta_1 = x_\mathrm{B}^* = R\varphi^*$$

$$\underbrace{E_{k_1}}_{0} - \underbrace{E_{k_1}}_{0} = A_{0-1}^{F_e} + A_{0-1}^{m_\mathrm{B}g} + A_{0-1}^{F}$$

$$\frac{1}{2}c\left(\underbrace{\Delta_0^2}_{0} - \Delta_1^2\right) - m_\mathrm{B}gx_\mathrm{B}^* + \int_0^{\varphi^*} Fr d\varphi = 0$$

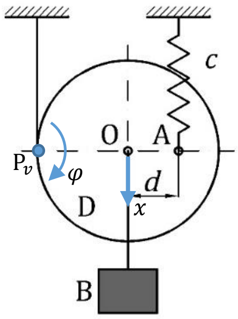
$$-\frac{1}{2}cR^2\varphi^{*2} - m_\mathrm{B}gR\varphi^* + Fr\varphi^* = 0$$

$$\varphi^*\left(-\frac{1}{2}cR^2\varphi^* - m_\mathrm{B}gR + Fr\right) = 0$$

$$\varphi^* = 2\frac{Fr - m_\mathrm{B}gR}{cR^2} = 2\frac{124\cdot 0{,}2 - 6\cdot 9{,}81\cdot 0{,}4}{10\cdot 0{,}4^2} = 1{,}57 \text{ rad} \Rightarrow \boldsymbol{N}^*\left(= \frac{\varphi^*}{2\pi}\right) = \boldsymbol{\frac{1}{4}}$$

ДРУГИ ЗАДАТАК

Лака неистегљива нит обмотана је око хомогеног кружног диска D масе $2m$ и полупречника $4R$ и везана за непомични ослонац. За центар инерције диска везано је тијело B масе $m/2$. Равнотежни положај система одржава опруга крутости c везана у тачки A. Систем може да врши мале осцилације у околини равнотежног положаја. Одредити коначну једначину осциловања ако се тијело B повуче наниже за 5 cm из равнотежног положаја и пусти да осцилује без почетне брзине. Дато је: $c = 100\ \text{N/m}$, $m = 2$ kg, $R = 1{,}5$ m, $d = 1$ m.



$$q = x$$

$$\left.\begin{array}{l} v_{\mathrm{O}} = \overline{\mathrm{OP}_v}\Omega = 4R\dot{\varphi} \\ v_{\mathrm{O}} = \dot{x} \end{array}\right\} \Rightarrow \dot{\varphi} = \frac{\dot{x}}{4R}, \qquad v_{\mathrm{A}} = \overline{\mathrm{AP}_v}\Omega = (d+4R)\dot{\varphi} = \left(\frac{d}{4R}+1\right)\dot{x} \Rightarrow s_{\mathrm{A}}(=\Delta_d) = \left(\frac{d}{4R}+1\right)x$$

$$E_k = \frac{1}{2}m_{\mathrm{D}}v_{\mathrm{O}}^2 + \frac{1}{2}I_{\mathrm{DO}}\Omega^2 + \frac{1}{2}m_{\mathrm{B}}v_{\mathrm{B}}^2 = \frac{1}{2}2m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\frac{2m(4R)^2}{2}\frac{\dot{x}^2}{16R^2} + \frac{1}{2}\frac{m}{2}\dot{x}^2 = \frac{1}{2}\left(2m + m + \frac{m}{2}\right)\dot{x}^2$$

$$\boxed{a_{11} = \frac{7}{2}m = 7}$$

$$E_p = \frac{1}{2}c\Delta^2 - m_{\mathrm{B}}gx - m_{\mathrm{D}}gx = \frac{1}{2}c(\Delta_s + \Delta_d)^2 - \frac{m}{2}gx - 2mgx = \frac{1}{2}c\left(\Delta_s + \left(\frac{d}{4R}+1\right)x\right)^2 - \frac{5}{2}mgx$$

$$\frac{\partial E_p}{\partial x} = c\left(\Delta_s + \left(\frac{d}{4R}+1\right)x\right)\left(\frac{d}{4R}+1\right) - \frac{5}{2}mg$$

$$\frac{\partial^2 E_p}{\partial x^2} = c\left(\frac{d}{4R}+1\right)^2 = 100\left(\frac{1}{4\cdot 1{,}5}+1\right)^2 = 136{,}11 \Rightarrow \boxed{c_{11} = 136{,}11}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{c_{11}}{a_{11}}} = \sqrt{\frac{136{,}11}{7}} = 4{,}41$$

$$A = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{\dot{x}_0}{\omega}\right)^2} = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{\dot{x}_0}{\omega}\right)^2} = x_0 = 0{,}05, \qquad \sin\alpha = \frac{x_0}{A} = \frac{0{,}05}{0{,}05} = 1 \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{2}$$

$$x = A\sin(\omega t + \alpha)$$

$$\boldsymbol{x = 0{,}05\sin\left(4{,}41t + \frac{\pi}{2}\right)}$$