

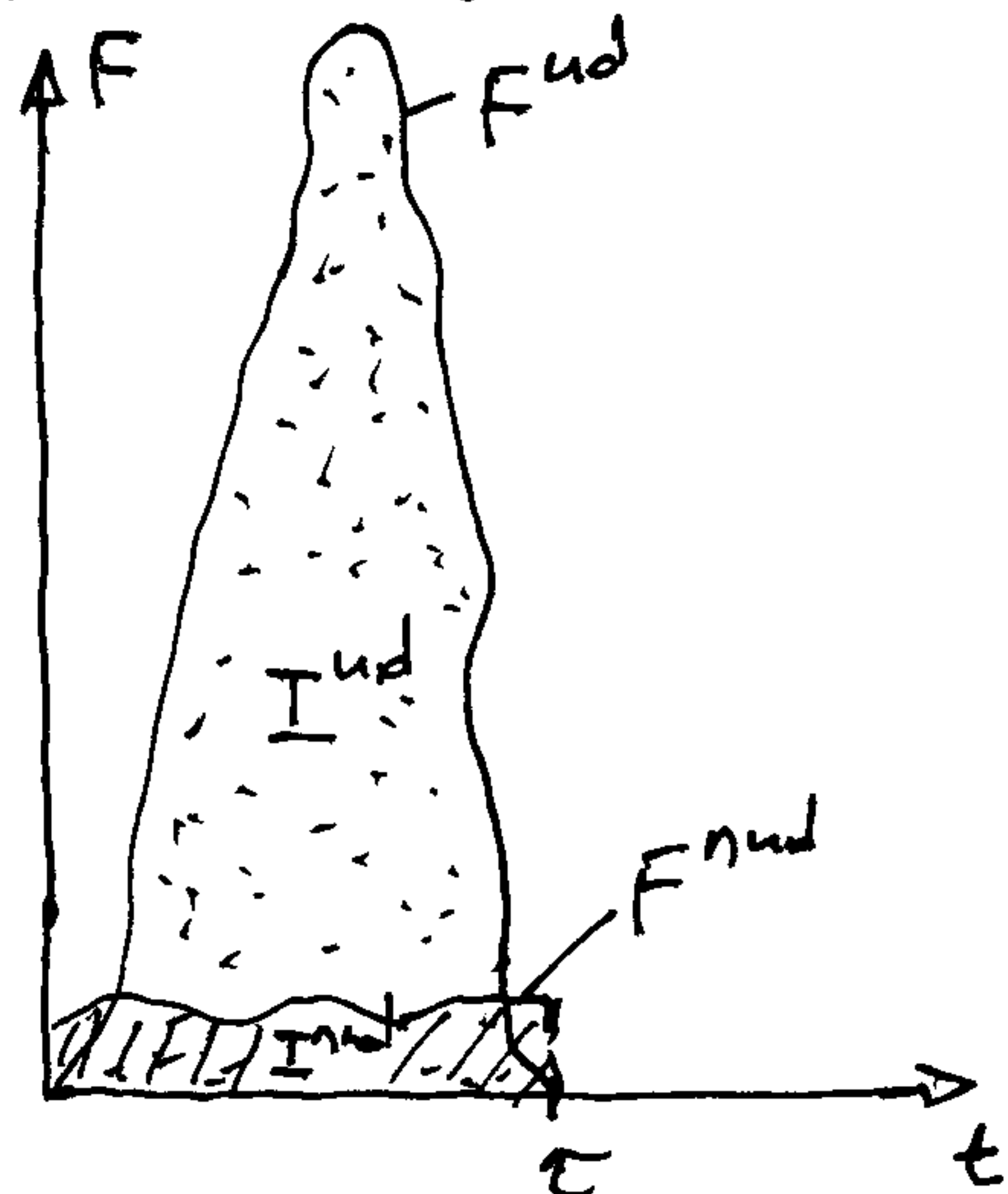
10. Osnovi teorije udara

Udar je pojava pri kojoj se brzine tačaka materijalnih objeata u toku vrlo malog intervala vremena τ promijene za konačne veličine.

Sile pod čijim dejstvom nastaje udar zovu se udarne sile. Njihovi intenziteti za vrijeme udara dostižu veoma velike vrijednosti, znatno veće od intenziteta običnih (neudarnih) sile.

