1. Dinamika materijalne tačke

Dinamika je dio mehanike koji proučava kretanja materijalnih tijela pod dejstvom sila.

Materijalnom tijelu se pridružuje pojam mase, kao mjere inertnosti tijela – svojstva materijalnog tijela da se protivi promjeni stanja svog kretanja. Masa je pozitivna skalarna veličina; njena jedinica mjere je kilogram (kg), i to je osnovna jedinica u međunarodnom sistemu (SI) jedinica.

Sila je veličina koja predstavlja količinsku mjeru uzajamnog dejstva materijalnih tijela. Ona je, kao što je poznato iz statike, vektorska veličina koja je određena svojim intezitetom, pravcem i smjerom.

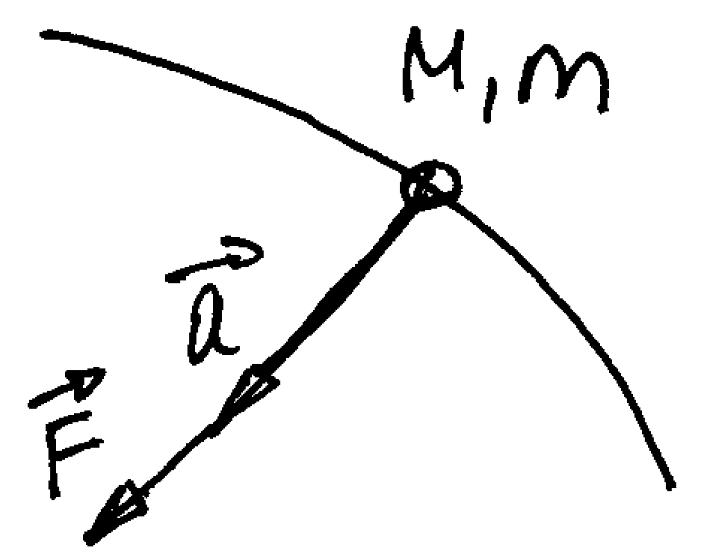
Materijalna tačka je najjednostavniji model u dinamici. To je materijalno tijelo čije se dimenzije pri proučavanju kretanja mogu zanemariti. Drugim riječima, to je geometrijska tačka koja posjeduje konačnu masu. Ova idealizacija je opravdana kada su pređena rastojanja, koja izvrše tačke tijela, mnogo veća od dimenzija samog tijela. Takođe, translatorno kretanje tijela može se uvijek tretirati kao kretanje materijalne tačke čija je masa jednaka masi tijela.

1.1 Osnovni zakoni dinamike (Njutnovi zakoni)

Osnovni zakoni dinamike odnose se na model materijalne tačke. Oni imaju status aksioma, tj. usvajaju se bez dokazivanja, a njihova ispravnost je potvrđena mnogovjekovnom praktičnom djelatnošću čovjeka. Formulisao ih je Isak Njutn u svom čuvenom djelu "Matematički osnovi prirodne filozofije" izdatom 1687. godine.

<u>Prvi Njutnov zakon</u> (<u>zakon inercije</u>). Materijalna tačka ostaje u stanju mirovanja ili jednolikog pravolinijskog kretanja sve dok pod dejstvom sile ne bude prinuđena da to stanje promijeni.

<u>Drugi Njutnov zakon</u> (<u>osnovni zakon dinamike</u>). Proizvod mase i ubrzanja materijalne tačke, koje ona dobija kada na nju djeluje sila, jednak je po intezitetu toj sili a pravac i smjer ubrzanja se poklapaju sa pravcem i smjerom sile.



Ako je m – masa tačke, $\vec{a}$ – ubrzanje tačke i $\vec{F}$ – sila koja djeluje na tačku, onda se ovaj zakon izražava vektorskom jednačinom:

$$m\vec{a} = \vec{F} \qquad (1)$$

koja se često naziva osnovna jednačina dinamike materijalne tačke.

Ako na materijalnu tačku djeluje istovremeno više sila $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \ldots, \vec{F}_n$, njihovo se dejstvo može zamijeniti dejstvom jedne sile – rezultante tih sila. U ovom slučaju drugi Njutnov zakon ima oblik

$$m\vec{a} = \vec{F}_R = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i,$$

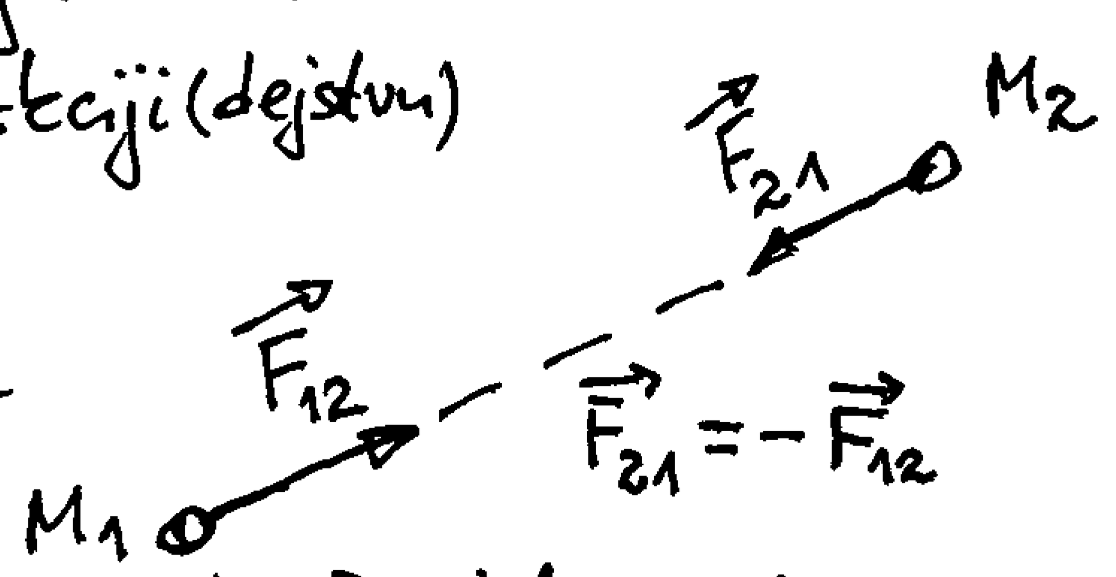
gdje je $\vec{F}_R = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i$ rezultanta svih sila koje djeluju na uočenu tačku.

Prvi i drugi Njutnov zakon važe u inercijalnim koordinatnim sistemima. To su koordinatni sistemi koji su nepokretni u odnosu na apsolutni (nepokretni) prostor, čije je postojanje Njutn pretpostavio, ili koji se kreću translatorno, pravolinijski i jednoliko. Strogo govoreći, takvi sistemi referencije ne postoje, ali se za većinu tehničkih zadataka, sa praktično zadovoljavajućom tačnošću, može smatrati da je koordinatni sistem vezan za površinu Zemlje inercijalni.

Jedinica za silu u SI sistemu je izvedena na osnovu (1) i zove se Njutn (N): $1\,N = 1\,kg\,\frac{m}{s^2}$. To je sila koja materijalnoj tački mase od 1 kg saopštava ubrzanje od $1\,m/s^2$.

<u>Treći Njutnov zakon</u> (<u>zakon akcije i reakcije</u>). Dvije materijalne tačke djeluju jedna na drugu silama jednakih intenziteta, suprotno usmjerenim duž prave koja spaja te tačke.

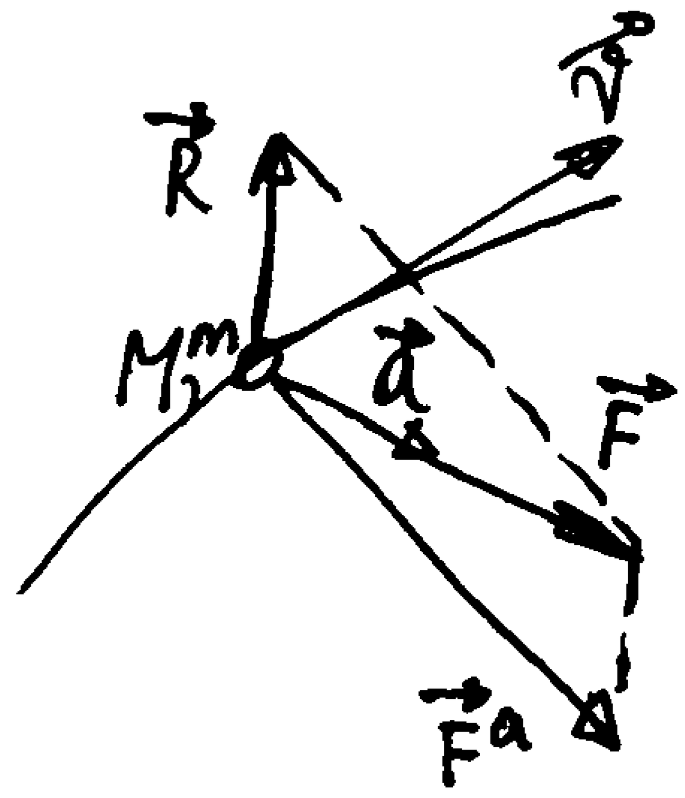
Kraće, često se ovaj zakon iskazuje riječima: Akciji (dejstvu) uvijek je jednaka reakcija (protivdejstvo).



Ovaj zakon ukazuje na izvor sile, tj. pokazuje da je za postojanje sile potrebno najmanje dva materijalna tijela od kojih je jedno izvor sile. Dejstvo sile se može ostvariti direktno – neposrednim kontaktom dva tijela ili indirektno – posredstvom fizičkog polja (npr. dejstvo gravitacionog polja Zemlje na tijelo u njenoj blizini).

<u>Napomena o neslobodnom kretanju tačke</u>. Važno je istaći da je drugi Njutnov zakon formulisan za slobodnu materijalnu tačku – tačku koja može da zauzme proizvoljan položaj u prostoru. U slučaju vezanog (neslobodnog) kretanja primjenjuje se <u>aksiom oslobađanja od veza</u>: Neslobodnu materijalnu tačku možemo posmatrati kao da je slobodna ako veze (tijela koja ograničavaju njeno kretanje) uklonimo i njihovo dejstvo na datu tačku zamijenimo silama reakcije veza. U skladu sa ovim, osnovna jednačina dinamike neslobodne tačke je oblika

$$m\vec{a} = \vec{F}, \quad \vec{F} = \vec{F}^a + \vec{R}, \qquad (2)$$



gdje je $\vec{F}^a$ rezultanta aktivnih sila (sila koje djeluju na materijalnu tačku bez obzira da li veze postoje ili ne), a $\vec{R}$ rezultanta sila reakcije veza.

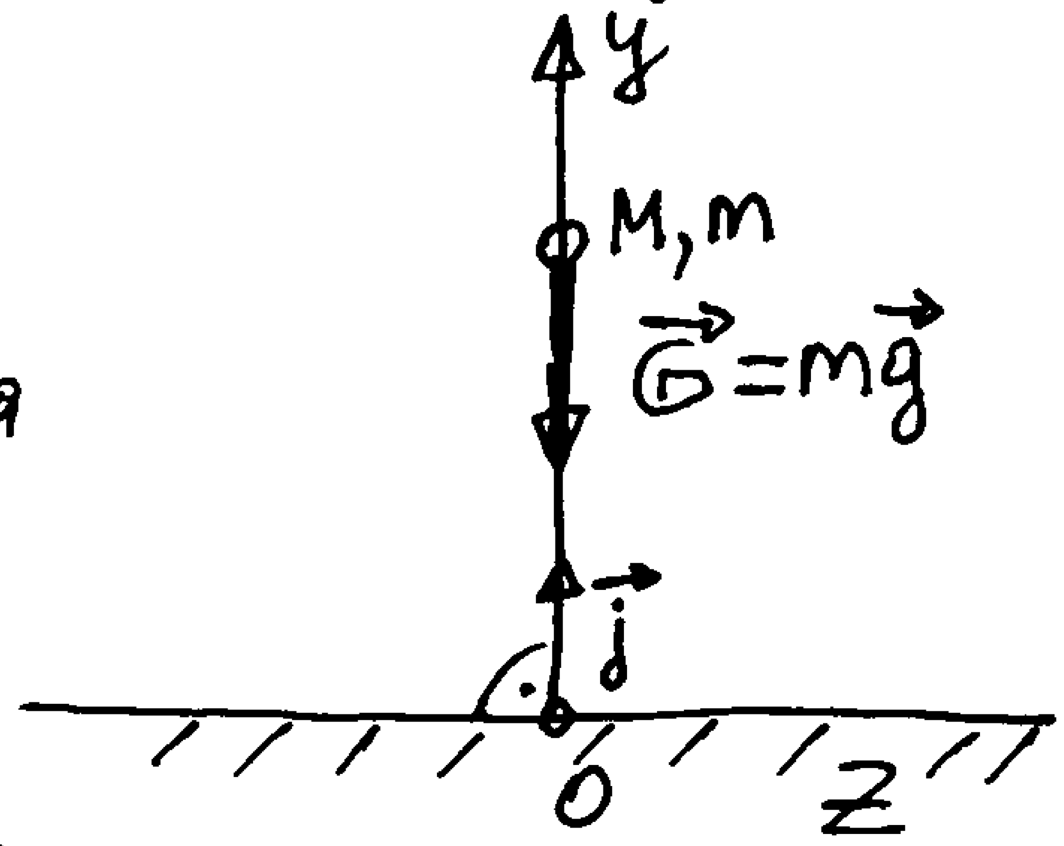
1.2 Nekoliko zakona sila

U opštem slučaju sila koja djeluje na materijalnu tačku može zavisiti od vremena t, položaja tačke $\vec{r}$ i njene brzine $\vec{v}$:

$$\vec{F} = \vec{F}(t, \vec{r}, \vec{v}). \qquad (3)$$

Zakoni konkretnih sila (analitičke zavisnosti oblika (3)) se po pravilu utvrđuju eksperimentalno i dalje navodimo neke od njih.

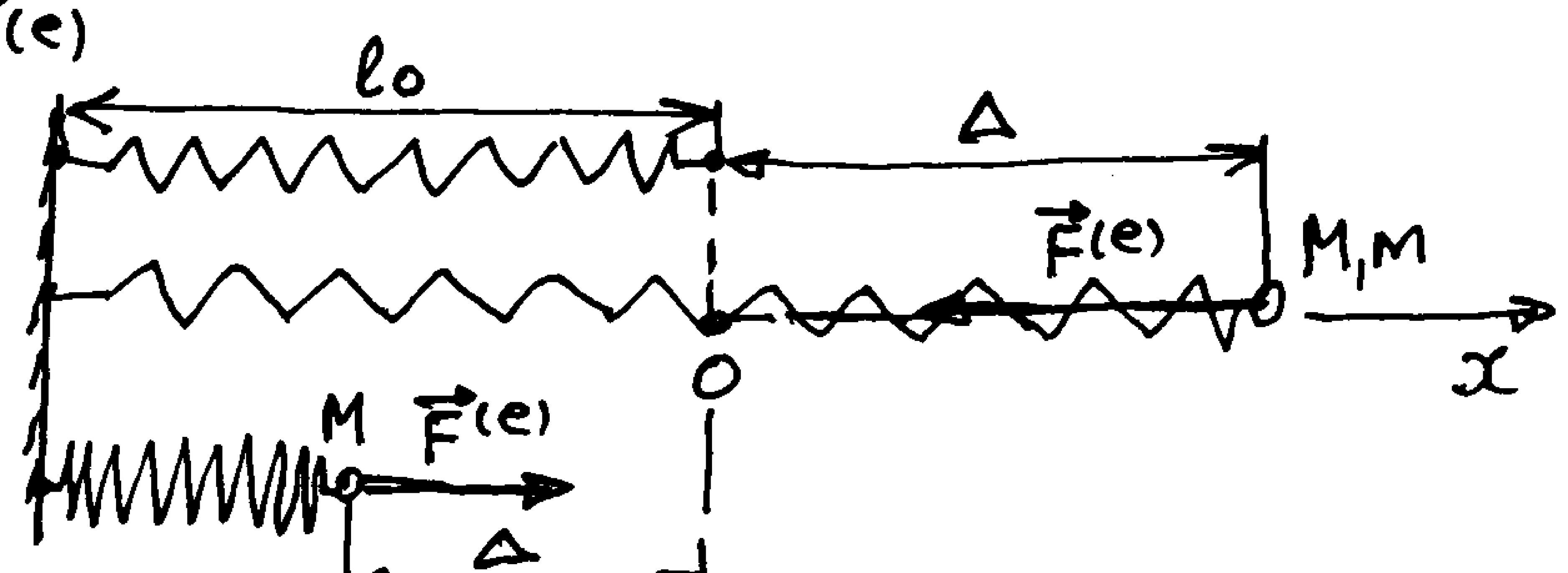
a) Sila Zemljine teže $\vec{G}$.



Ako se tijelo (materijalna tačka) mase m nalazi u blizine površine Zemlje (rastojanje tačke od Zemlje malo u odnosu na njen poluprečnik), onda se može smatrati da je sila kojom Zemlja privlači tijelo (sila teže) konstantna. Ona je određena težinom tijela $G = mg$, gdje je g ubrzanje slobodnog pada (ubrzanje sile teže), pravcem vertikale i smjerom ka Zemlji. Ubrzanje g zavisi od geografske širine mjesta, a za naša podnučja je $g = 9{,}81\ m/s^2$. Ako vertikalnu osu y orjentišemo kao na slici, onda je sila teže

$$\vec{G} = m\vec{g} = -mg\vec{j}$$

b) Elastična sila opruge $\vec{F}^{(e)}$



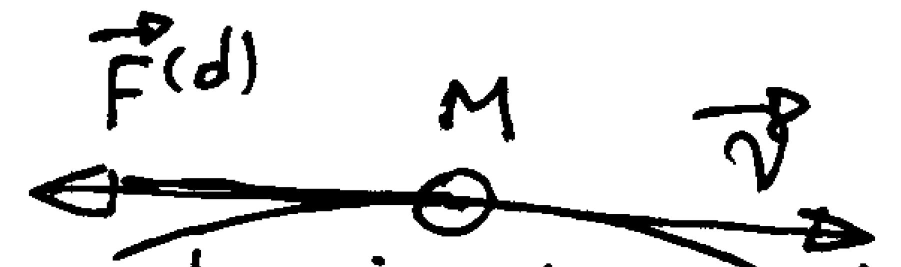
l_0 – dužina nedeformisane opruge. Intenzitet sile kojom opruga djeluje na materijalnu tačku M srazmjeran je (u domenu važenja Hukovog zakona) izduženju (skraćenju) opruge Δ, a konstanta proporcionalnosti je krutost opruge c: $F^{(e)} = c\Delta$. Sila $\vec{F}^{(e)}$ je usmjerena po osi opruge ka položaju koji odgovara kraju nedeformisane opruge. Ako x-osu postavimo kao na slici, elastičnu silu opruge možemo zapisati u vektorskom obliku:

$$\vec{F}^{(e)} = -c\,x\,\vec{i}$$

i kao što vidimo ona zavisi od položaja tačke.

c) Sile fluidnog otpora

Kada se tijelo kreće kroz fluid (vazduh, voda, ...) trpi određeni otpor koji suštinski zavisi od brzine. Sila otpora $\vec{F}^{(d)}$ ima pravac brzine, a smjer suproton od smjera kretanja.



Opšti oblik zavisnosti sile otpora od brzine je

$$\vec{F}^{(d)} = -F^{(d)}(v)\frac{\vec{v}}{v},$$

pri čemu se razlikuju dva tipična slučaja:

— viskozni otpor (javlja se pri manjim brzinama): $F^{(d)} = \beta v$, tj. $\vec{F}^{(d)} = -\beta\vec{v}$,

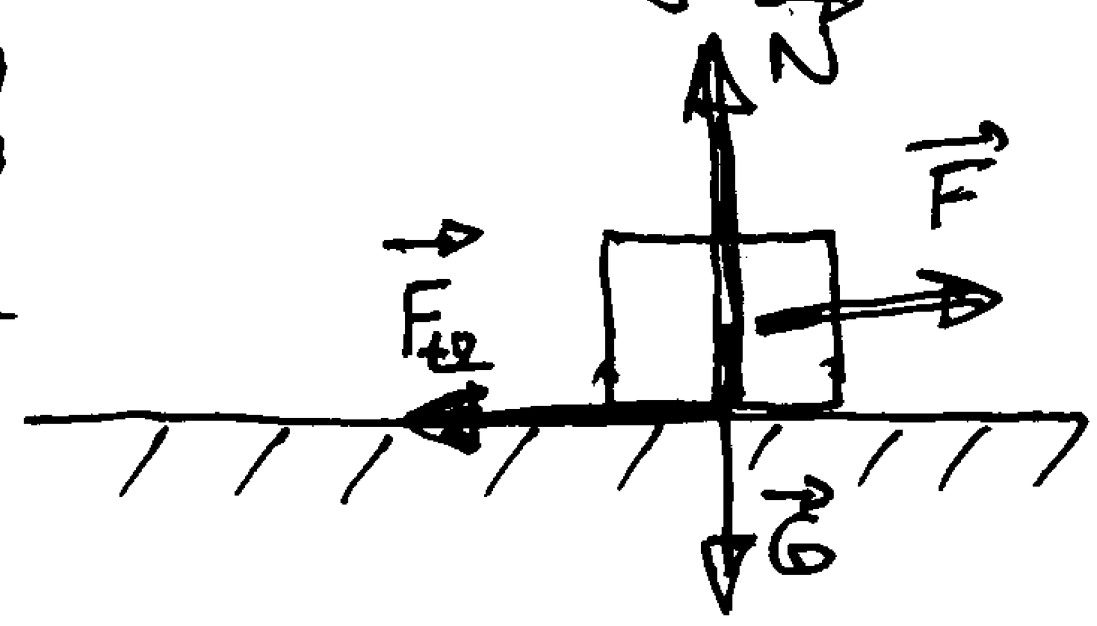
— turbulentni otpor (javlja se pri većim brzinama): $F^{(d)} = \gamma v^2$

Koeficijenti β i γ zavise od oblika tijela i fizičkih osobina otporne sredine.

d) Sila suvog (Kulonovog) trenja

Kulonovo ili suvo trenje se javlja na mjestima dodira dva tijela. Zbog hrapavosti tijela osim sile uzajamnog pritiska koja ima pravac normale na površine tijela u tački dodira, javlja se i sila trenja koja leži u tangentnoj ravni.

Eksperimenti potvrđuju da će tijelo koje se nalazi na hrapavoj horizontalnoj podlozi i izloženo je dejstvu aktivne horizontalne sile $\vec{F}$ ostati u stanju mirovanja sve dok aktivna sila ne dostigne određenu graničnu vrijednost. Ovu silu uravnotežuje sila trenja koja je usmjerena u suprotnom smjeru od smjera u kome aktivna sila teži da pomjeri tijelo. Dakle, u stanju mirovanja intezitet sile trenja se kreće između nule i granične vrijednosti:



$$0 \le F_{tr} \le F_{gr}$$

Intezitet granične sile trenja klizanja jednak je proizvodu statičkog koeficijenta trenja μ_s i sile uzajamnog pritiska (normalne reakcije) N:

$$F_{gr} = \mu_s N$$

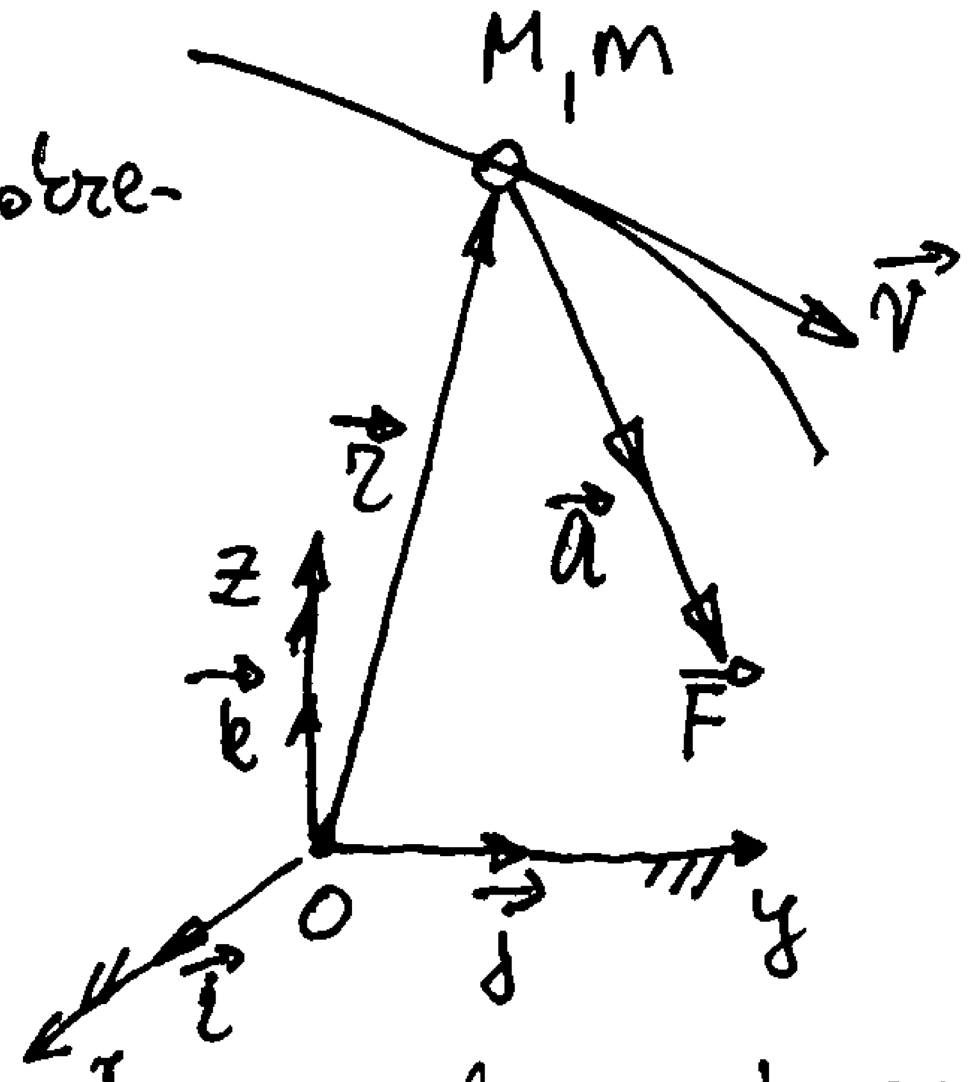
Koeficijent μ_s se određuje eksperimentalno. Ako se tijelo kreće, a intezitet sile trenja je određen relacijom

$$F_{tr} = \mu_D N,$$

(a smjer joj je suproton smjeru brzine)

gdje je μ_D dinamički koeficijent trenja. Dinamički koeficijent trenja je nešto manji od statičkog, ali se često, zbog jednostavnosti proračuna, uzima da je $\mu_D = \mu_s$.

1.3 Diferencijalne jednačine kretanja materijalne tačke



Neka se tačka M, mase m, kreće u inercijalnom (nepokretnom) sistemu referencije pod dejstvom rezultujuće sile $\vec F = \sum \vec F_i$. Imajući u vidu relaciju (3), kao i definicije brzine i ubrzanja tačke, $\vec v = \dot{\vec r}$ i $\vec a = \ddot{\vec r}$, drugi Njutnov zakon (1) dobija oblik

$$m\ddot{\vec r} = \vec F(t, \vec r, \dot{\vec r}), \qquad (4)$$

koji se naziva diferencijalna jednačina kretanja materijalne tačke u vektorskom obliku. Ona je diferencijalna jednačina drugog reda u kojoj je nezavisno promjenljiva vrijeme t, a zavisno promjenljiva vektor položaja tačke $\vec r$.

Projiciranjem vektorske jednačine (4) na ose odabranog koordinatnog sistema dobijaju se diferencijalne jednačine kretanja tačke u skalarnom (koordinatnom) obliku.

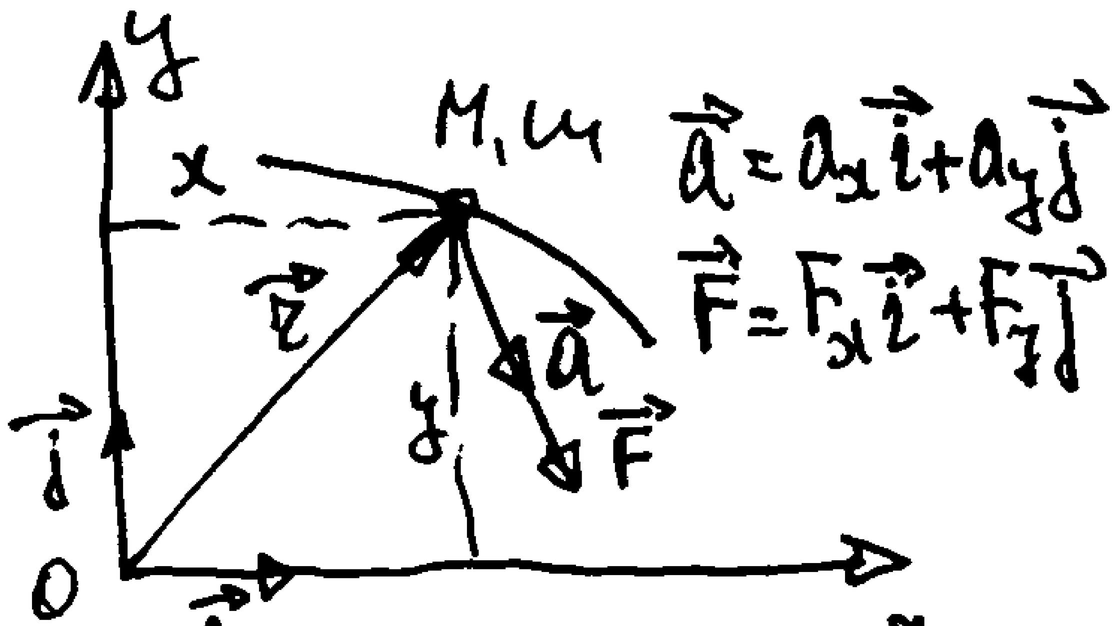
a) Diferencijalne jednačine u Dekartovim koordinatama.

Projicirajući jednačinu (4) na ose Dekartovog pravouglog koordinatnog sistema Oxyz, dobijamo tri skalarne jednačine

$$m\ddot x = F_x, \quad m\ddot y = F_y, \quad m\ddot z = F_z, \qquad (5)$$

gdje su $a_x = \ddot x$, $a_y = \ddot y$ i $a_z = \ddot z$ projekcije ubrzanja, a F_x, F_y i F_z projekcije sile na ose ovog koordinatnog sistema.

Jednačine (5) nazivaju se diferencijalne jednačine kretanja tačke u Dekartovim koordinatama.



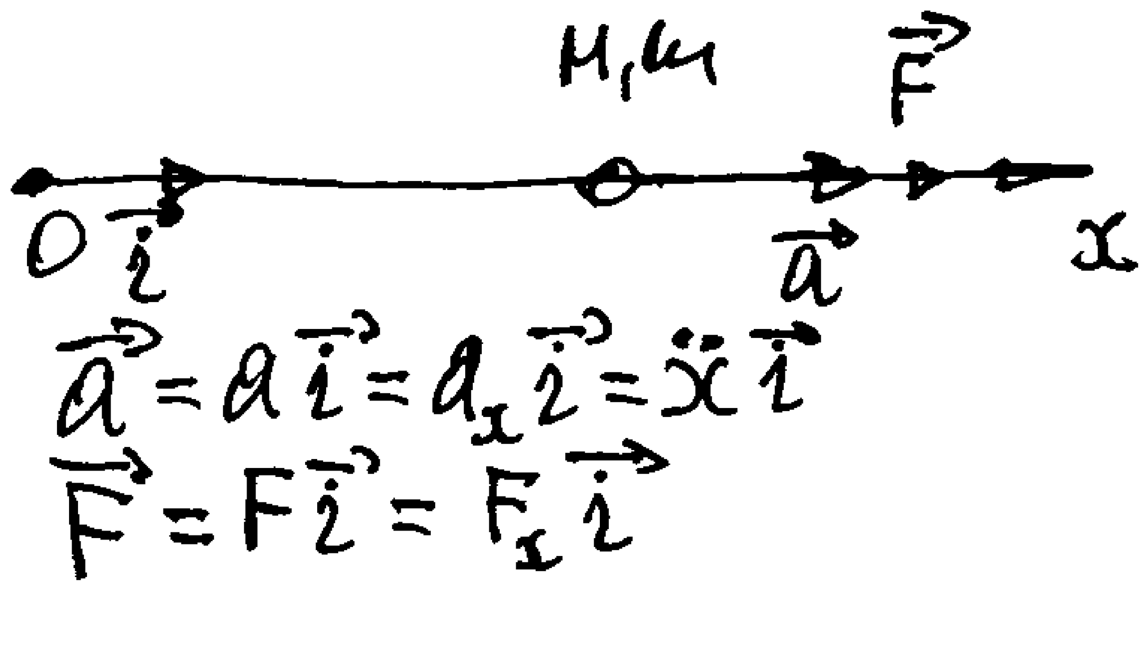
Ako se tačka kreće u ravni, recimo Oxy, sistem jednačina (5) se svodi na dvije

$$m\ddot x = F_x, \quad m\ddot y = F_y \qquad (6)$$

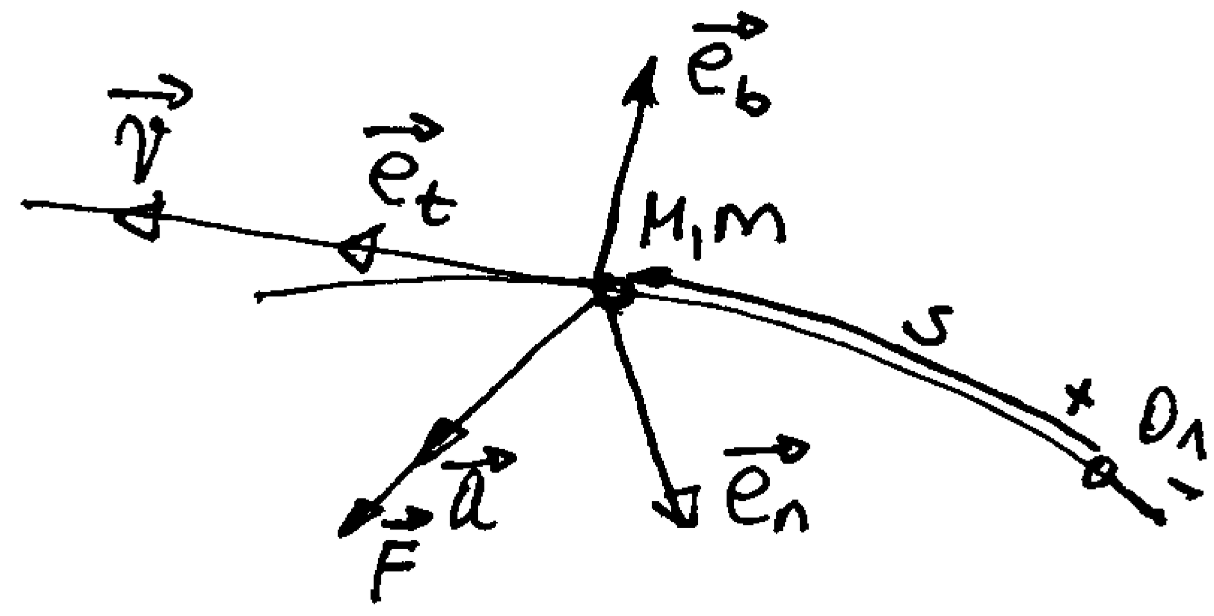
U slučaju pravolinijskog kretanja tačke, recimo duž x-ose, imamo samo jednu skalarnu jednačinu

$$m\ddot x = F_x, \qquad (7)$$

koja predstavlja diferencijalnu jednačinu pravolinijskog kretanja.



b) Diferencijalne jednačine u prirodnom koordinatnom sistemu (Ojlerove jednačine)



U prirodnom koordinatnom sistemu, koji čine tangenta na putanju tačke, glavna normala i binormala, određene jediničnim vektorima $\vec{e}_t, \vec{e}_n$ i $\vec{e}_b$, respektivno, vektori brzine i ubrzanja tačke dati su sa:

$$\vec{v} = v\vec{e}_t = \dot{s}\vec{e}_t;\ \vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n,\ \vec{a}_t = a_t\vec{e}_t = \frac{dv}{dt}\vec{e}_t = \ddot{s}\vec{e}_t,\ \vec{a}_n = a_n\vec{e}_n = \frac{v^2}{R_k}\vec{e}_n,$$

gdje je R_k poluprečnik krivine trajektorije u tački M.

Projiciranjem lijeve i desne strane osnovne vektorske jednačine (4) na ose prirodnog koordinatnog sistema dobija se

$$\left.\begin{aligned} m\frac{dv}{dt} &= F_t, \\ m\frac{v^2}{R_k} &= F_n, \\ 0 &= F_b, \end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

gdje su F_t, F_n i F_b projekcije rezultante svih sila koje djeluju na tačku na ose prirodnog trijedra.

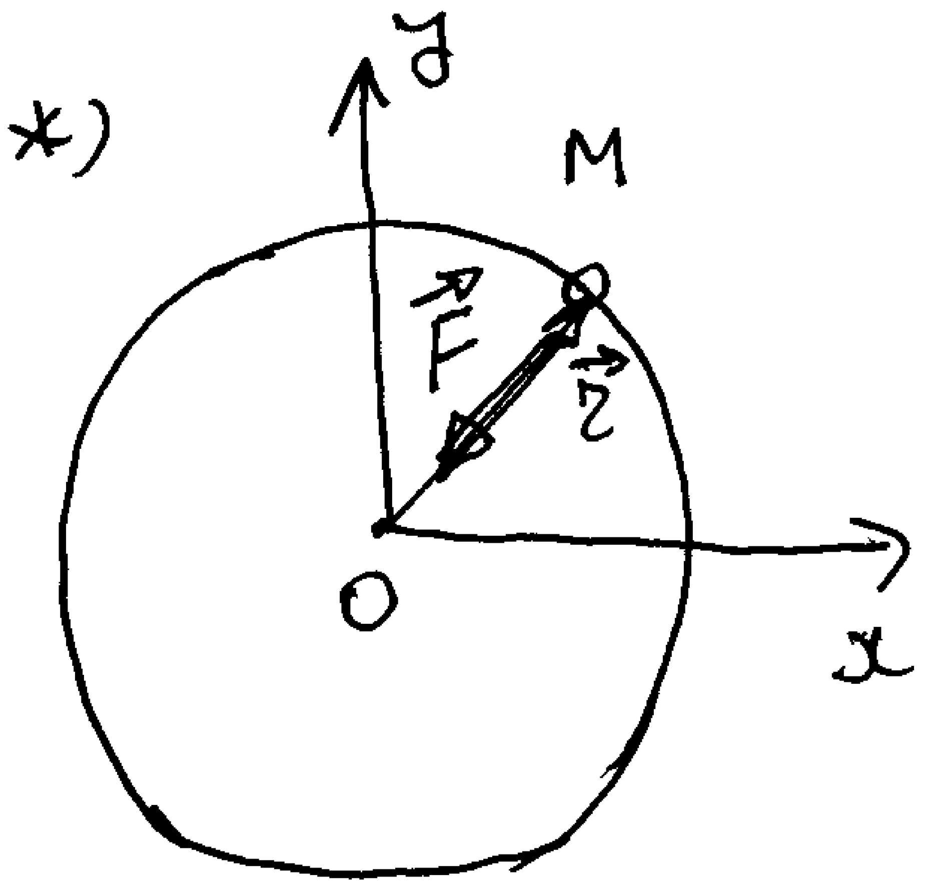
Jednačine (8) zovu se Ojlerove (prirodne) diferencijalne jednačine kretanja tačke. Ove jednačine pogodno je koristiti u slučajevima kada je poznata putanja tačke.

1.4 Osnovni zadaci dinamike tačke

a) Prvi (direktni) zadatak: Ako je poznato kretanje tačke i njena masa treba odrediti silu koja izaziva to kretanje.

Primjer 1. Konačne jednačine kretanja tačke M, mase $m = 1\,kg$, u ravni Oxy su

$$x = \cos 2t\ [m],\quad y = \sin 2t\ [m] \qquad (*)$$



Odrediti silu $\vec{F}$ koja djeluje na tačku.

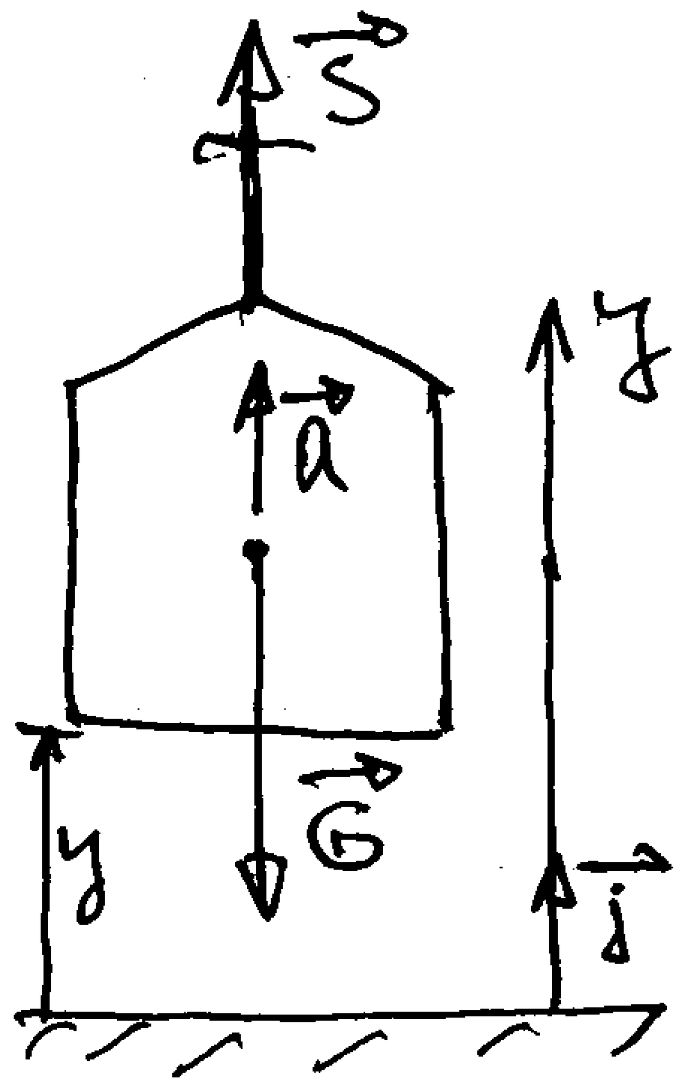
$$\vec{a} = \ddot{\vec{r}} = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} = -4(\cos 2t\,\vec{i} + \sin 2t\,\vec{j})$$

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} = \cos 2t\,\vec{i} + \sin 2t\,\vec{j}$$

$$\Rightarrow\ \vec{a} = -4\vec{r}\ [m/s^2]$$

$$\vec{F} = m\vec{a} = -4\vec{r}\ [N].$$

Primjer 2. Lift, čija je težina zajedno sa putnicima $G = 10\,000\,N$ (10 kN), počinje da se podiže ubrzanjem $a = 2\ m/s^2$. Odrediti silu zatezanja sajle, kojom je lift povezan sa elektromotorom.



Lift posmatramo kao materijalnu tačku, mase $m = \frac{G}{g}$, koja se kreće pravolinijski duž vertikalne ose y. Na lift djeluje jedna aktivna sila, sila težine $\vec{G} = -G\vec{j}$ je usmjerena na dolje, a dejstvo sajle zamjenjujemo silom zatezanja sajle $\vec{S} = S\vec{j}$, koja ima karakter reakcije veze. Osnovna jednačina dinamike za ovaj slučaj kretanja glasi:

$$\frac{G}{g}\vec{a} = \vec{G} + \vec{S},$$

odnosno u skalarnom obliku

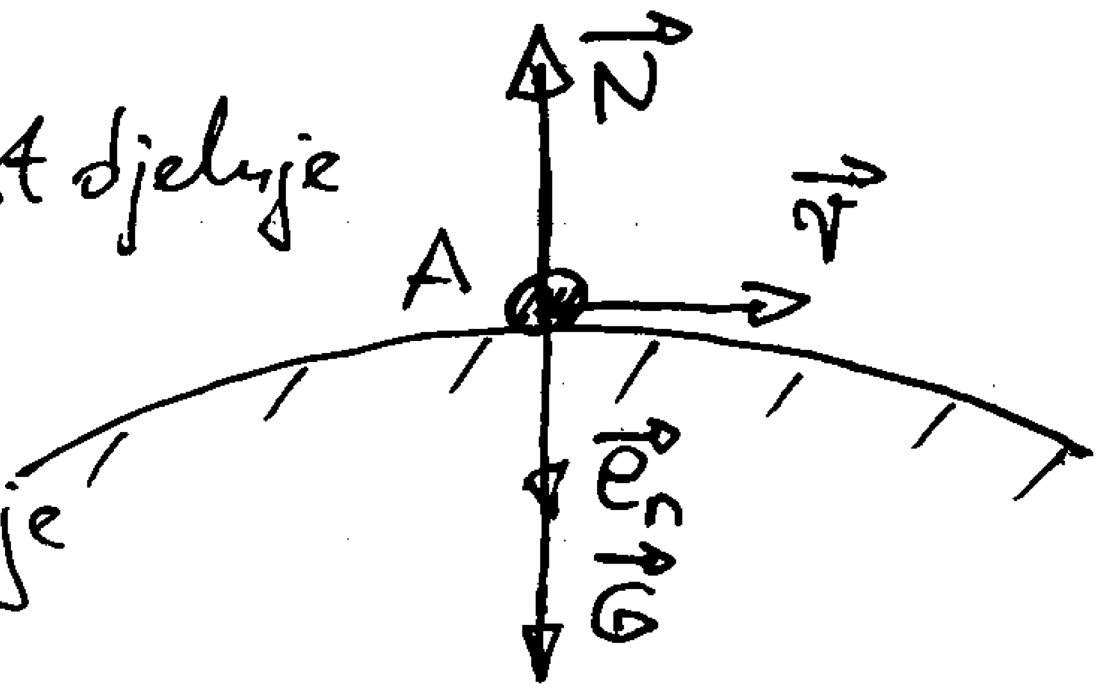
$$\frac{G}{g}a = -G + S,$$

kiloNjutna

odakle je

$$S = \frac{G}{g}a + G = \left(\frac{a}{g} + 1\right)G = \left(\frac{2}{9{,}81} + 1\right)\cdot 10\,000 = 12\,039\,N \approx 12\ kN$$

Primjer 3. Poluprečnik krivine u tački A mosta iznosi $R_k = 100\,m$. Automobil mase $m = 1000\,kg$ kreće se po mostu konstantnom brzinom $v = 72\ \frac{km}{h}$. Kolika je sila pritiska automobila na most u tački A.



$$m\vec{a} = \vec{G} + \vec{N},$$ $\vec{N}$ - reakcija (sila kojom most djeluje na automobil)

$$G = mg = 1000\cdot 9{,}81 = 9810\,N$$

Projekcija ove vektorske jednačine na normalu je

$$ma_n = G - N, \quad a_n = \frac{v^2}{R_k}$$

$$\Rightarrow N = m\left(g - \frac{v^2}{R_k}\right) = 1000\left(9{,}81 - \frac{\left(72\cdot\frac{1000}{3600}\right)^2}{100}\right) = 5\,810\,N \text{ (Njutna)}$$

Pritisak na most $\vec{P}$ po zakonu akcije i reakcije je $\vec{P} = -\vec{N}$, tj. po intenzitetu je jednak N ali je usmjeren vertikalno naniže.