Impulsi udarne \vec{F}^{ud} i neudarne sile \vec{F}^{nud} za vrijeme udara su

$$\vec{I}^{ud} = \int_0^{\tau} \vec{F}^{ud} dt, \quad \vec{I}^{nud} = \int_0^{\tau} \vec{F}^{nud} dt$$



Kako postoji velika razlika u intenzitetima udarne i neudarne sile ($\max|\vec{F}^{ud}| \gg \max|\vec{F}^{nud}|$),

to će takođe biti velika razlika u intenzitetima njihovih impulsa tokom procesa udara:

$$\vec{I}^{ud} \gg \vec{I}^{nud}$$

Zbog veoma male vrijednosti impulsa neudarne sile u odnosu na impuls udarne sile, može se, sa zadovoljavajućim stepenom tačnosti, zanemariti impuls neudarne sile:

$$\vec{I}^{nud} = 0 \quad (1)$$

Dalje, pri posmatranju pojave udara impulsi neudarnih sile se zanemaruju.

10.1 Osnovna jednačina udara. Koefficient udara

Posmatrajmo sada udar čod materijalne tačke mase m .

Neka je $\vec{V} = \vec{v}(t_1)$ brzina tačke na početku udara, a $\vec{U} = \vec{v}(t_2)$ brzina tačke na kraju udara, $t_2 - t_1 = \tau$. Pomjeranje tačke za vrijeme udara τ je $\Delta \vec{r} = \vec{v} \tau$ i predstavlja vrlo malu veličinu ($\tau \ll 1$), koja se praktično može zanemariti: $\Delta \vec{r} \approx 0$. S druge strane, glavna posljedica dejstva udarnih sile jeste konačna promjena brzine materijalne tačke u kratkom vremenskom intervalu: $\Delta \vec{v} = \vec{U} - \vec{V}$. Na osnovu zakona o promjeni količine kretanja materijalne tačke \leftarrow za vrijeme udara, biće

$$\vec{K}_2 - \vec{K}_1 = \vec{I}^{ud} + \vec{I}^{nud}$$

Imajući u vidu da je $\vec{K}_2 = m\vec{U}$, $\vec{K}_1 = m\vec{V}$, kao i pretpostavku (1), ova jednačina se svodi na

$$m(\vec{U} - \vec{V}) = \vec{I}^{ud} \quad (2)$$

i ona predstavlja osnovnu jednačinu teorije udara.

Prema tome, na osnovu prethodne analize proizilazi:

- 1) Dejstvo nendarnih sila za vrijeme udara se zanemaruje;
- 2) Za vrijeme udara tačka ostaje nepokretna;
- 3) Promjena brzine materijalne tačke za vrijeme udara određuje se na osnovu osnovne jednačine teorije udara (2).

Jednačina (2) nije dovoljna za potpuno određivanje svih nepoznatih veličina koje se javljaju u opisu sudara. Dodatna relacija se dobija korišćenjem koeficijenta udara (restitucije, uspostavljanja) k koji karakteriše ponašanje materijala od kojih su sačinjena tijela koja se sudaraju i određuje se eksperimentalno.

Koeficijent uspostavljanja je definisan količnikom apsolutnih vrijednosti projekcija relativnih brzina dodirnih tačaka tijela, na kraju i na početku udara, na zajedničku normalu u tački kontakta dva tijela:

$$k = \frac{|U_{Bn} - U_{An}|}{|V_{Bn} - V_{An}|} \quad (3)$$

Ako je tijelo B_2 nepokretno, tada je

$$k = \frac{|U_{An}|}{|V_{An}|} \quad (3')$$

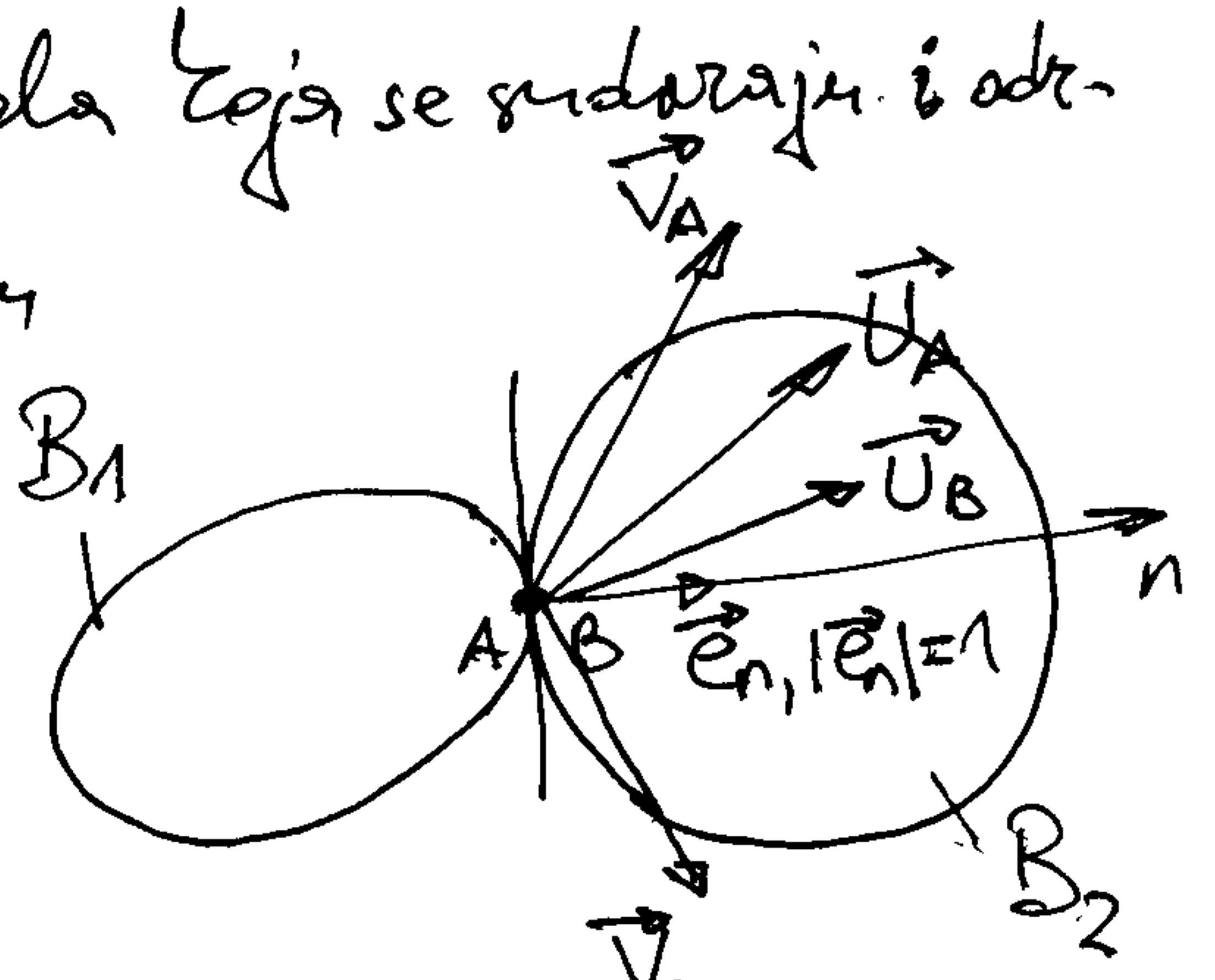
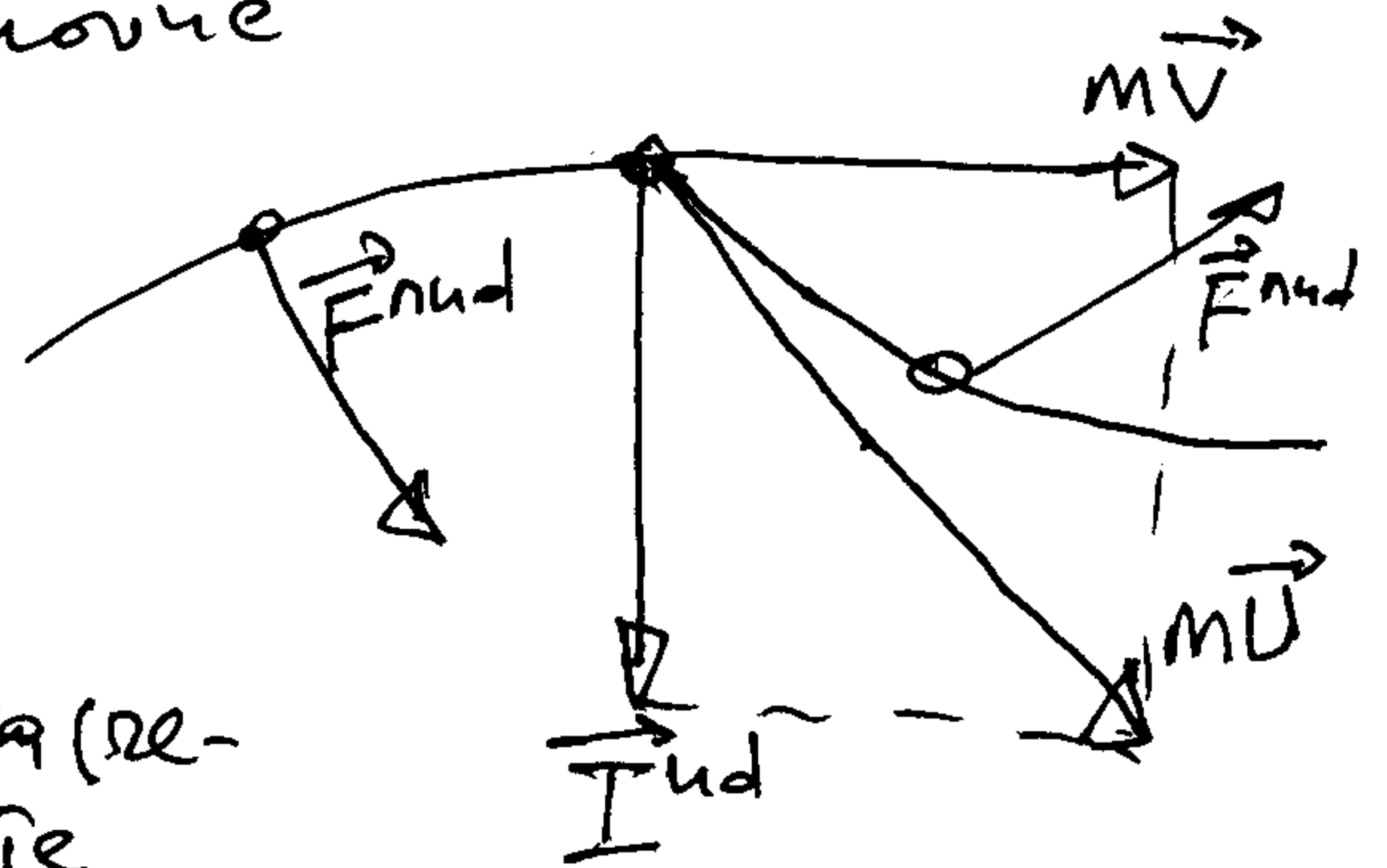
Vrijednost koeficijenta k je ograničena: $0 \leq k \leq 1$.