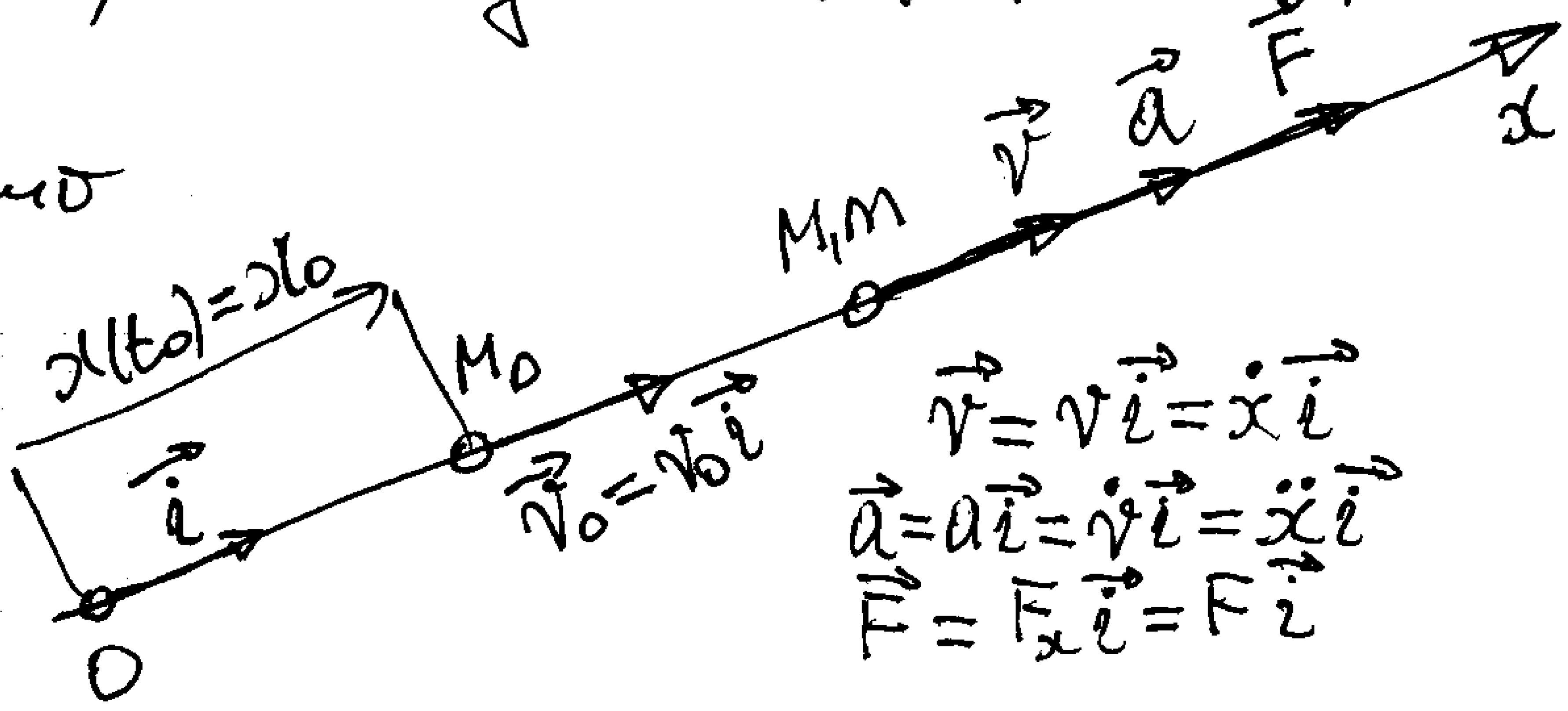
b) Drugi (inverzni) zadatak: Ako je poznata masa tačke, njen početni položaj i početna brzina (tj. početni uslovi: $\vec{r}(t_0)=\vec{r}_0$, $\vec{v}(t_0)=\vec{v}_0$) i sila koja djeluje na tačku, treba odrediti kretanje tačke $\vec{r}(t)$.

Ovaj zadatak se često naziva i osnovni zadatak dinamike, a u matematičkom smislu je složeniji od direktnog zadatka jer zahtijeva rješavanje (integraciju) diferencijalnih jednačina kretanja. Ovom zadatku će, u narednim razmatranjima, biti posvećena značajna pažnja.

1.5 Pravolinijsko kretanje tačke

Potrebni i dovoljni uslovi za pravolinijsko kretanje materijalne tačke jesu da rezultujuća sila koja djeluje na tačku ima konstantan pravac, a početna brzina, ukoliko je različita od nule, ima pravac te sile.

Jednu osu, recimo x, postavimo tako da se poklapa sa pravom duž koje se vrši kretanje.



Diferencijalna jednačina kretanja je (7), tj.

$$m\ddot{x}=F_x(t,x,\dot{x}) \qquad (9)$$

i predstavlja običnu diferencijalnu jednačinu drugog reda u kojoj je nezavisna promjenljiva vrijeme t a tražena funkcija x. Odrediti kretanje znači naći rješenje ove jednačine koje zadovoljava početne uslove:

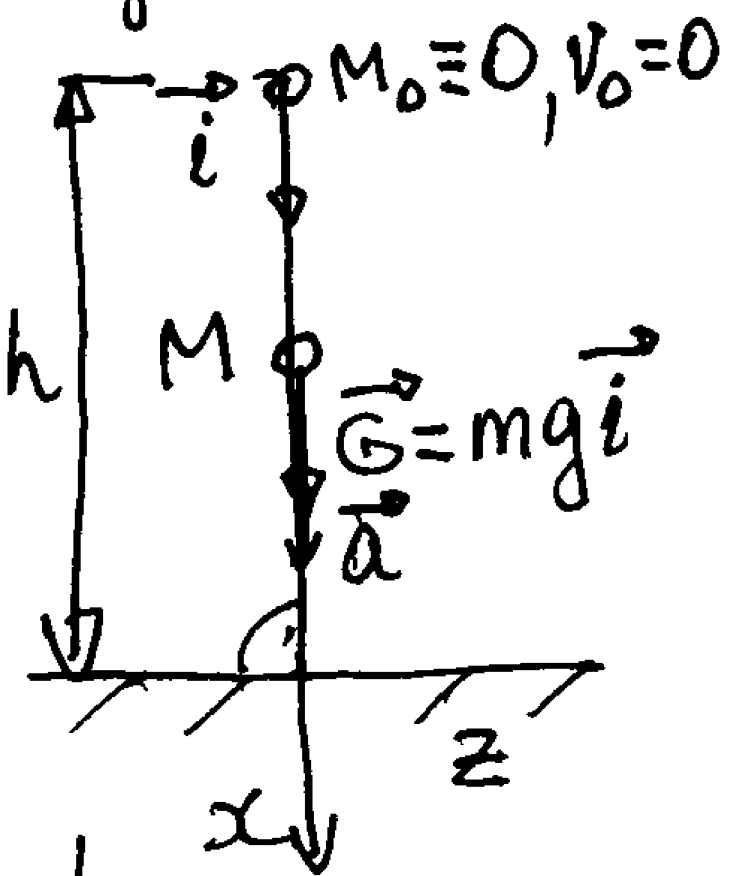
$$t_0=0,\ x(t_0)=x_0,\ \dot{x}(t_0)=v_0. \qquad (10)$$

1.5.1 Pravolinijsko kretanje pod dejstvom konstantne sile

Ako je $F_x=const$, onda je, na osnovu (9), $\ddot{x}=a=const=F_x/m$, pa imamo jednakopromjenljivo pravolinijsko kretanje. Zakon promjene brzine i konačna jednačina kretanja u ovom slučaju su

$$\left.\begin{aligned} v=\dot{x}&=v_0+at,\\ x&=x_0+v_0t+\frac{1}{2}at^2,\quad a=\frac{F_x}{m}\end{aligned}\right\}(11)$$

Primjer 4. Slobodni pad u homogenom polju sile Zemljine teže u bezvazdušnom prostoru.



Tačka M, mase m, puštena je da slobodno pada, bez početne brzine ($V_0=0$), sa visine h iznad Zemljine površine. Otpor vazduha se zanemaruje.
Vertikalnu osu x postavimo kao na slici.

$m\vec{a} = \vec{G} \Rightarrow ma = mg \Rightarrow a = g = const$

Početni uslovi: $x(0)=x_0=0$, $V(0)=V_0=0$

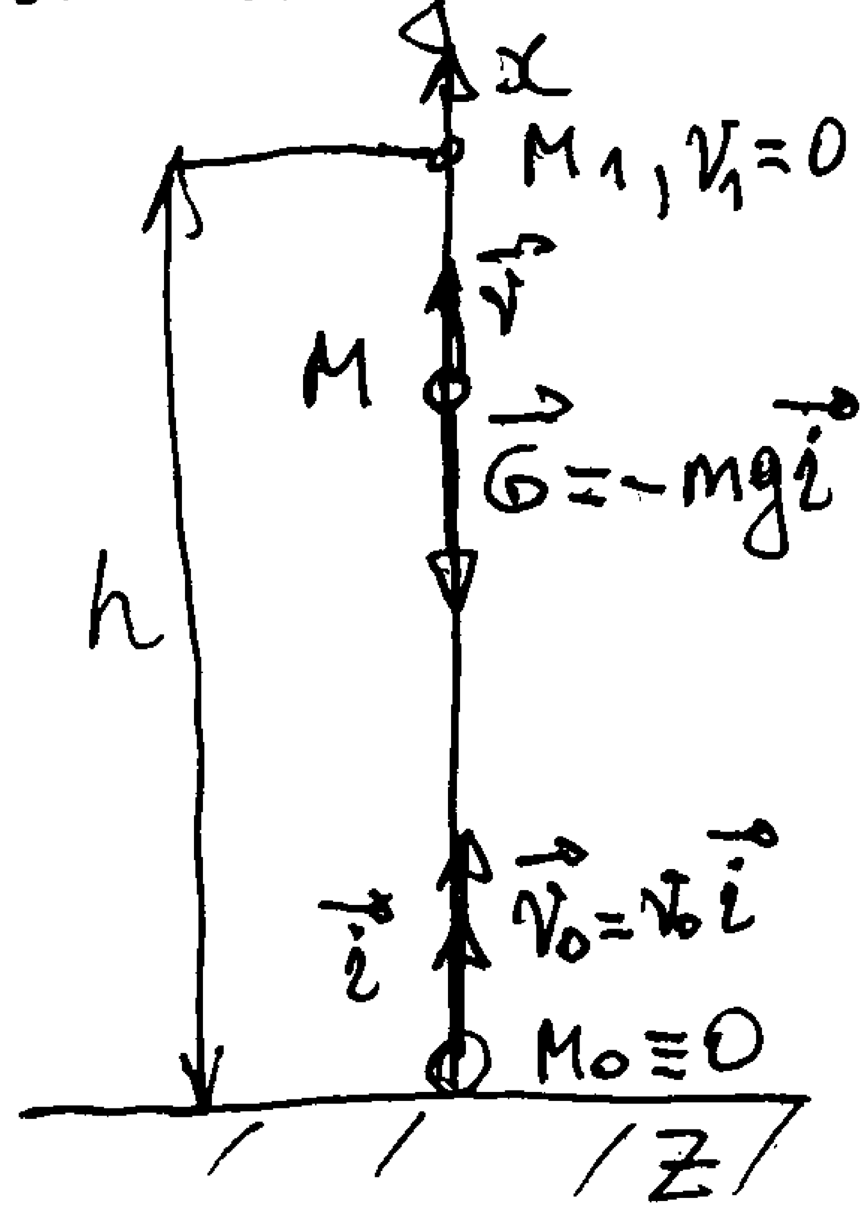
(11) $\Rightarrow$ $V = gt$ - zakon promjene brzine pri slobodnom padu

$x = g\frac{t^2}{2}$ - konačna jednačina kretanja (zakon slobodnog pada)

$x(t_1)=h \Rightarrow t_1 = \sqrt{\frac{2h}{g}}$ - vrijeme padanja tačke

$V_1 = V(t_1) = \sqrt{2gh}$ – brzina udara tačke o Zemljinu površinu.

Primjer 5. Vertikalni hitac u homogenom polju sile Zemljine teže u bezvazdušnom prostoru



Tačka M, mase m, izbačena je sa površine Zemlje vertikalno naviše početnom brzinom intenziteta V_0.
Vertikalnu osu postavimo kao na slici.

$m\vec{a} = \vec{G} \Rightarrow ma = -mg \Rightarrow a = -g = const$

Početni uslovi: $x(0)=x_0=0$, $V(0)=V_0$

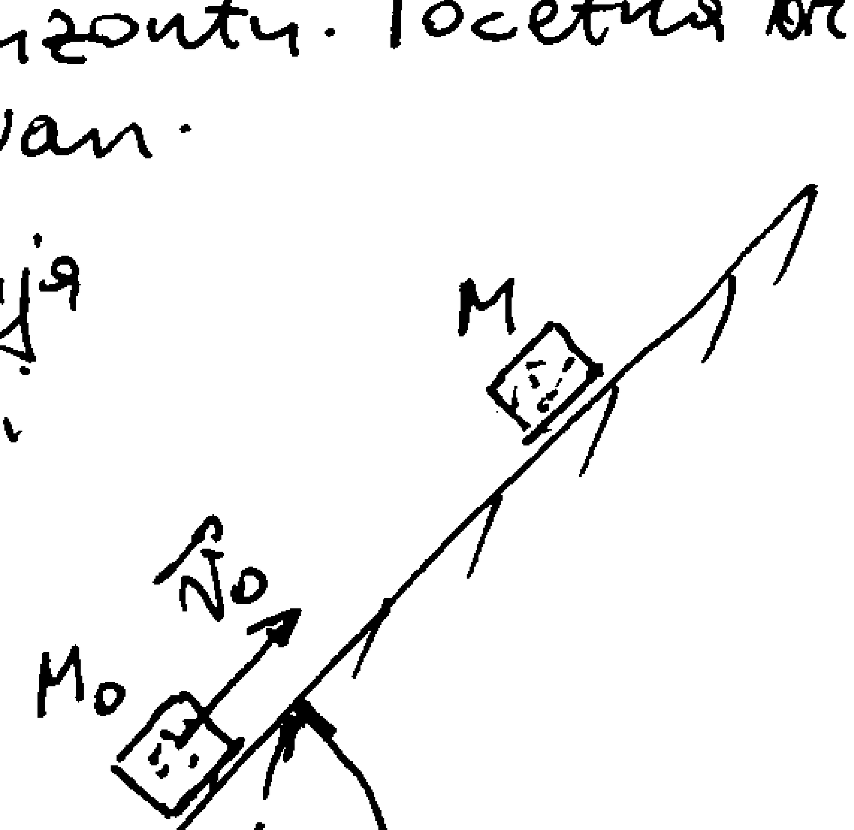
(11) $\Rightarrow$ $V = V_0 - gt$

$x = V_0 t - g\frac{t^2}{2}$

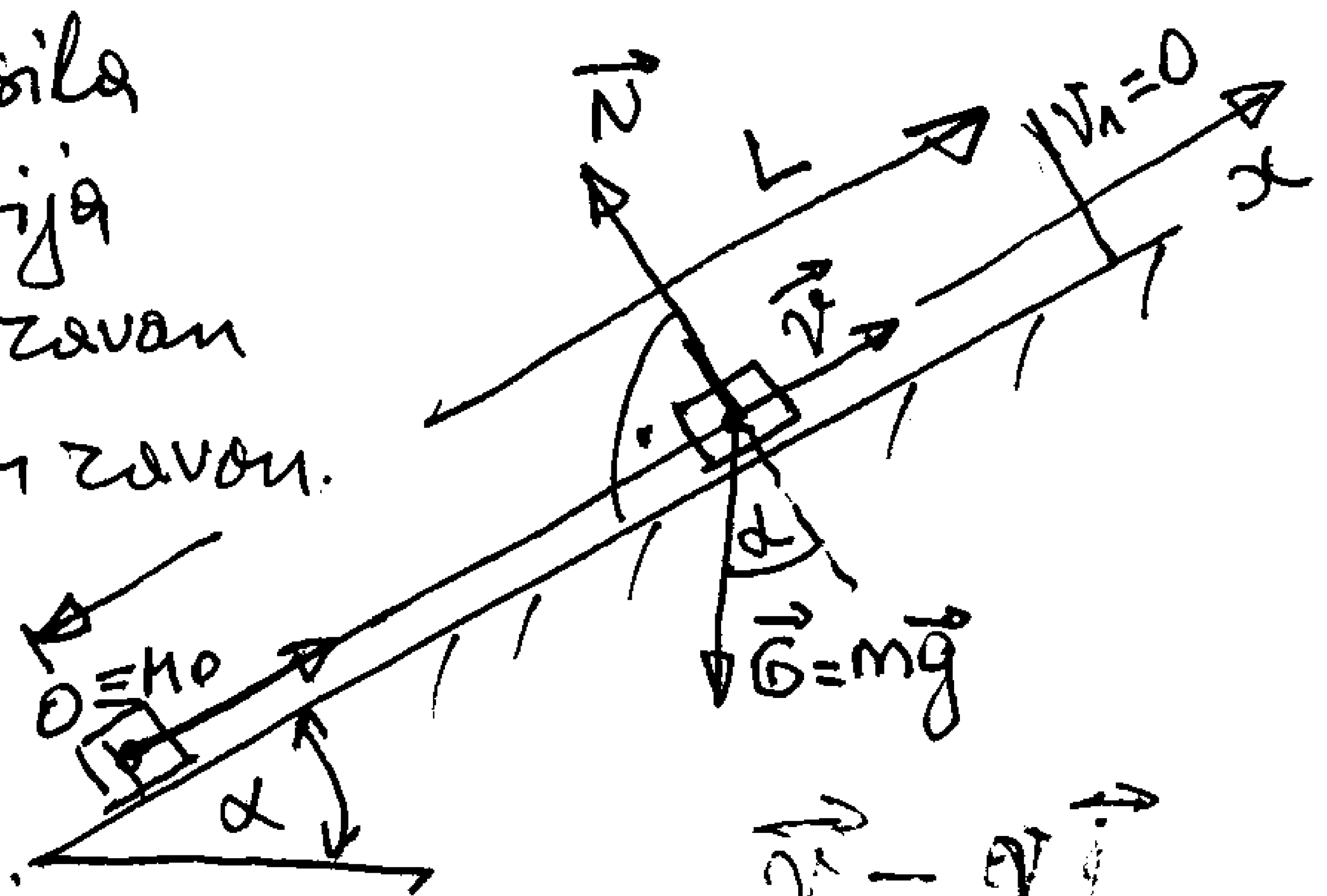
$V_1 = V(t_1) = 0 \rightarrow t_1 = \frac{V_0}{g}$ - vrijeme penjanja

$h = x(t_1) = \frac{V_0^2}{2g}$ - visina penjanja (najveća visina koju dostigne tačka)

Primjer 6. Tijelo M (materijalna tačka), mase m, kreće se po strmoj ravni koja je nagnuta pod uglom α prema horizontu. Početna brzina, intenziteta V_0, usmjerena je uz strmu ravan.
Odrediti vrijeme koje protekne do zaustavljanja tijela i put pređen za to vrijeme, smatrajući da je: a) strma ravan glatka; b) strma ravan hrapava a koeficijent dinamičkog trenja μ_D.



a) Na tijelo M, u toku kretanja, djeluje sila težine $\vec{G} = m\vec{g}$ (aktivna sila) i reakcija $\vec{R} = \vec{N}$ koja je, s obzirom da je strma ravan glatka, u pravcu normale na strmu ravan.



$\vec{v} = v\,\vec{i}$

$\vec{a} = a\,\vec{i}$

Projekcija osnovne jednačine

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N}$$

na x-osu duž koje se vrši kretanje je

$$ma = -mg\sin\alpha\,,$$

odakle je $a = -g\sin\alpha = const$

Dakle, kretanje je jednakopromjenljivo pravolinijsko sa početnim uslovima $x(0)=0$ i $v(0)=v_0$ pa iz (11) slijedi

$$v = v_0 - gt\sin\alpha$$

$$x = v_0 t - g\frac{t^2}{2}\sin\alpha$$

U trenutku zaustavljanja t_1 je $v(t_1)=0 \Rightarrow t_1 = v_0/g\sin\alpha$,

a pređeni put za to vrijeme je $L = x(t_1) = v_0^2/2g\sin\alpha$

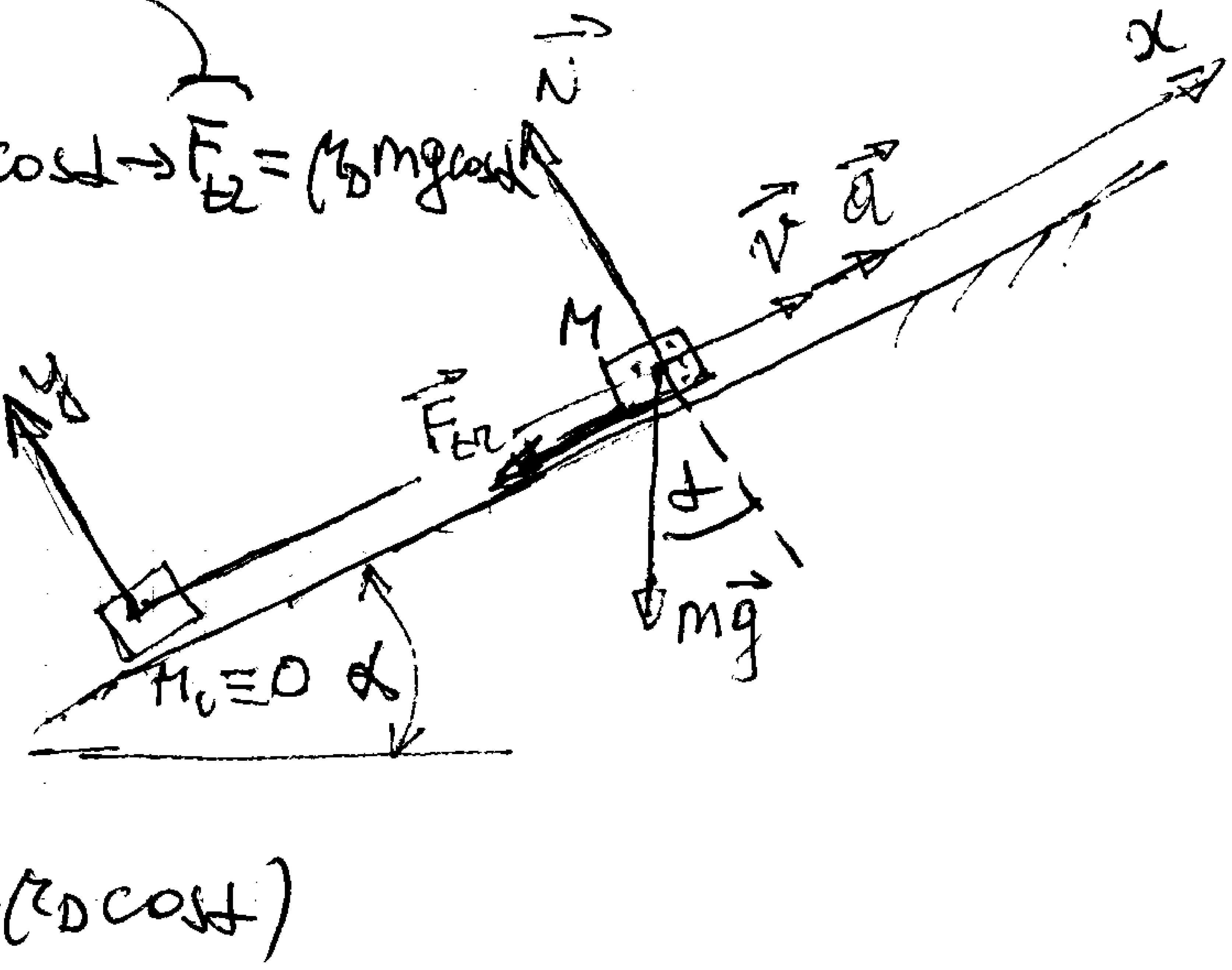
b) U slučaju hrapave strme ravni, kao komponenta reakcije veze (strme ravni) osim normalne komponente $\vec{N}$ javlja se i sila trenja klizanja $\vec{F}_{tr}$ čiji je intezitet $F_{tr} = \mu_D N$ a smjer suprotan smjeru brzine tačke.

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{F}_{tr} + \vec{N}$$

x: $ma = -mg\sin\alpha - F_{tr}$

y: $m\cdot 0 = -mg\cos\alpha + N \rightarrow N = mg\cos\alpha \rightarrow F_{tr} = \mu_D mg\cos\alpha$

$$\Rightarrow a = -g(\sin\alpha + \mu_D\cos\alpha) = const.$$



$$\Rightarrow v = v_0 - gt(\sin\alpha + \mu_D\cos\alpha)$$

$$x = v_0 t - g\frac{t^2}{2}(\sin\alpha + \mu_D\cos\alpha)$$

$$v(t_1) = 0 \Rightarrow t_1 = v_0/g(\sin\alpha + \mu_D\cos\alpha)$$

$$L = x(t_1) = \frac{v_0^2}{2g(\sin\alpha + \mu_D\cos\alpha)}$$

1.5.2 Pravolinijsko kretanje pod dejstvom sile koja zavisi od vremena

$$m\ddot{x} = F_x(t) \Rightarrow \ddot{x} = a(t) = \frac{F_x(t)}{m}$$

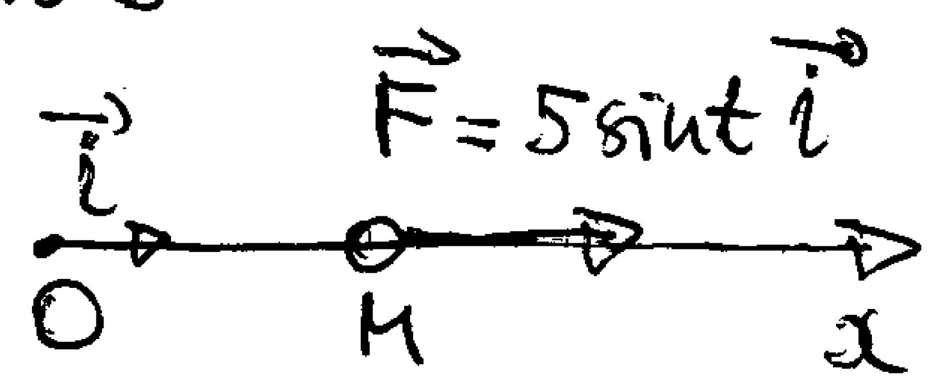
Zakon promjene brzine i konačna jednačina kretanja u ovom slučaju su

$$\left.\begin{aligned} v(t) &= v_0 + \int_0^t a(t)\,dt \\ x(t) &= x_0 + \int_0^t v(t)\,dt \end{aligned}\right\} \quad (12)$$

Primjer 7. Tačka M, mase $m = 1\,kg$, kreće se duž x-ose pod dejstvom sile $F_x = 5\sin t$ [N]. Za početne uslove: $x(0) = 0$, $v(0) = 0$, odrediti: a) konačnu jednačinu kretanja tačke; b) ubrzanje, brzinu i položaj tačke u trenutku $t_1 = 2\pi\,s$.

a) $m\ddot{x} = F_x$, $m = 1$, $F_x = 5\sin t$

$\Rightarrow a(t) = 5\sin t$



$$(12) \Rightarrow v(t) = \cancel{v_0}^{\,0} + 5\int_0^t \sin t\,dt = -5\cos t\Big|_0^t = 5 - 5\cos t$$

$$v(t) = 5(1 - \cos t)$$

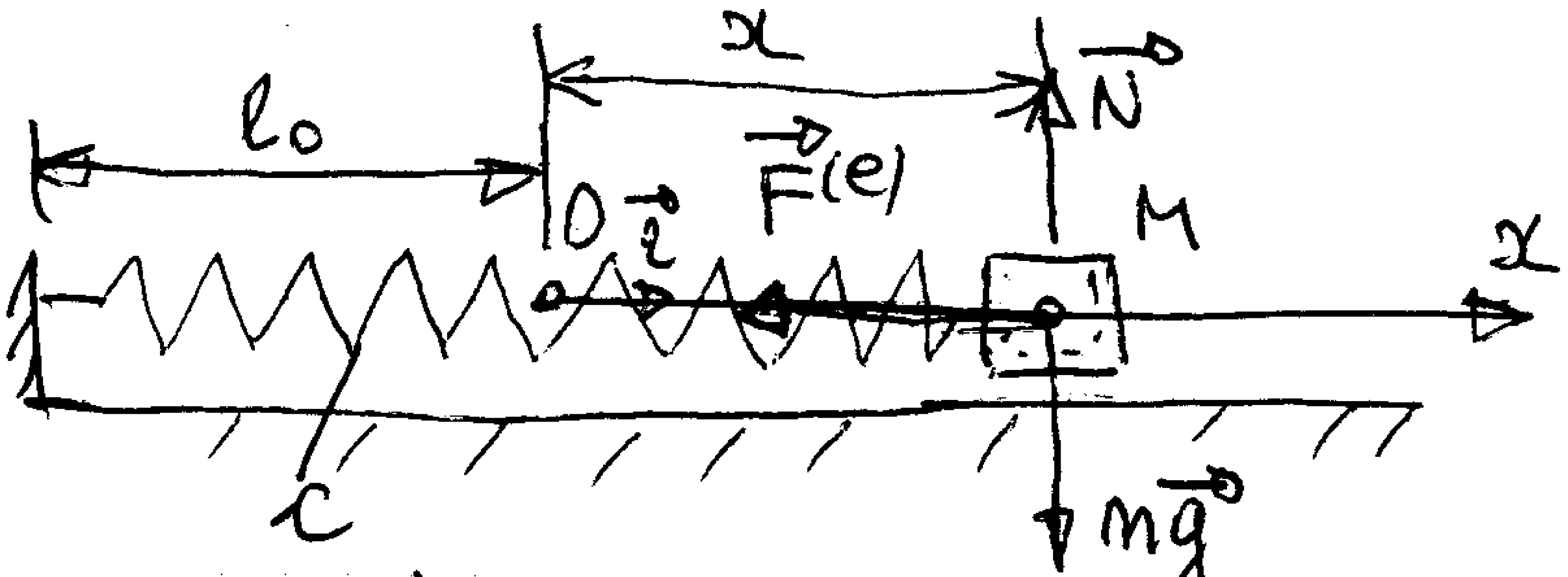
$$x(t) = \cancel{x_0}_{\,0} + 5\int_0^t (1 - \cos t)\,dt = (5t - 5\sin t)\Big|_0^t = 5(t - \sin t)$$

$$\boxed{x(t) = 5(t - \sin t)}$$

b) $\ddot{x}(t_1) = a(t_1) = 0$; $v(t_1) = 0$; $x(t_1) = 10\pi\,m \approx 31{,}4\,m$

1.5.3 Harmonijske oscilacije (Primjer pravolinijskog kretanja pod dejstvom sile koja je funkcija položaja)

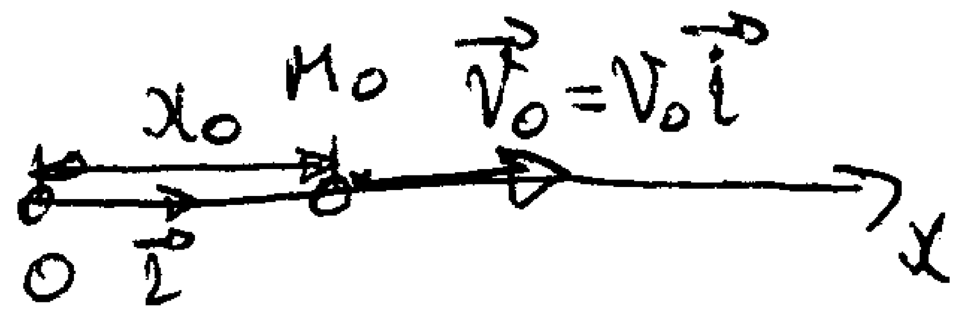
Posmatrajmo tačku M, mase m, koja može da se kreće pravolinijski po glatkoj horizontalnoj ravni a koja je vezana za slobodni kraj opruge



krutosti c. U položaju ravnoteže tačke opruga je nedeformisana i njena dužina je l_0, i u taj položaj postavimo početak O x-ose. Na tačku djeluju: elastična sila opruge $\vec{F}^{(e)} = -cx\vec{i}$, sila težine $m\vec{g}$ i reakcija glatke podloge $\vec{N}$.

Kada vektorsku diferencijalnu jednačinu kretanja posmatrane tačke

$$m\vec{a} = \vec{F}^{(e)} + m\vec{g} + \vec{N}$$



projiciramo na x-osu, dobijamo

$$m\ddot{x} = -cx,$$

odnosno

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0, \quad \omega = \sqrt{\frac{c}{m}} \qquad (13)$$

Dobijena jednačina je linearna, homogena diferencijalna jednačina drugog reda i njeno opšte rješenje se može napisati u obliku

$$x = C_1 \cos\omega t + C_2 \sin\omega t, \qquad (14)$$

gdje su C_1 i C_2 integracione konstante. Korišćenjem početnih uslova: $t_0 = 0$, $x(t_0) = x_0$, $\dot{x}(t_0) = v_0$, određuju se konstante C_1 i C_2:

$$C_1 = x_0, \quad C_2 = v_0/\omega \qquad (15)$$

Kada (15) uvrstimo u (14) dobijamo konačnu jednačinu kretanja tačke

$$x = x_0 \cos\omega t + \frac{v_0}{\omega} \sin\omega t \qquad (16)$$

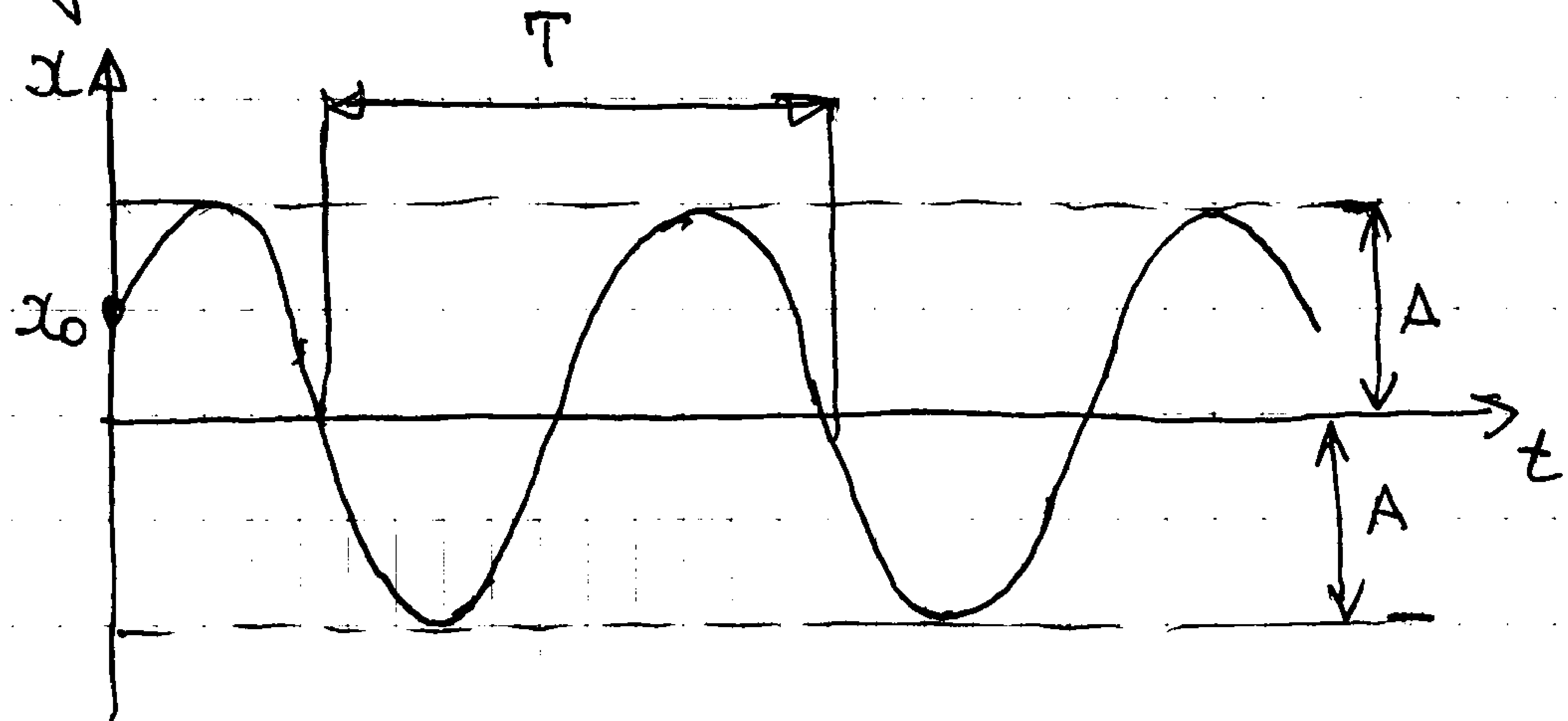
Ako umjesto C_1 i C_2 uvedemo druge konstante A i α smjenama

$$C_1 = A\sin\alpha, \quad C_2 = A\cos\alpha,$$

jednačina (16) se može napisati u pogodnijem obliku

$$\boxed{x = A\sin(\omega t + \alpha), \quad A = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2}, \quad \tan\alpha = \frac{x_0\omega}{v_0}} \qquad (17)$$

Prema tome, koordinata x koja određuje položaj tačke mijenja se po sinusnom zakonu i takvo kretanje zove se harmonijsko oscilovanje.



Kretanje je periodično ($x(t+T)=x(t), \forall t$) sa periodom

$$T=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\frac{m}{c}},$$

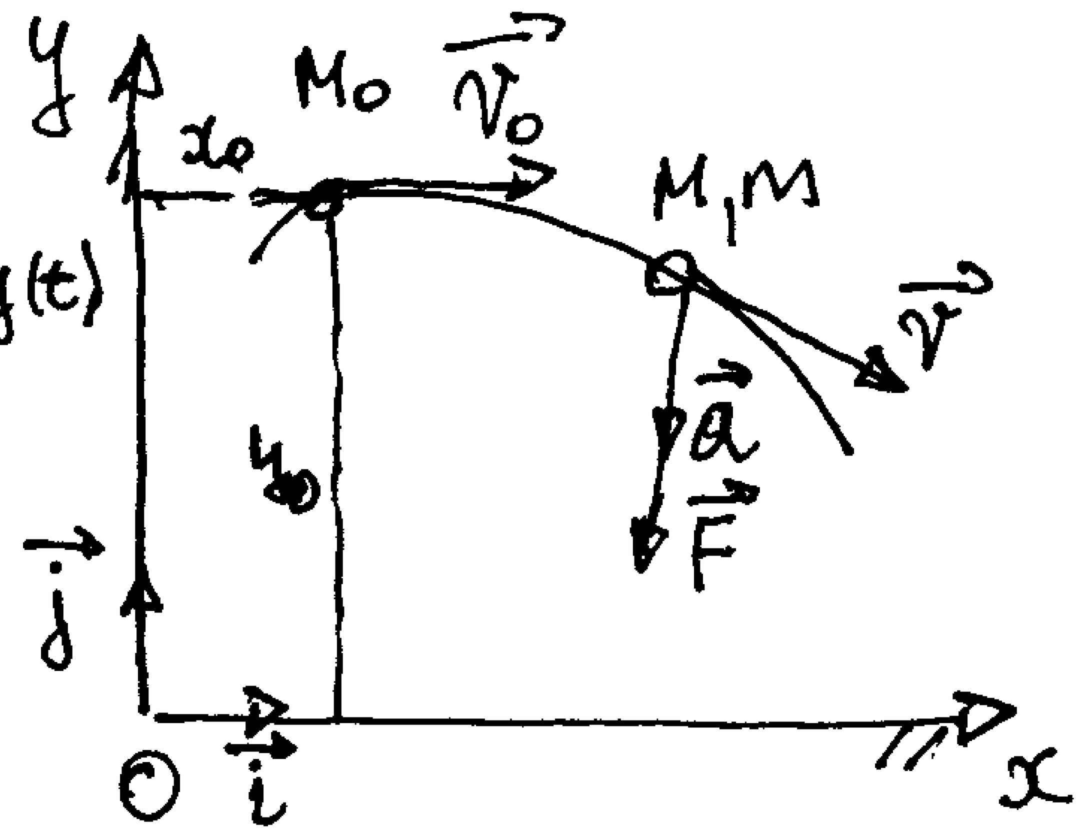
koji se zove period harmonijskih oscilacija. Broj perioda oscilovanja u jednoj sekundi $f=\frac{1}{T}$ zove se učestanost (frekvencija) i u SI sistemu se mjeri hercima ($1\,Hz = 1\,s^{-1}$). Veličina $\omega=\sqrt{\frac{c}{m}}$ zove se kružna frekvencija, $(\omega t+\alpha)$ je faza oscilovanja, a α početna faza. Najveće udaljenje tačke M od ravnotežnog položaja $x=0$ (centra oscilovanja) zove se amplituda i ona je

$$A=|x_{max}(t)|=\sqrt{x_0^2+\left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2}.$$

1.6 Krivolinijsko kretanje tačke u ravni

Potrebni i dovoljni uslovi za ravansko kretanje materijalne tačke jesu da rezultujuća sila $\vec{F}$ koja djeluje na tačku i početna brzina $\vec{v}_0$, ukoliko je različita od nule, leže u jednoj ravni.

Postavimo Dekartov koordinatni sistem Oxy u ravni sile $\vec{F}$ i početne brzine $\vec{v}_0$.



Konačne jednačine kretanja tačke $x=x(t)$, $y=y(t)$ određujemo integracijom diferencijalnih jednačina kretanja

$$m\ddot{x} = F_x,$$

$$m\ddot{y} = F_y,$$

uz korišćenje početnih uslova

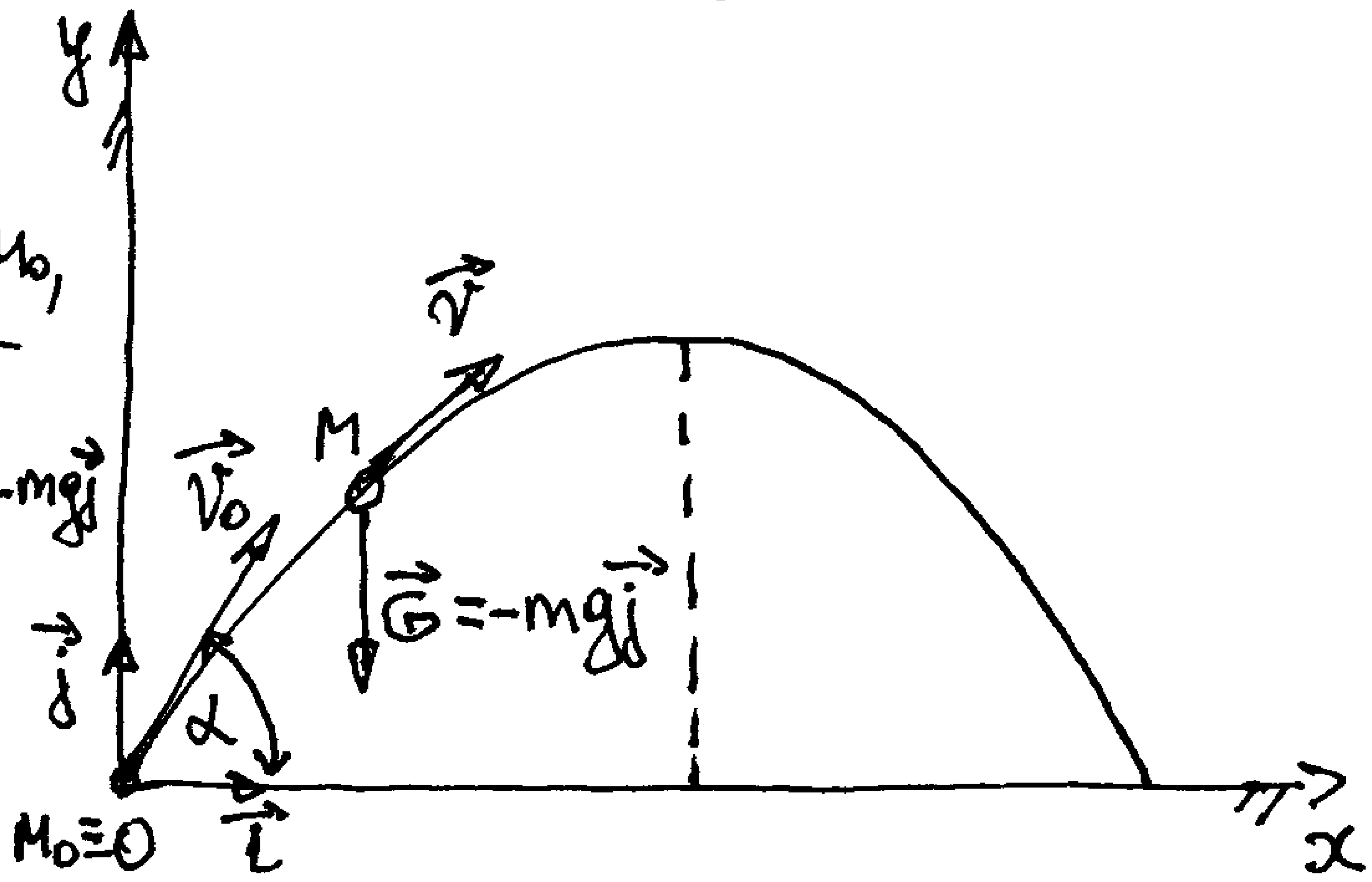
$$t_0=0:\ x(t_0)=x_0,\ y(t_0)=y_0,\ \dot{x}(t_0)=v_{0x}=\dot{x}_0,\ \dot{y}(t_0)=v_{0y}=\dot{y}_0.$$

Primjer. <u>Kosi hitac u bezvazdušnom prostoru, u homogenom polju sile teže.</u>

To je kretanje koje nastaje kada se materijalna tačka (M), mase m, izbaci iz neke tačke u blizini Zemljine površine početnom brzinom $\vec{v}_0$ koja zaklapa ugao α prema horizontu (elevacioni ugao).

Koordinatni sistem Oxy postavimo u vertikalnoj ravni tako da mu je početak u početnom položaju tačke M_0, x-osa horizontalna, a y-osa usmjerena vertikalno naviše.

Na tačku djeluje samo sila teže $\vec{G}=-m g\vec{j}$ pa su diferencijalne jednačine kretanja



početni uslovi: $t_0=0$, $\dot{x}(0)=v_0\cos\alpha$, $\dot{y}(0)=v_0\sin\alpha$
$x(0)=0$, $y(0)=0$

$$m\ddot{x}=0,$$

$$m\ddot{y}=-mg,$$

odnosno

$$\frac{d\dot{x}}{dt}=0 \rightarrow \dot{x}=C_1$$

$$\frac{d\dot{y}}{dt}=-g \rightarrow \dot{y}=\int -g\,dt = -gt + C_2$$

Na osnovu početnog uslova za brzinu određujemo integracione konstante C_1 i C_2: $C_1 = v_0\cos\alpha$, $C_2 = v_0\sin\alpha$ pa je zakon promjene brzine

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = v_0 \cos\alpha \,,$$

$$\dot{y} = \frac{dy}{dt} = v_0 \sin\alpha - gt \,,$$

Integraljenjem ovih jednačina dobijamo

$$x = \int v_0 \cos\alpha \, dt \quad = v_0 t \cos\alpha + C_3$$

$$y = \int (v_0 \sin\alpha - gt) dt \quad = v_0 t \sin\alpha - g\frac{t^2}{2} + C_4$$

Početni uslov za položaj daje $C_3 = C_4 = 0$, i konačne jednačine kretanja tačke su:

$$\left.\begin{aligned} x &= v_0 t \cos\alpha \\ y &= v_0 t \sin\alpha - \frac{1}{2} g t^2 \end{aligned}\right\} (*)$$

Na osnovu jednačina (*) možemo, korišćenjem metoda kinematike, odrediti sve karakteristike datog kretanja tačke.

Eliminacijom vremena t iz jednačina (*) nalazimo jednačinu trajektorije

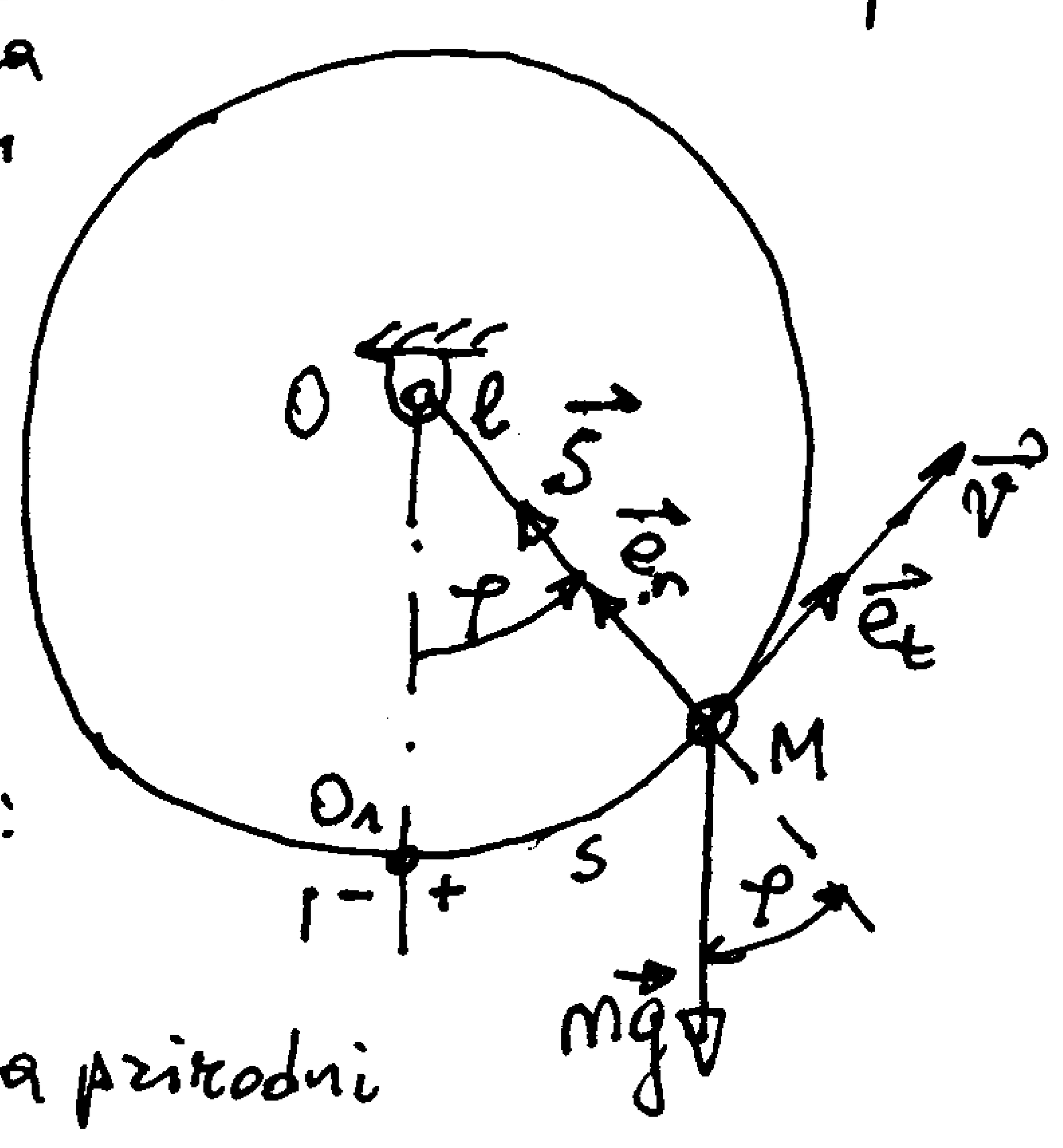
$$y = x \operatorname{tg}\alpha - \frac{g x^2}{2 v_0^2 \cos^2\alpha}$$

Trajektorija je parabola čija je osa paralelna y-osi.

Kao što je već napomenuto, kada je poznata putanja tačke pogodno je koristiti Ojlerove jednačine (8).

Primjer. <u>Matematičko klatno</u>

Pod matematičkim klatnom podrazumijevamo materijalnu tačku koja se kreće po kružnici, u vertikalnoj ravni, pod dejstvom sile teže. Veza koja obezbeđuje ovakvo kretanje može biti ostvarena na razne načine, recimo pomoću lakog krutog štapa OM, dužine l, koji se može obrtati oko nepokretne horizontalne ose O, pa je tačka prinuđena da se kreće po kružnici poluprečnika l sa centrom u tački O.



Položaj tačke M se može odrediti lučnom koordinatom s, odnosno uglom φ koji štap zaklapa sa vertikalnim pravcem ($s = l\varphi$).

Na tačku M osim sile teže $m\vec{g}$ djeluje i reakcija veze – sila u štapu $\vec{R} = \vec{S} = S\,\vec{e}_n$ pa je osnovna jednačina dinamike u vektorskom obliku:

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{S} \,,$$

a ~~diferencijalne~~ jednačine ~~kretanja u odnosu~~ na prirodni koordinatni sistem glase:

$$m\frac{dv}{dt} = -mg\sin\varphi$$

$$m\frac{v^2}{l} = -mg\cos\varphi + S$$

Pošto je ~~$v=\dot{s}$~~ i $s = l\varphi$, to je $v = l\dot{\varphi}$ i $\dot{v} = l\ddot{\varphi}$ pa gornje jednačine postaju

$$\left.\begin{aligned} &\ddot{\varphi} + \omega^2\sin\varphi = 0, \quad \omega^2 = \frac{g}{l} \\ \text{i} \quad &S = ml\dot{\varphi}^2 + mg\cos\varphi \end{aligned}\right\} (**)$$

Jednačina $(**)_1$ je diferencijalna jednačina kretanja matematičkog klatna – njenom integracijom za ~~zadate~~ početne uslove ($\varphi(0)=\varphi_0$, $\dot{\varphi}(0)=\dot{\varphi}_0 = v_0/l$) određuje se konačna jednačina kretanja $\varphi = \varphi(t)$, a zatim se na osnovu jednačine $(**)_2$ određuje reakcija veze – sila u štapu S. Naglasimo da se rješenje jednačine $(**)_1$ ne može izraziti preko elementarnih funkcija, pa se najčešće ona rješava numerički.

U specijalnom slučaju kada klatno izvodi takva kretanja pri kojima je $|\varphi(t)| \ll 1$, može se sa zadovoljavajućim stepenom tačnosti staviti da je $\sin\varphi \approx \varphi$ pa dobijemo jednostavniju (linearnu) diferencijalnu jednačinu

$$\ddot{\varphi} + \omega^2\varphi = 0,$$

koja je istog oblika kao i diferencijalna jednačina (13). Ona opisuje male oscilacije matematičkog klatna oko donjeg vertikalnog položaja, koje su određene harmonijskim zakonom oblika

$$\varphi = A\sin(\omega t + \alpha), \quad A = \sqrt{\varphi_0^2 + (\dot{\varphi}_0/\omega)^2}, \quad \tan\alpha = \frac{\varphi_0\omega}{\dot{\varphi}_0}$$

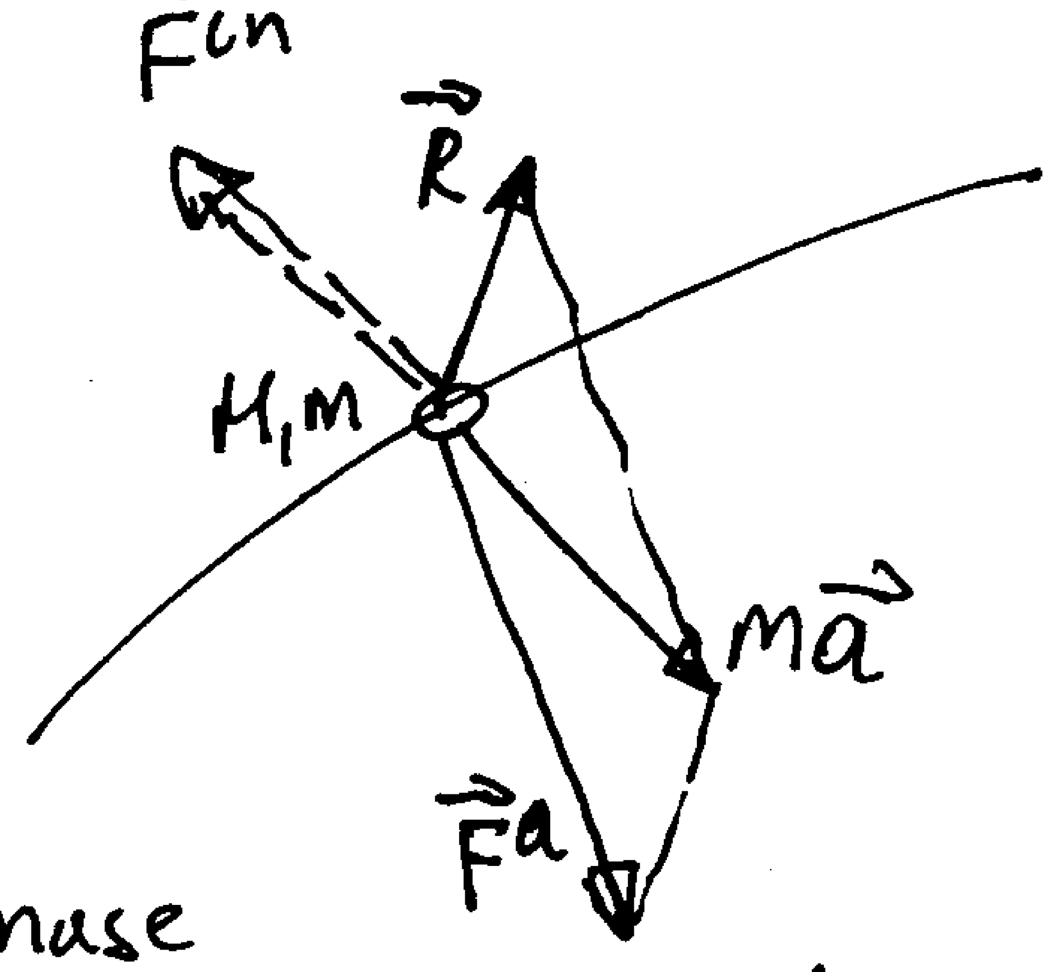
i čiji je period oscilovanja

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{l/g}.$$

1.7 Dalamberov princip

Kao što smo ranije konstatovali, osnovna jednačina dinamike neslobodne tačke je oblika

$$m\vec{a}=\vec{F}^a+\vec{R}, \qquad (18)$$



gdje je $\vec{F}^a$ rezultanta aktivnih sila, a $\vec{R}$ rezultanta sila reakcije veza.

Uvedimo, s formalne tačke gledišta, inercijalnu silu

$$\vec{F}^{in}=-m\vec{a}$$

Ona je po intenzitetu jednaka proizvodu mase tačke i njenog ubrzanja, ali je suprotnog smjera od smjera ubrzanja. Korišćenjem ovog pojma jednačina (18) se zapisuje u obliku

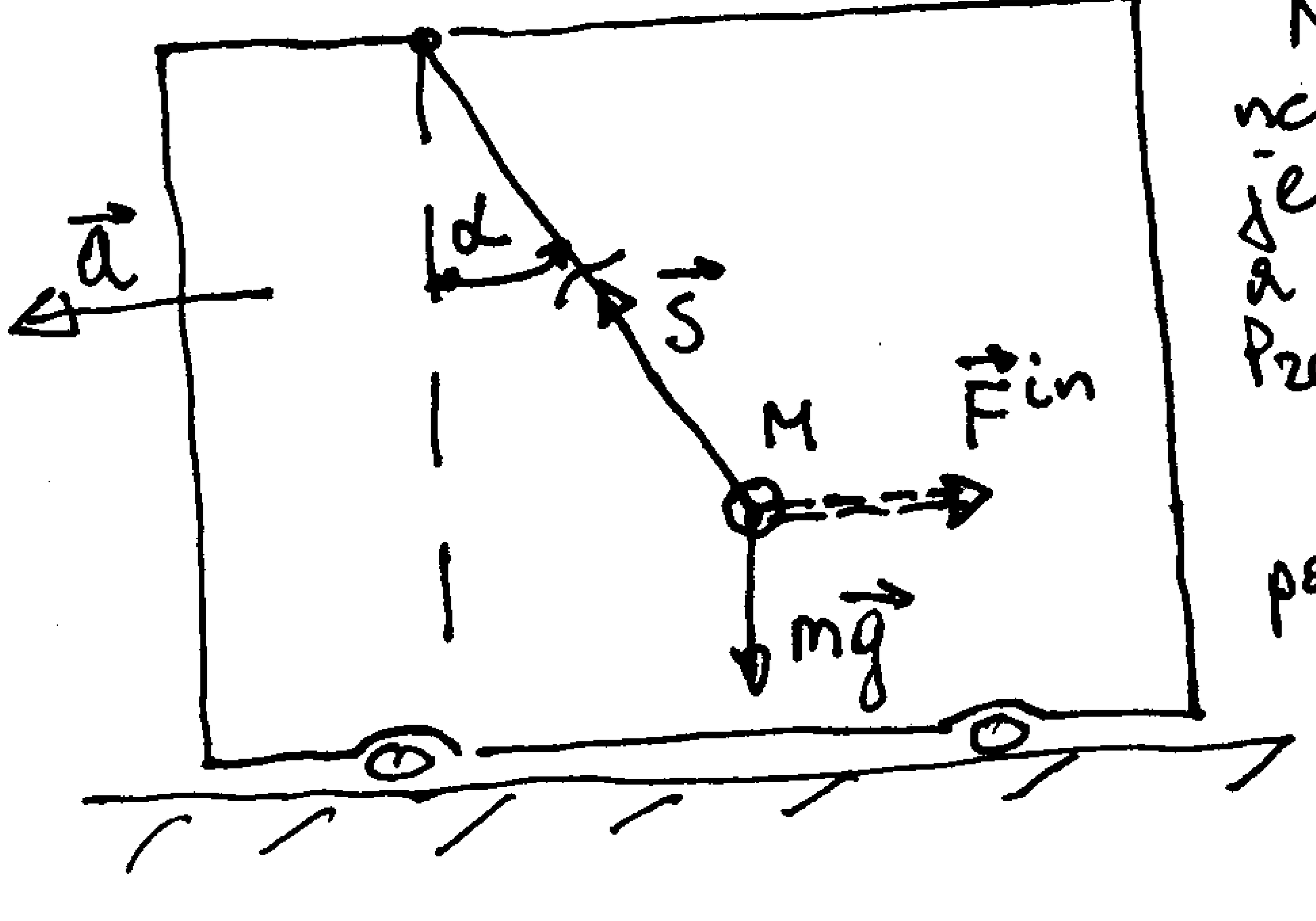
$$\vec{F}^a+\vec{R}+\vec{F}^{in}=0 \qquad (19)$$

Jednačina (19) izražava Dalamberov princip za tačku: Ako u svakom trenutku vremena aktivnim silama i reakcijama veza koje djeluju na materijalnu tačku dodamo inercijalnu silu, onda će taj sistem sila biti u ravnoteži.

Naglasimo da na materijalnu tačku stvarno djeluju samo aktivne sile i reakcije veza, a inercijalna sila je uvedena uslovno (vještački) da bi bili u stanju da dinamičke jednačine postavimo formalno u formi statičkih jednačina.

Primjena ovog principa je pogodna pri rješavanju prvog zadatka dinamike.

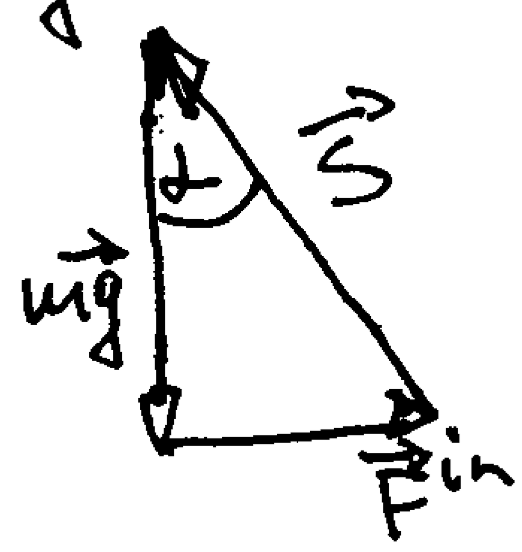
Primjer 8. U toku ubrzavanja voza pri polasku iz stanice objesi se o konac teret, pri čemu se drugi kraj konca pričvrsti za tavanicu nekog vagona. Tom prilikom konac, kada se ubrzanje ustali, skrene od vertikalnog pravca za ugao $\alpha=5^\circ$. Odrediti ubrzanje voza.



Na teret djeluje sila teže $m\vec{g}$ i sila u koncu (reakcija veze) $\vec{S}$. Ovim silama pridružimo silu inercije čiji je intenzitet $F^{in}=ma$, a smjer suprotan od smjera ubrzanja voza $\vec{a}$. Prema Dalamberovom principu je

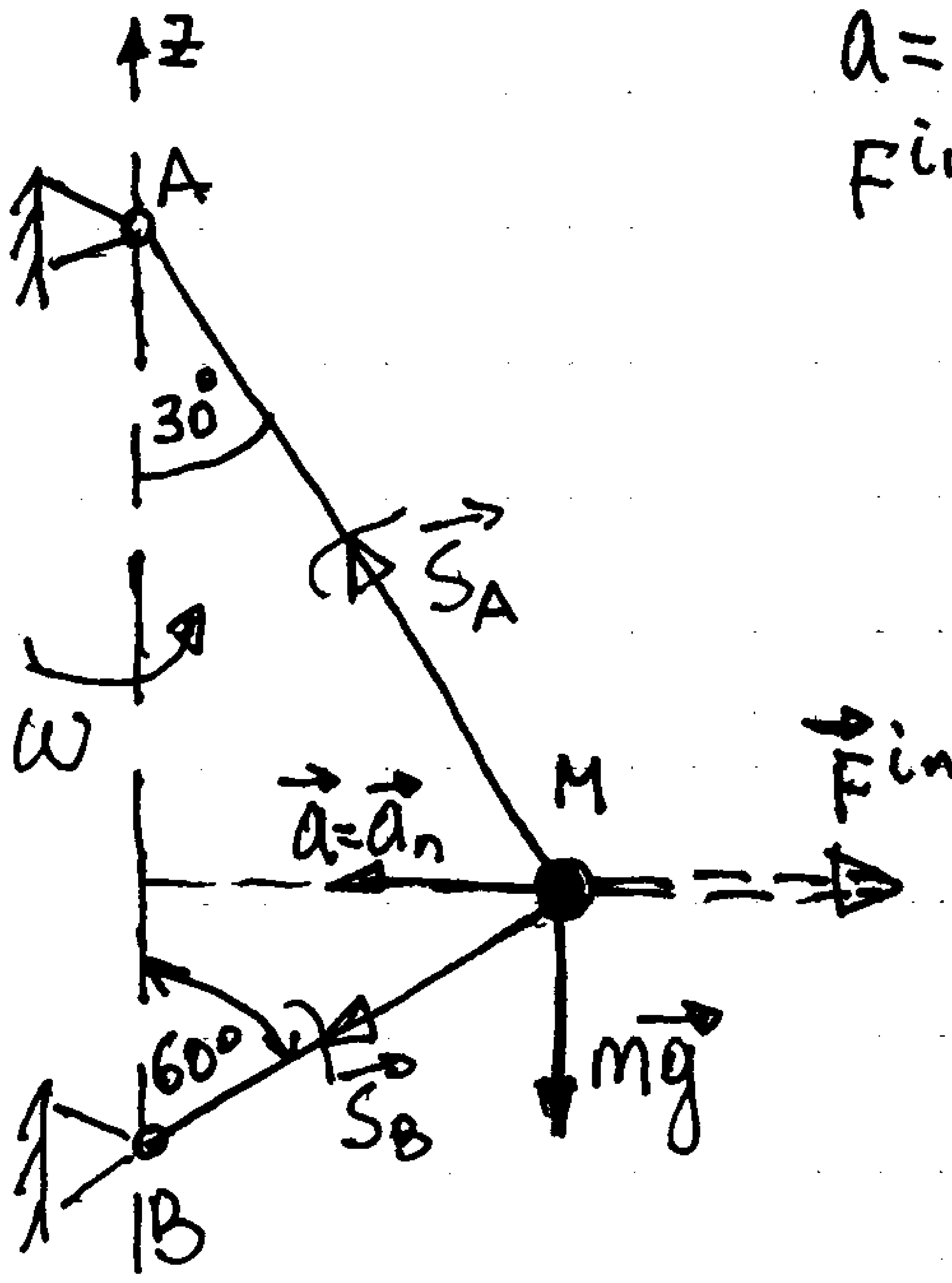
$$m\vec{g}+\vec{S}+\vec{F}^{in}=0,$$

pa je $\frac{F^{in}}{mg}=tg\alpha$, tj. $\frac{ma}{mg}=tg\alpha$



$$\Rightarrow a=g\,tg\alpha=0{,}86\ m/s^2$$

Primjer 9. Kuglica mase $m = 2\,kg$ vezana je za lake krute štapove. Sistem se obrće oko vertikalne z-ose konstantnom ugaonom brzinom $\omega = 3\,rad/s$. Odrediti sile u štapovima ako je $\overline{AM} = 1{,}5\,m$.



$$a = a_n = \overline{AM}\sin 30^\circ\,\omega^2 = 6{,}75\,m/s^2$$

$$F^{in} = ma = 13{,}5\,N$$

$$m\vec{g} + \vec{S}_A + \vec{S}_B + \vec{F}^{in} = 0$$

$$\left.\begin{aligned} y:&\ -S_A\cos 60^\circ - S_B\cos 30^\circ + F^{in} = 0 \\ z:&\ -mg + S_A\sin 60^\circ - S_B\sin 30^\circ = 0 \end{aligned}\right\}(*)$$

$$(*)_2 \Rightarrow S_B = \sqrt{3}\,S_A - 2mg \quad u\ (*)_1 \Rightarrow$$

$$S_A = \frac{1}{2}F^{in} + \frac{\sqrt{3}}{2}mg\,, \quad g = 9{,}81\,\frac{m}{s^2}$$

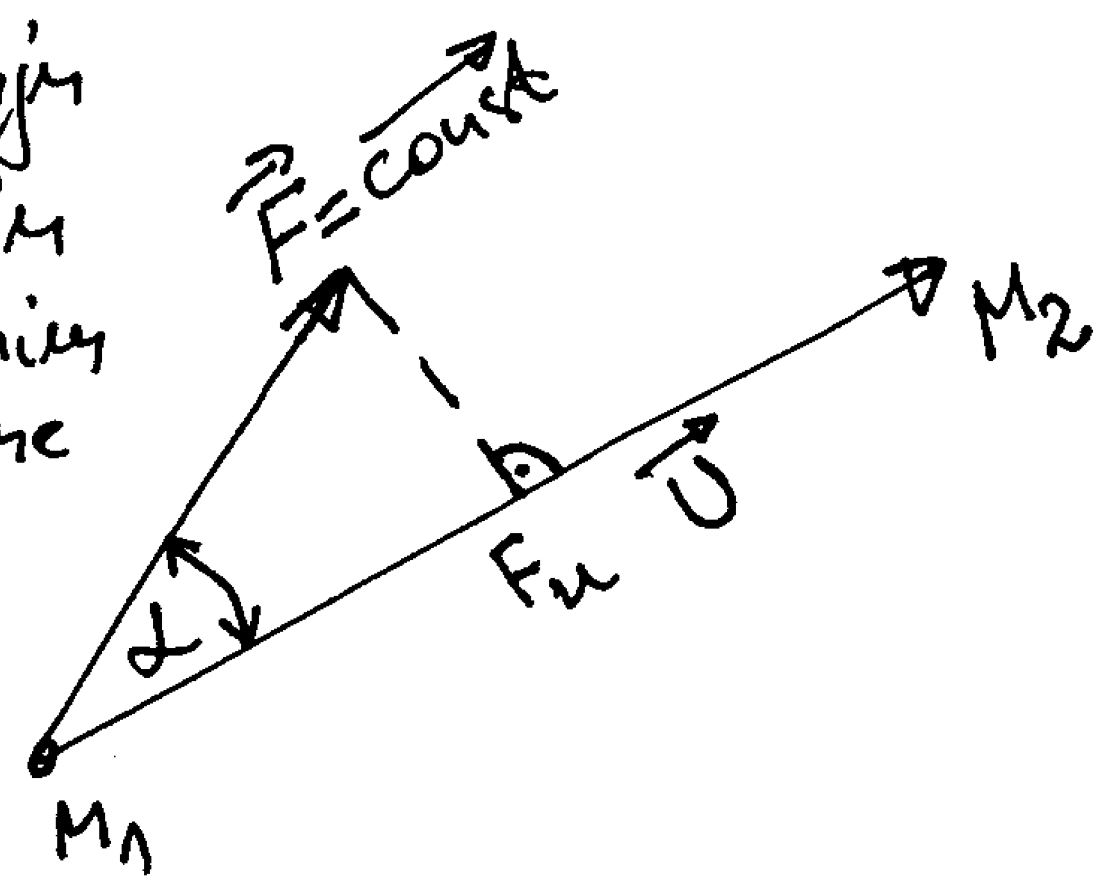
$$\boxed{S_A = 23{,}74\,N}$$

$$\boxed{S_B = 1{,}88\,N}$$

1.8. Rad sile i snaga

Rad sile je skalarna veličina koja predstavlja mjeru dejstva sile na materijalnu tačku pri njenom pomjeranju.

a) Rad konstantnte sile na pravolinijskom pomjeranju



Rad konstantne sile $\vec{F}$ na pravolinijskom pomjeranju njene napadne tačke $\overrightarrow{M_1M_2} = \vec{U}$ definisan je skalarnim proizvodom vektora sile i vektora pomjeranja napadne tačke, tj.

$$A_{(M_1,M_2)} = \vec{F} \cdot \overrightarrow{M_1M_2}, \qquad (20)$$

ili

$$A_{(M_1,M_2)} = F\,U\cos\alpha = F_u\,U,$$

gdje je F_u projekcija sile na pravac pomjeranja ($F_u = F\cos\alpha$) i $U = \overline{M_1M_2}$.

Specijalni slučajevi:

1) Ako je $\alpha = 0$ ($\vec{F} \uparrow\uparrow \vec{U}$), onda je $A_{(M_1,M_2)} = FU$;

2) Ako je $\alpha = 90°$ ($\vec{F} \perp \vec{U}$), onda je $A_{(M_1,M_2)} = 0$;

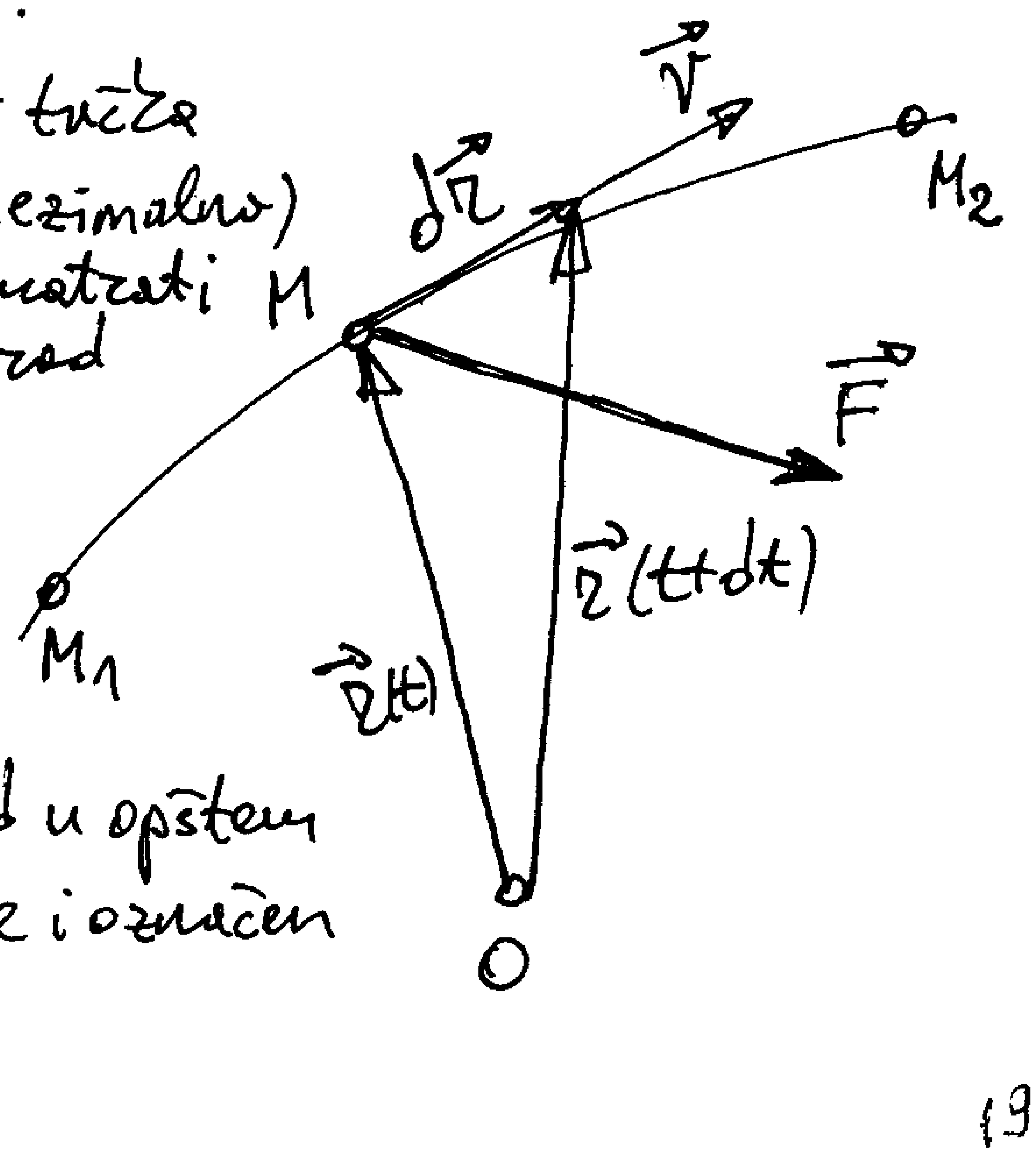
3) Ako je $\alpha = 180°$ ($\vec{F} \uparrow\downarrow \vec{U}$), onda je $A_{(M_1,M_2)} = -FU$.

Prema tome, rad sile može biti: pozitivan (sila ubrzava kretanje), negativan (sila usporava kretanje), jednak nuli (sila upravna na pomjeranje — ne utiče na promjenu intenziteta brzine).

Jedinica mjere za rad sile je Džul, 1J = 1Nm — to je rad koji izvrši sila intenziteta jednog Njutna na pomjeranju od jednog metra u pravcu dejstva sile.

b) Rad promjenljive sile na krivolinijskom pomjeranju

Posmatrajmo kretanje materijalne tačke M, na koju djeluje promjenljiva sila $\vec{F}$, duž krivolinijske trajektorije koja je određena parametarskom jednačinom kretanja $\vec{r} = \vec{r}(t)$.



Za beskonačno mali interval vremena dt tačka izvrši beskonačno malo (elementarno, infinitezimalno) pomjeranje $d\vec{r}$. Na ovom pomjeranju može se smatrati da je sila konstantna pa je, u skladu sa (20), rad sile na elementarnom pomjeranju

$$\delta A = \vec{F} \cdot d\vec{r} \qquad (21)$$

i on se zove <u>elementarni</u> rad.

Važno je napomenuti da elementarni rad u opštem slučaju nije diferencijal neke funkcije (zato je i označen sa δA, a ne dA).

Ako se tačka M pomjeri iz položaja M_1 u neki drugi položaj M_2, tada sila $\vec{F}$ vrši konačan rad na tom pomjeranju koji je određen izrazom:

$$A_{(M_1,M_2)} = \int_{M_1}^{M_2} \hat{d}A = \int_{M_1}^{M_2} \vec{F}\cdot d\vec{r} \qquad (22)$$

Ovaj izraz u matematičkom smislu predstavlja krivolinijski integral. Prema tome, rad sile na bilo kom pomjeranju jednak je integralu elementarnog rada, računatom duž krive koju opisuje napadna tačka sile.

Iz (22) i osobine skalarnog proizvoda slijedi da je rad rezultante $\vec{F} = \sum \vec{F_i}$ jednak zbiru radova komponenata:

$$A_{(M_1,M_2)}(\vec{F}) = \sum A_{(M_1,M_2)}(\vec{F_i})$$

Pošto je $d\vec{r}/dt = \vec{v}$, to je vektor elementarnog pomjeranja kolinearan sa vektorom brzine tačke:

$$d\vec{r} = \vec{v}\, dt$$

pa ga na jednostavan način možemo izraziti u različitim koordinatnim sistemima, što nam omogućava da elementarni rad (21), odnosno rad na konačnom pomjeranju (22), izrazimo u tim koordinatnim sistemima.

- Dekartov koordinatni sistem:

$$d\vec{r} = \vec{v}\,dt = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}; \quad \vec{F} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k},$$

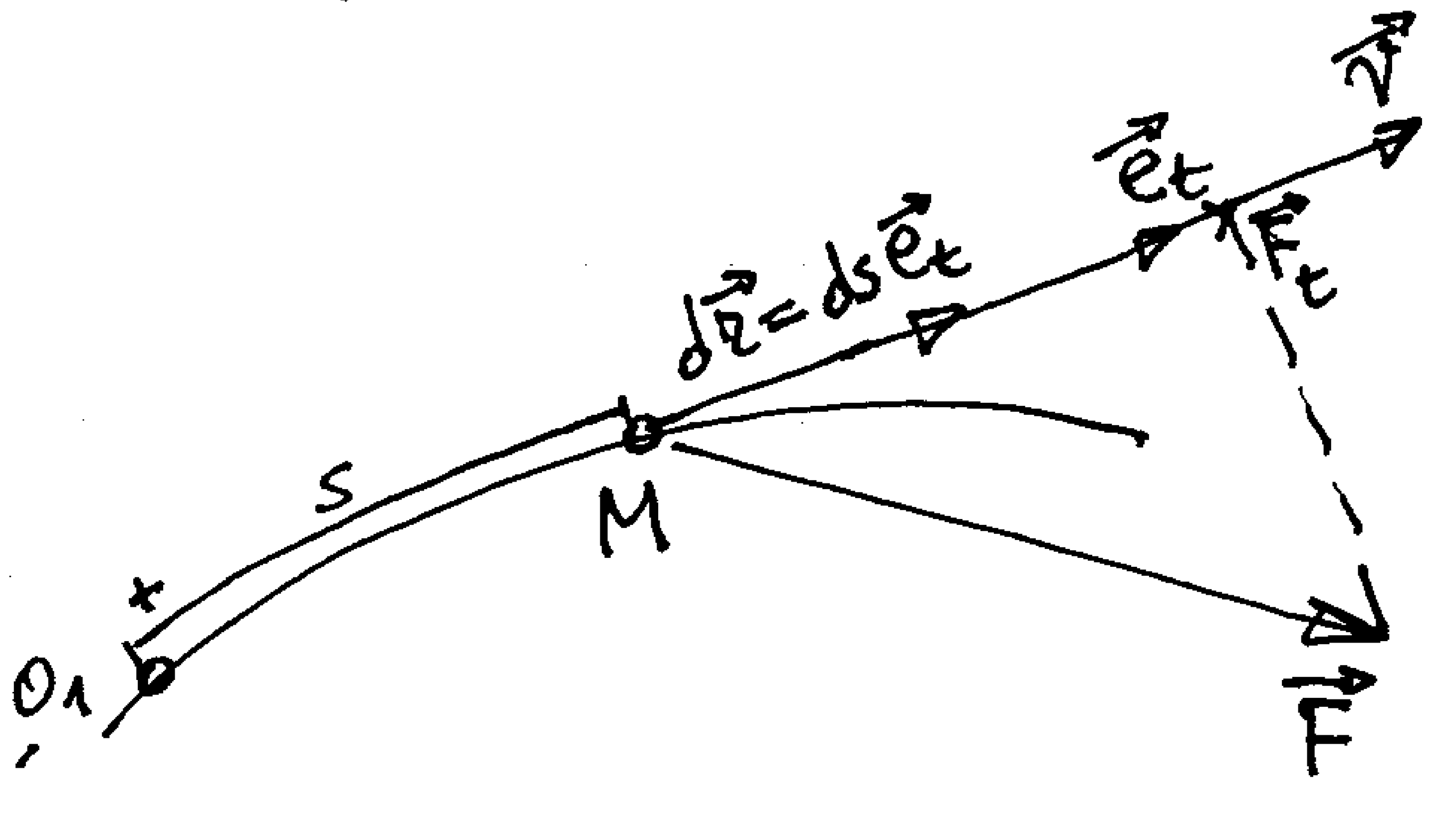
$$\hat{d}A = \vec{F}\cdot d\vec{r} = F_x\,dx + F_y\,dy + F_z\,dz, \quad A_{(M_1,M_2)} = \int_{M_1}^{M_2}(F_x\,dx + F_y\,dy + F_z\,dz) \qquad (23)$$

- Prirodni koordinatni sistem

$$\vec{v} = v\vec{e}_t = \frac{ds}{dt}\vec{e}_t, \quad d\vec{r} = \vec{v}\,dt = ds\,\vec{e}_t$$

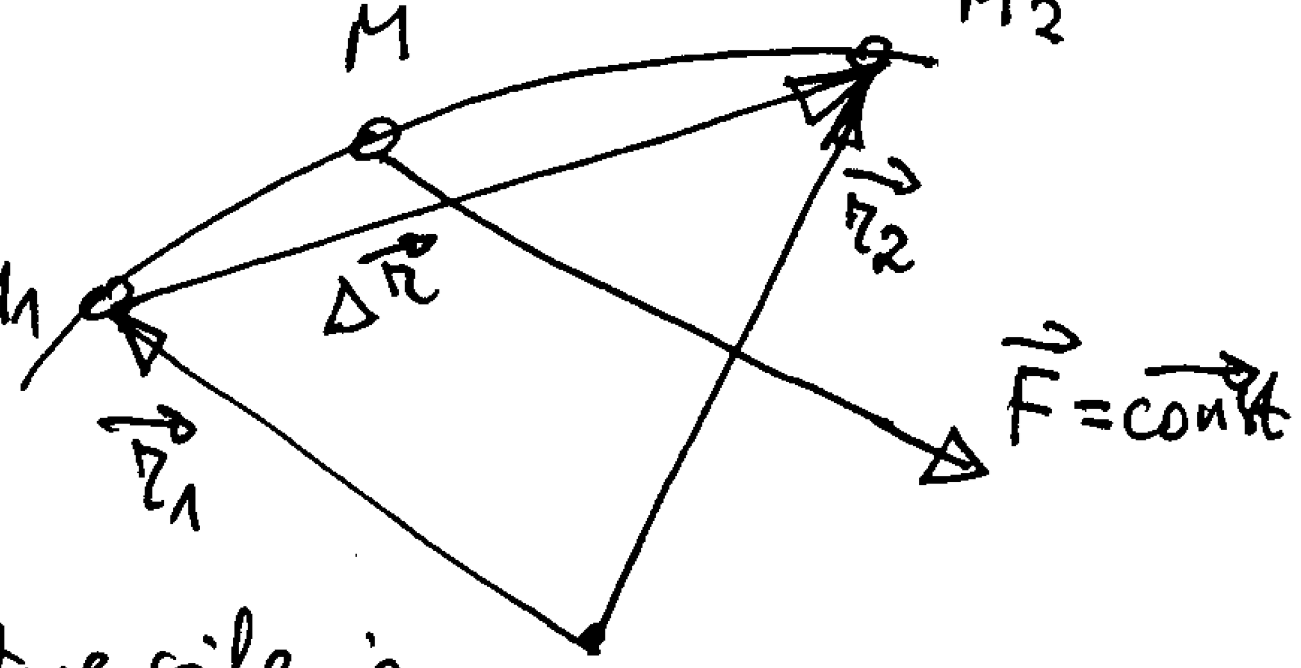
$$\hat{d}A = \vec{F}\cdot d\vec{r} = \vec{F}\cdot\vec{e}_t\,ds = F_t\,ds$$

$$A_{(M_1,M_2)} = \int_{M_1}^{M_2} F_t\,ds \qquad (24)$$



Rad neke sile se može unaprijed izračunati, ne poznavajući zakon kretanja tačke, samo kad je sila konstantna ili kad je funkcija položaja.

Ako je sila konstantna, onda je na osnovu (22)

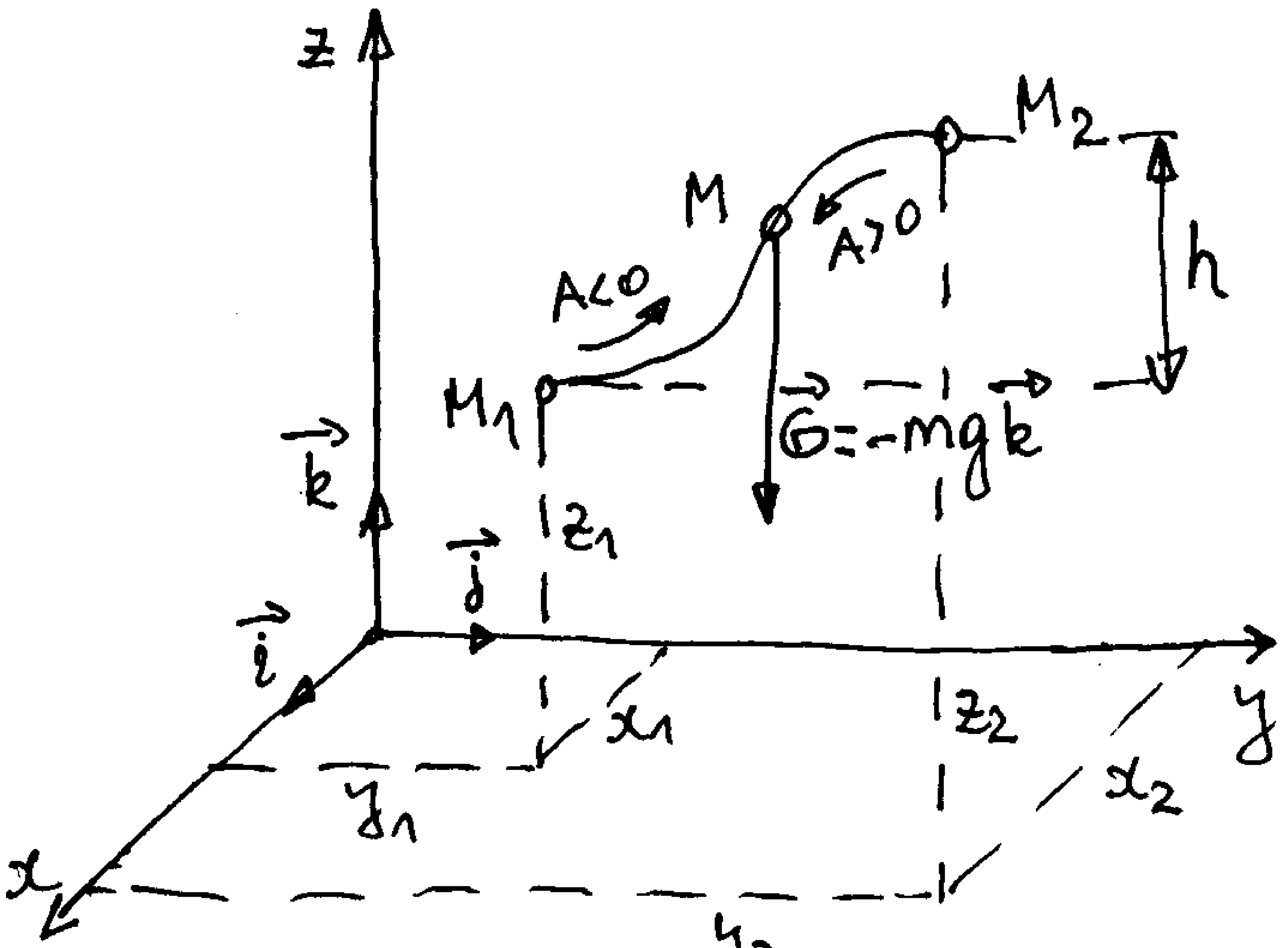


$$A_{(M_1,M_2)} = \int_{M_1}^{M_2} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \vec{F}\cdot\int_{M_1}^{M_2} d\vec{r} = \vec{F}\cdot\vec{r}\,\Big|_{M_1}^{M_2}$$

$$= \vec{F}\cdot(\vec{r}_2-\vec{r}_1) = \vec{F}\cdot\Delta\vec{r} = \vec{F}\cdot\overrightarrow{M_1M_2},$$

što se svodi na (20). Znači, rad konstantne sile je jednak skalarnom proizvodu vektora sile i vektora pomjeranja napadne tačke sile.

Primjer. <u>Rad sile teže.</u>



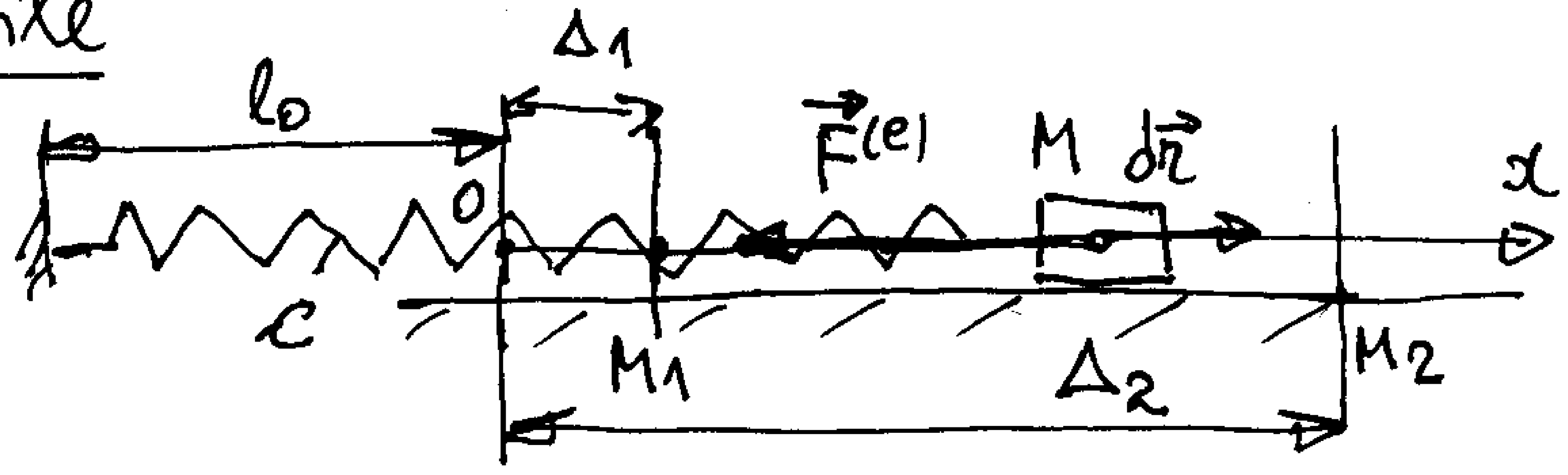
$$\vec{G} = -mg\vec{k} = const$$

$$\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2-x_1)\vec{i} + (y_2-y_1)\vec{j} + (z_2-z_1)\vec{k}$$

$$A_{(M_1,M_2)} = \vec{G}\cdot\overrightarrow{M_1M_2} = -mg(z_2-z_1)$$

$A_{(M_1,M_2)} = \pm mgh$, h - visinska razlika između početnog i krajnjeg položaja; "+" ako je početni položaj iznad krajnjeg (tačka se kreće na dolje) i "−" ako je početni položaj ispod krajnjeg (tačka se kreće na gore).

Primjer. <u>Rad elastične sile</u>



$$\vec{F}^{(e)} = -cx\vec{i}$$

$$d\vec{r} = dx\vec{i}$$

$$\delta A = \vec{F}^{(e)}\cdot d\vec{r} = -cx\,dx$$

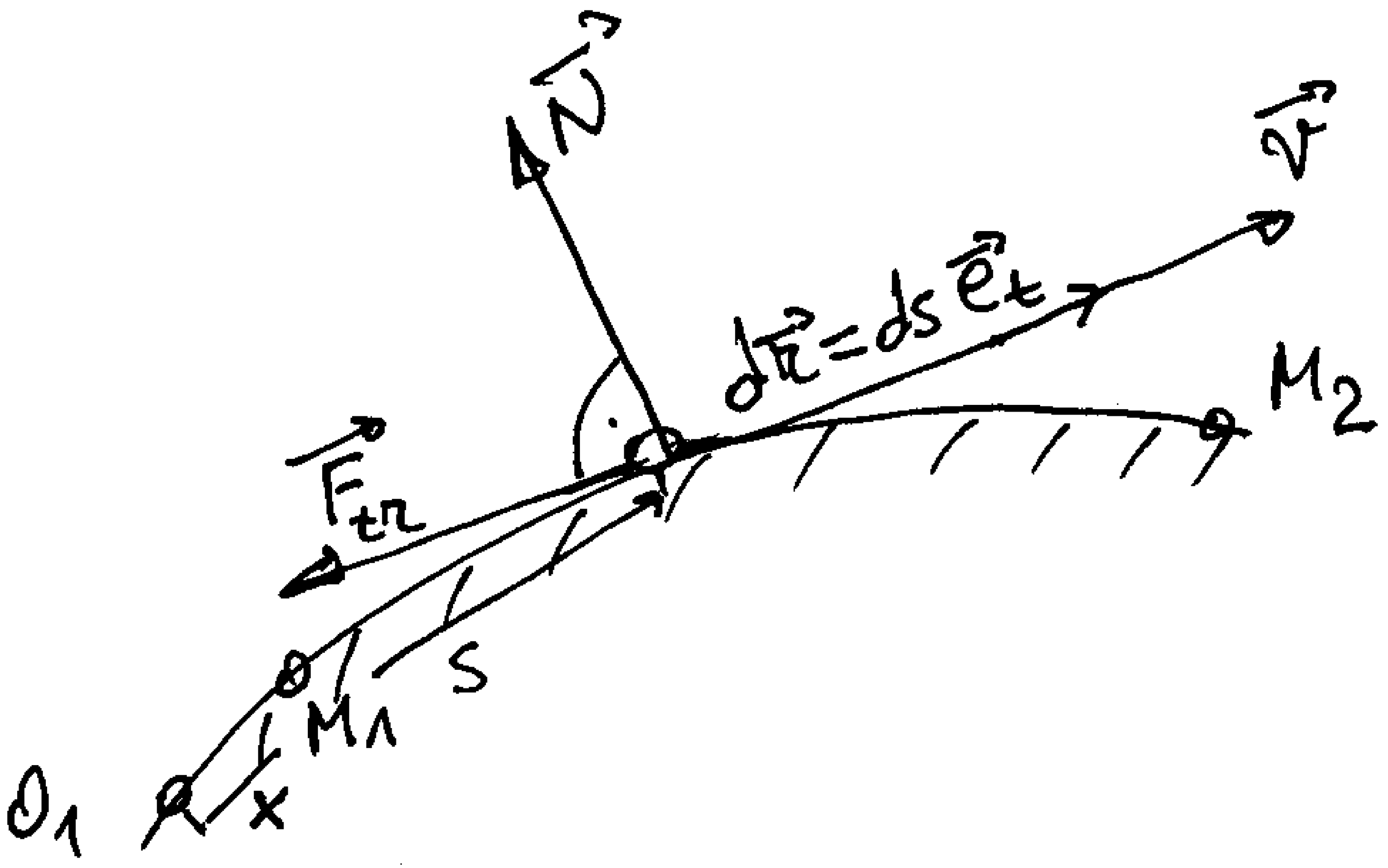
$$A_{(M_1,M_2)} = \int_{M_1}^{M_2}\delta A = \int_{\Delta_1}^{\Delta_2} -cx\,dx = -\frac{1}{2}cx^2\Big|_{\Delta_1}^{\Delta_2}$$

$$\boxed{A_{(M_1,M_2)} = \frac{1}{2}c\left(\Delta_1^2 - \Delta_2^2\right)}$$

Primjer. Rad sile trenja

$$\hat{d}A = -F_{tr}\, ds$$

$$A_{(M_1,M_2)} = -\int_{M_1}^{M_2} F_{tr}\, ds \;, \quad F_{tr} = \mu_D N$$



Ako je $F_{tr} = const$, onda je

$A_{(M_1,M_2)} = -F_{tr}(s_2 - s_1)$, $s_2 - s_1 = \overset{\frown}{M_1M_2}$ – dužina luka krive po kojoj se pomjera tačka. Primijetimo da je rad sile trenja klizanja uvijek negativan (ova sila usporava kretanje). Takođe, primijetimo da je rad normalne komponente reakcije veze $\vec{N}$ jednak nuli: $\hat{d}A(\vec{N}) = \vec{N}\cdot d\vec{r} = 0$ jer je $\vec{N} \perp d\vec{r}$.

Snaga. Snaga je veličina koja karakteriše brzinu vršenja rada.
Neka sila $\vec{F}$ izvrši rad A za vrijeme t_1. Tada je srednja snaga te sile definisana izrazom:

$$P_{sr} = \frac{A}{t_1}.$$

Pošto se elementarni rad $\hat{d}A = \vec{F}\cdot d\vec{r}$ izvrši za elementarni interval vremena dt, to je trenutna snaga sile $\vec{F}$ određena izrazom:

$$P = \frac{\hat{d}A}{dt} = \frac{\vec{F}\cdot d\vec{r}}{dt} = \vec{F}\cdot\vec{v}, \qquad (25)$$

tj. ona je jednaka skalarnom proizvodu vektora sile koja djeluje na materijalnu tačku i vektora brzine te tačke.
Snaga ima dimenziju rada u jedinici vremena, a jedinica mjere je Vat, $1\,W = 1\,J/s$ – snaga koja odgovara radu od jednog džula koji se izvrši u jednoj sekundi.
Rad koji izvrši ~~neka~~ mašina često se izražava kao proizvod njene srednje snage i vremena rada mašine. Na taj način se došlo do jedinice za rad koja se veoma često upotrebljava u tehnici, a to je kilovat-čas: $1\,kWh = 3{,}6\cdot 10^6\,J$.
U prirodnom koordinatnom sistemu izraz (25) postaje

$$P = F_t\, v, \qquad (26)$$

tj. snaga je jednaka proizvodu tangencijalne komponente sile i brzine kretanja.

1.9 Zakon o promjeni kinetičke energije

Kinetička energija materijalne tačke, mase m, koja se kreće brzinom $\vec{v}$ je skalarna veličina definisana izrazom

$$E_k = \frac{1}{2} m v^2, \qquad (27)$$

tj. predstavlja polovinu proizvoda mase i kvadrata brzine tačke.

Ako osnovnu jednačinu dinamike tačke

$$m\vec{a} = \vec{F}$$

pomnožimo skalarno sa vektorom elementarnog pomjeranja $d\vec{r} = \vec{v}dt$, znajući da je $\vec{a} = d\vec{v}/dt$, dobijamo

$$m\vec{v} \cdot d\vec{v} = \vec{F} \cdot d\vec{r}.$$

Pošto je $m\vec{v} \cdot d\vec{v} = m\frac{1}{2}d(\vec{v}\cdot\vec{v}) = d(\frac{1}{2}mv^2) = dE_k$ i $\delta A = \vec{F} \cdot d\vec{r}$, to se gornja jednačina može zapisati u obliku

$$dE_k = \delta A \qquad (28)$$

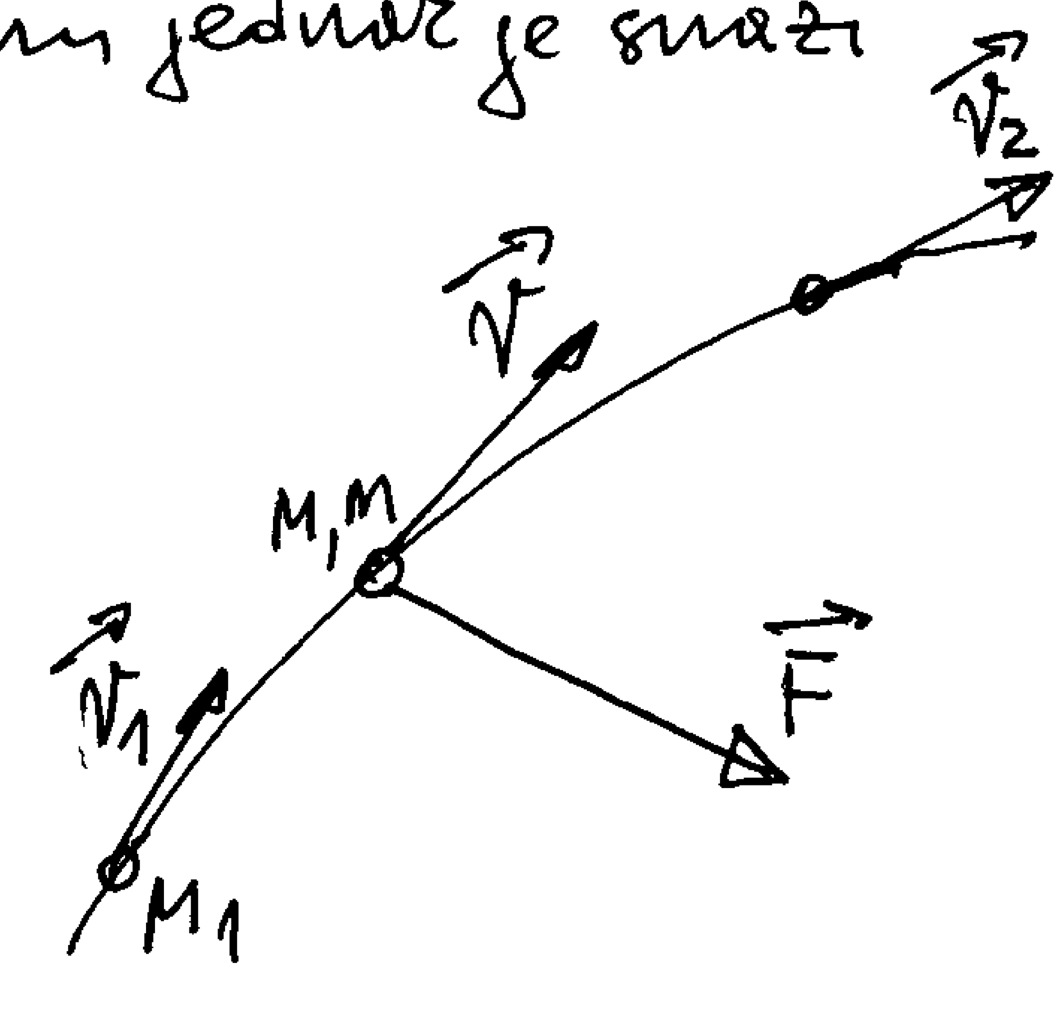
koji predstavlja diferencijalni oblik zakona o promjeni kinetičke energije materijalne tačke: Elementarni priraštaj (diferencijal) kinetičke energije materijalne tačke jednak je elementarnom radu sile koja djeluje na tačku.

Dijeljenjem lijeve i desne strane u (28) sa dt dobijamo alternativni oblik

$$\frac{dE_k}{dt} = P, \qquad (29)$$

koji glasi: Izvod kinetičke energije po vremenu jednak je snazi sile pod čijim se dejstvom tačka kreće.

Konačni (integralni) oblik ovog zakona se dobija integracijom izraza (28) duž trajektorije od početnog položaja M_1 do krajnjeg položaja M_2:



$$E_{k2} - E_{k1} = A_{(M_1,M_2)}, \qquad (30)$$

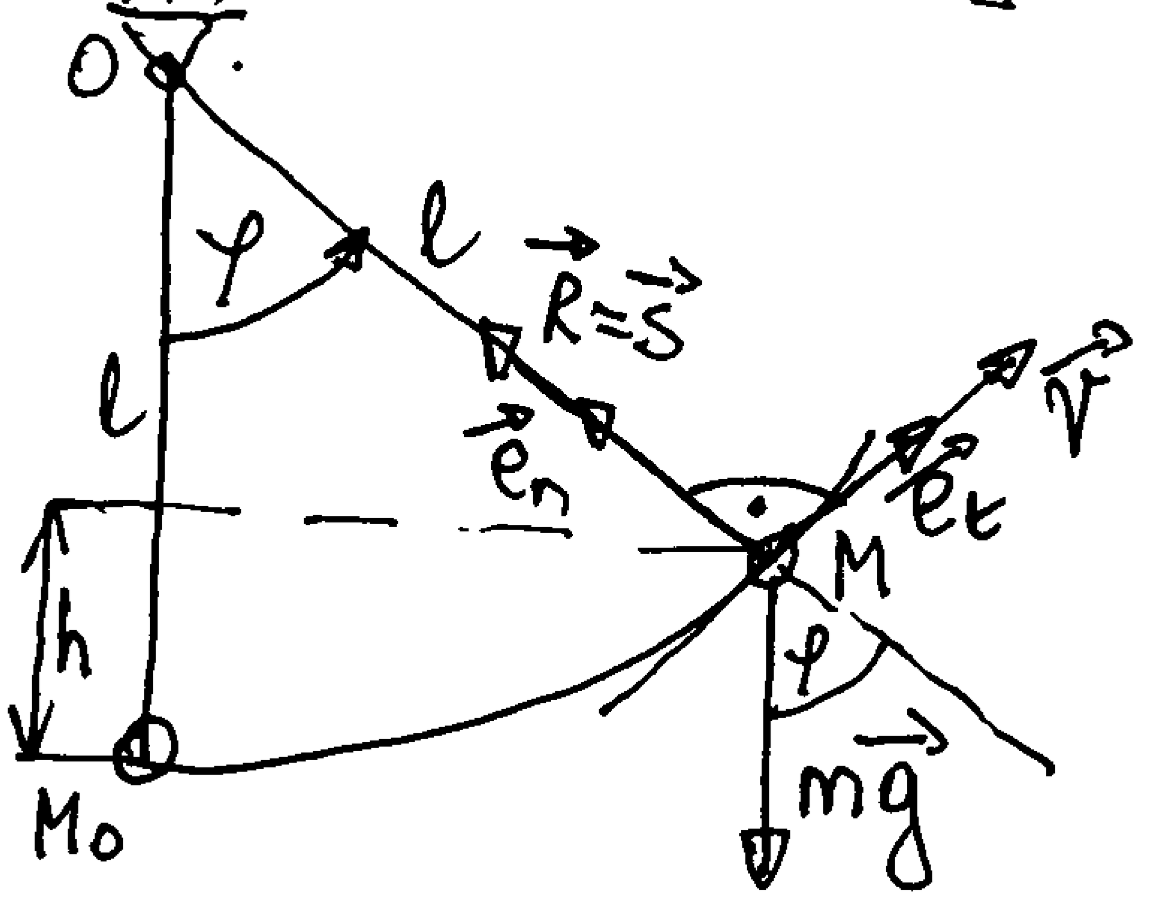
odnosno

$$\frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = A_{(M_1,M_2)}, \quad A_{(M_1,M_2)} = \int_{M_1}^{M_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} \qquad (30')$$

Prema tome, priraštaj kinetičke energije materijalne tačke na konačnom pomjeranju jednak je radu sile, koja djeluje na tačku, na tom pomjeranju.

U ovim formulacijama podrazumijeva se da se u slučaju dejstva više sila, bilo da su u pitanju aktivne sile ili reakcije veza, računaju rad i snaga svih sila koje djeluju na tačku. Ako je veza u obliku nepokretne glatke površi ili linije, reakcija veze je usmjerena po normali na putanju tačke pa je njen rad jednak nuli.

Primjer 10. U najnižem položaju matematičkom klatnu, mase m i dužine l, saopšti se početna brzina v_0. a) Odrediti brzinu tačke u položaju određenim uglom φ; b) Kolika je sila reakcije veze u tom položaju?



a) $E_k - E_{k0} = A_{(M_0,M)}(m\vec{g}) + A_{(M_0,M)}(\vec{S})$

$E_k = \frac{1}{2}mv^2$, $E_{k0} = \frac{1}{2}mv_0^2$

$A_{(M_0,M)}(m\vec{g}) = -mgh$, $h = l - l\cos\varphi$

$A_{(M_0,M)}(\vec{S}) = 0$ jer je $\vec{S} \perp \vec{e}_t$

$\Rightarrow \boxed{v^2 = v_0^2 - 2gl(1-\cos\varphi)}$ $(*)$

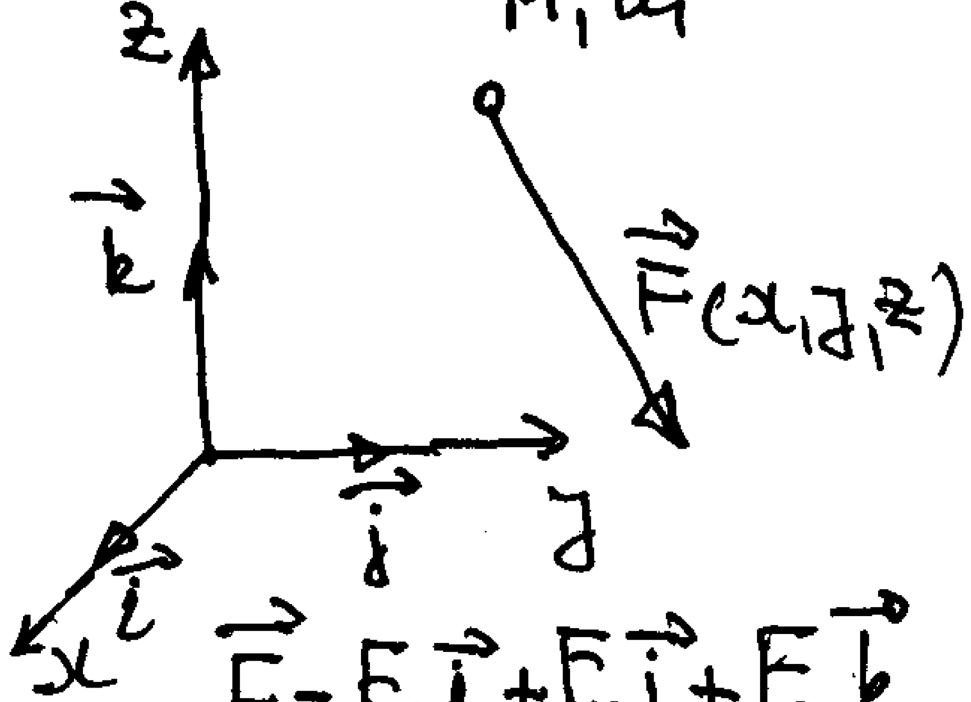
b) $m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{S}$

$\vec{e}_n$: $ma_n = -mg\cos\varphi + S$, $a_n = \frac{v^2}{R_k}$, $R_k = l$

$\Rightarrow S = \frac{mv^2}{l} + mg\cos\varphi \overset{(*)}{=} \boxed{\frac{mv_0^2}{l} - 2mg + 3mg\cos\varphi}$

1.10 Konzervativne sile. Zakon o održanju mehaničke energije

Sila koja zavisi od položaja $\vec{F}(x,y,z)$ je konzervativna ako se njene projekcije na ose Dekartovog koordinatnog sistema mogu izraziti kao negativni parcijalni izvodi jedne skalarne funkcije $E_p(x,y,z)$ po odgovarajućim koordinatama:



$$F_x = -\frac{\partial E_p}{\partial x}, \quad F_y = -\frac{\partial E_p}{\partial y}, \quad F_z = -\frac{\partial E_p}{\partial z}$$

$$\vec{F} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k}$$

Funkcija E_p se zove potencijalna energija.

Elementarni rad konzervativne sile je

$$\delta A = \vec{F}\cdot d\vec{r} = -\left(\frac{\partial E_p}{\partial x}dx + \frac{\partial E_p}{\partial y}dy + \frac{\partial E_p}{\partial z}dz\right) = -dE_p,$$

tj. jednak je negativnom diferencijalu potencijalne energije.

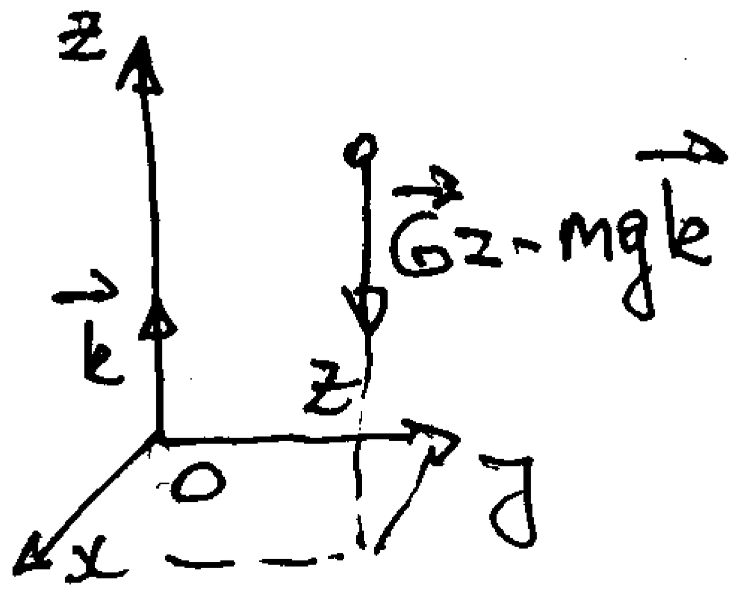
Rad konzervativne sile $\vec{F}$ na konačnom pomjeranju od položaja M_1 do položaja M_2 biće

$$A_{(M_1,M_2)} = \int_{M_1}^{M_2} \vec{F}\cdot d\vec{r} = -\int_{M_1}^{M_2} dE_p = E_p(M_1) - E_p(M_2)$$

i, prema tome, jednak je razlici vrijednosti potencijalne energije u početnom i krajnjem položaju. Odavde slijedi da rad konzervativne sile ne zavisi od oblika putanje po kojoj se tačka kreće, već samo od početnog i krajnjeg položaja.

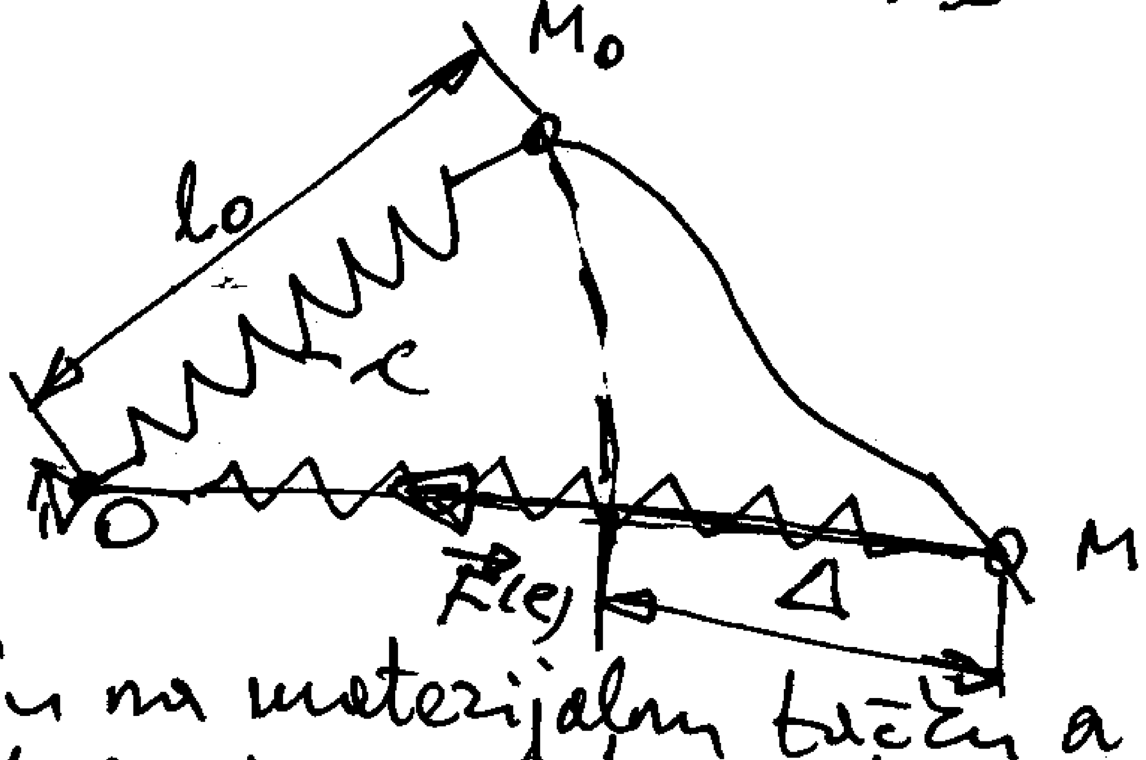
U konzervativne sile spadaju:

– sila zemljine teže $\vec{G} = -mg\vec{k}$



Njena potencijalna energija je $E_p = mgz$

– elastična sila $\vec{F}^{(e)}$



$$E_p = \frac{1}{2}c\Delta^2$$

$\Delta = \overline{OM} - l_0$, l_0 – dužina nedeformisane opruge.

Pretpostavimo da su sile koje djeluju na materijalnu tačku a koje vrše rad konzervativne. Tada jednačina (28) postaje $dE_k = -dE_p$, odnosno $d(E_k + E_p) = 0$, odakle slijedi

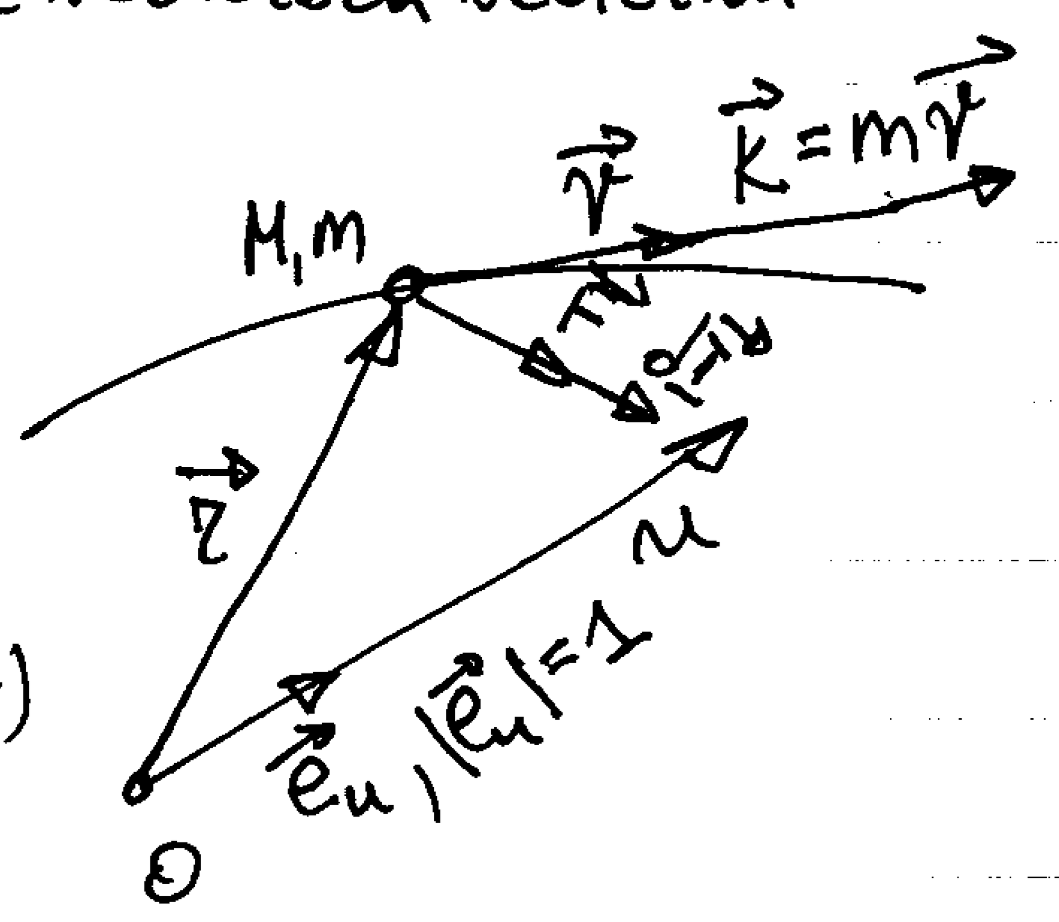
$$E_k + E_p = const \qquad (31)$$

Veličina $E = E_k + E_p$ zove se ukupna mehanička energija tačke, a (31) izražava zakon o održanju mehaničke energije: Ako su sve sile koje djeluju na materijalnu tačku a koje vrše rad, konzervativne, onda ukupna mehanička energija ostaje konstantna tokom kretanja.

1.11 Zakon o promjeni količine kretanja

Količina kretanja $\vec{K}$ materijalne tačke M, mase m, je vektorska veličina određena proizvodom mase tačke i njene brzine

$$\vec{K} = m\vec{v} \qquad (32)$$



Ako je $\vec{F}$ rezultanta sila (aktivnih i reakcija veza) koje djeluju na tačku M, onda se osnovna jednačina dinamike $m\vec{a} = \vec{F}$, pod pretpostavkom o nepromjenljivosti mase ($m=const$) može napisati u obliku

$$\frac{d\vec{K}}{dt} = \vec{F}, \qquad (33)$$

jer je $d\vec{K}/dt = d(m\vec{v})/dt = m\vec{a}$.

Relacija (33) izražava diferencijalni oblik zakona o promjeni količine kretanja: Izvod po vremenu količine kretanja materijalne tačke jednak je sili koja djeluje na tačku.

Projicirajući jednačinu (33) na neku nepokretnu osu, recimo u, dobijamo

$$\frac{dK_u}{dt} = F_u \qquad (34)$$

gdje su K_u i F_u projekcije količine kretanja i sile na u-osu ($K_u = \vec{K}\cdot\vec{e}_u$, $F_u = \vec{F}\cdot\vec{e}_u$).

Relacija (34) predstavlja diferencijalni oblik zakona o promjeni projekcije količine kretanja na nepokretnu osu.

Definišimo elementarni impuls sile $\vec{F}$, kao:

$$d\vec{I} = \vec{F}dt \qquad (35)$$

To je veličina koja karakteriše dejstvo sile na materijalnu tačku tokom beskonačno malog vremenskog intervala dt. Sada se relacija (33) može zapisati u obliku

$$d\vec{K} = d\vec{I}, \qquad (36)$$

koji predstavlja drugi diferencijalni oblik zakona o promjeni količine kretanja: Diferencijal (elementarni priraštaj) količine kretanja materijalne tačke jednak je elementarnom impulsu sile koja djeluje na nju.

Ako posmatramo kretanje tačke M pod dejstvom sile $\vec{F}$ na konačnom vremenskom intervalu $[t_1, t_2]$, tada je impuls sile $\vec{F}$ za taj vremenski interval određen sa

$$\vec{I} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}dt \qquad (37)$$

Iz relacije (37) slijedi:

1) Impuls rezultante sila ($\vec{F} = \sum \vec{F}_i$) jednak je geometrijskom zbiru impulsa komponenata, tj.

$$\vec{I} = \sum \vec{I}_i \,, \quad \vec{I}_i = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_i \, dt .$$

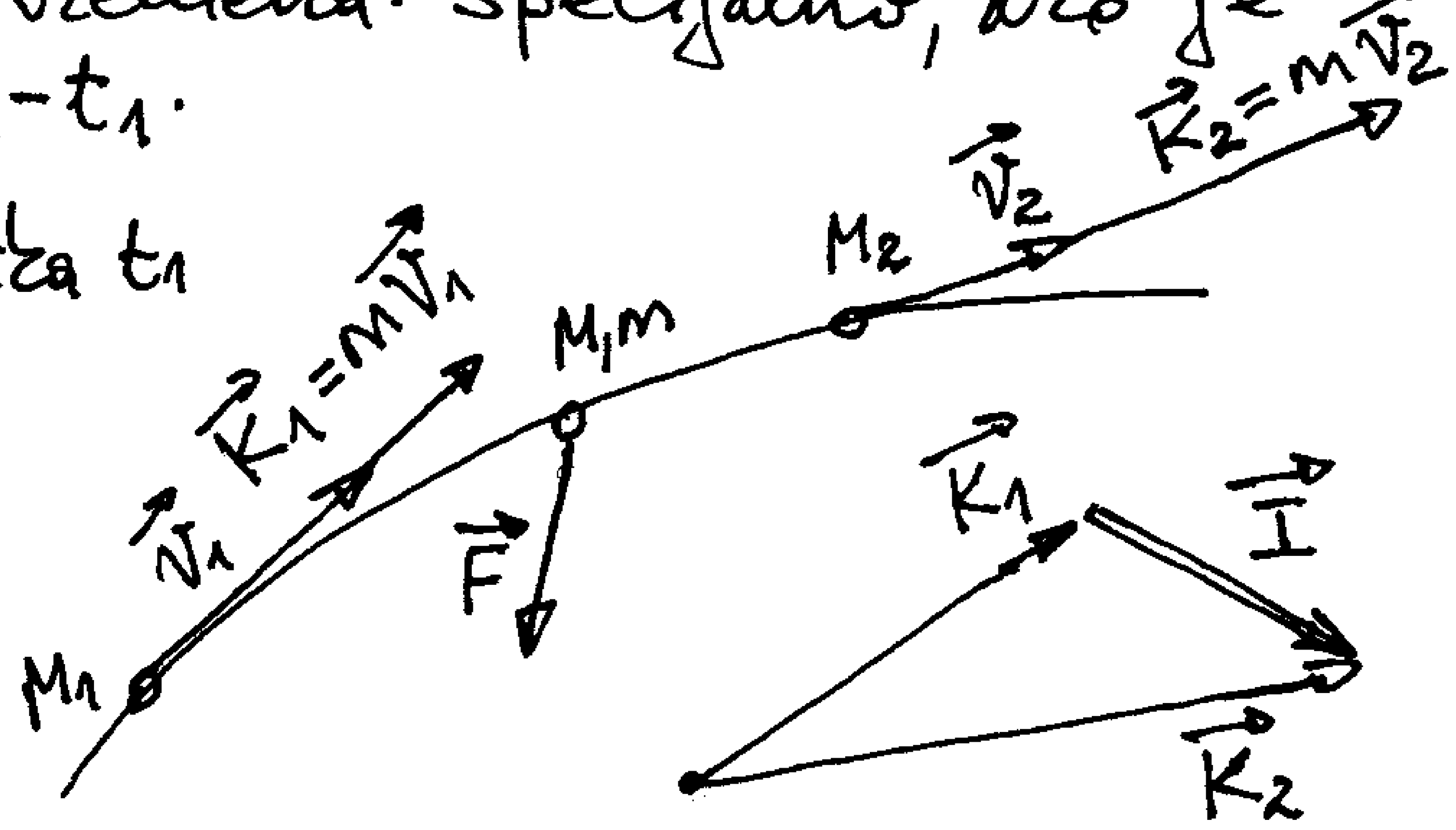
2) Da bi se izračunao određeni integral kojim je definisan impuls potrebno je znati silu kao funkciju vremena. Specijalno, ako je $\vec{F} = const$, biće $\vec{I} = \vec{F} \Delta t$, $\Delta t = t_2 - t_1$.

Integraleći jednačinu (36) od trenutka t_1 do trenutka t_2, dobijamo

$$\int_{t_1}^{t_2} d\vec{K} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt ,$$

odnosno

$$\vec{K}_2 - \vec{K}_1 = \vec{I} \tag{38}$$



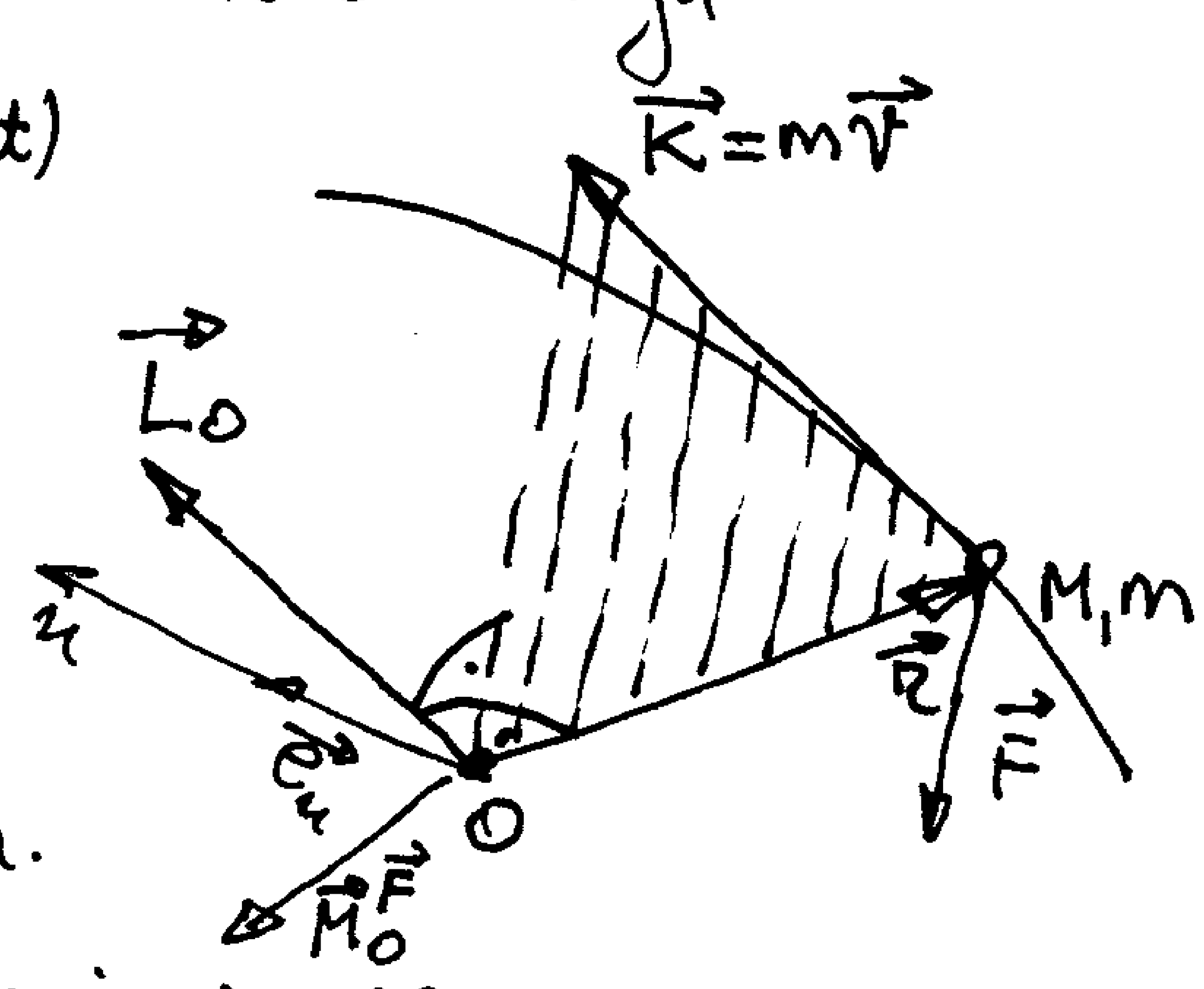
To je zakon o promjeni količine kretanja u integralnom (konačnom) obliku: Promjena količine kretanja tačke tokom konačnog vremenskog intervala jednaka je impulsu sile za taj isti vremenski interval.

Projicirajući jednačinu (38) na nepokretnu osu u dobijamo

$$K_{2u} - K_{1u} = I_u \,, \quad I_u = \int_{t_1}^{t_2} F_u \, dt , \tag{39}$$

što predstavlja integralni oblik zakona o promjeni projekcije količine kretanja.

1.12 Zakon o promjeni momenta količine kretanja



Moment količine kretanja (kinetički moment) materijalne tačke M za tačku O određuje se na isti način kao i moment sile, tj. definisan je izrazom:

$$\vec{L}_O=\vec{M}_O^{\vec{K}}=\vec{r}\times\vec{K}=\vec{r}\times m\vec{v}. \qquad (40)$$

To je vektor upravan na ravan vektora $\vec{r}$ i $\vec{K}$ i u smjeru datog vektorskog proizvoda.

Odredimo izvod momenta količine kretanja po vremenu:

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt}=\frac{d\vec{r}}{dt}\times m\vec{v}+\vec{r}\times m\frac{d\vec{v}}{dt}=\vec{v}\times m\vec{v}+\vec{r}\times m\vec{a}=\vec{r}\times m\vec{a},$$

jer je vektorski proizvod $\vec{v}\times m\vec{v}$ jednak nuli zog kolinearnosti vektora $\vec{v}$ i $m\vec{v}$. S druge strane, na osnovu osnovne jednačine dinamike je $m\vec{a}=\vec{F}$, pa slijedi

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt}=\vec{M}_O^{\vec{F}}, \quad \vec{M}_O^{\vec{F}}=\vec{r}\times\vec{F} \qquad (41)$$

Ova jednačina izražava zakon o promjeni momenta količine kretanja: Izvod po vremenu momenta količine kretanja materijalne tačke za tačku O jednak je momentu sile za istu tačku.

Projicirajući jednačinu (41) na nepokretnu osu u, dobijamo

$$\frac{dL_u}{dt}=M_u^{\vec{F}}, \qquad (42)$$

gdje je $L_u=M_u^{\vec{K}}=\vec{L}_O\cdot\vec{e}_u$ - moment količine kretanja za osu u, a $M_u^{\vec{F}}$ - moment sile $\vec{F}$ za osu u $(M_u^{\vec{F}}=\vec{M}_O^{\vec{F}}\cdot\vec{e}_u)$

Jednačina (42) izražava zakon o promjeni momenta količine kretanja za nepokretnu osu: Izvod po vremenu momenta količine kretanja materijalne tačke za neku nepokretnu osu jednak je momentu sile koja djeluje na tačku za istu osu.