Krajnje vrijednosti se odnose na dva idealizovana slučaja: kada je $k=1$ udar je idealno elastičan, a kada je $k=0$ udar je idealno neelastičan ili plastičan.

Udar materijalne tačke u masivni glatki prepreku.

Posmatramo tačku mase m koja u nekom trenutku udara u nepokretni glatki prepreku. Neka je u trenutku sudara u kontaktu sa preprekom brzina tačke V i neka ona dozaže u ugao α sa pravcem normale na prepreku u tački dodira.

Treba da odredimo brzinu tačke U poslije sudara, uga β koji vektor ove brzine zaklapa sa normalom, kao i veličinu udarnog impulsa I koji djeluje na tačku.



$$V_{An} = \vec{V}_A \cdot \vec{e}_n, \quad V_{Bn} = \vec{V}_B \cdot \vec{e}_n$$

$$U_{An} = \vec{U}_A \cdot \vec{e}_n, \quad U_{Bn} = \vec{U}_B \cdot \vec{e}_n$$

Za vrijeme udara (dok su tačka i prepreka u kontaktu), prepreka djeluje na materijalnu tačku udarnom silom koja pada u pravcu normale na prepreku, jer je ona glatka. Zato će i odgovarajući impulsi udarne sile imati pravac normale na prepreku u tački dodira. Osnovna jednadžina udara (2) u ovom slučaju glasi:

$$m(\vec{U} - \vec{V}) = \vec{I},$$

a njene projekcije na tangentu i normalu su:

$$m(U \sin \alpha - V \sin \alpha) = 0,$$

$$m(U \cos \alpha + V \cos \alpha) = I.$$

} (*)

U ovom slučaju, koeficijent upostavljanja je

$$k = \frac{|U_n|}{|V_n|} = \frac{U \cos \alpha}{V \cos \alpha} \quad (**)$$

Rješavanjem jednadžina (*) i (**) nalazimo:

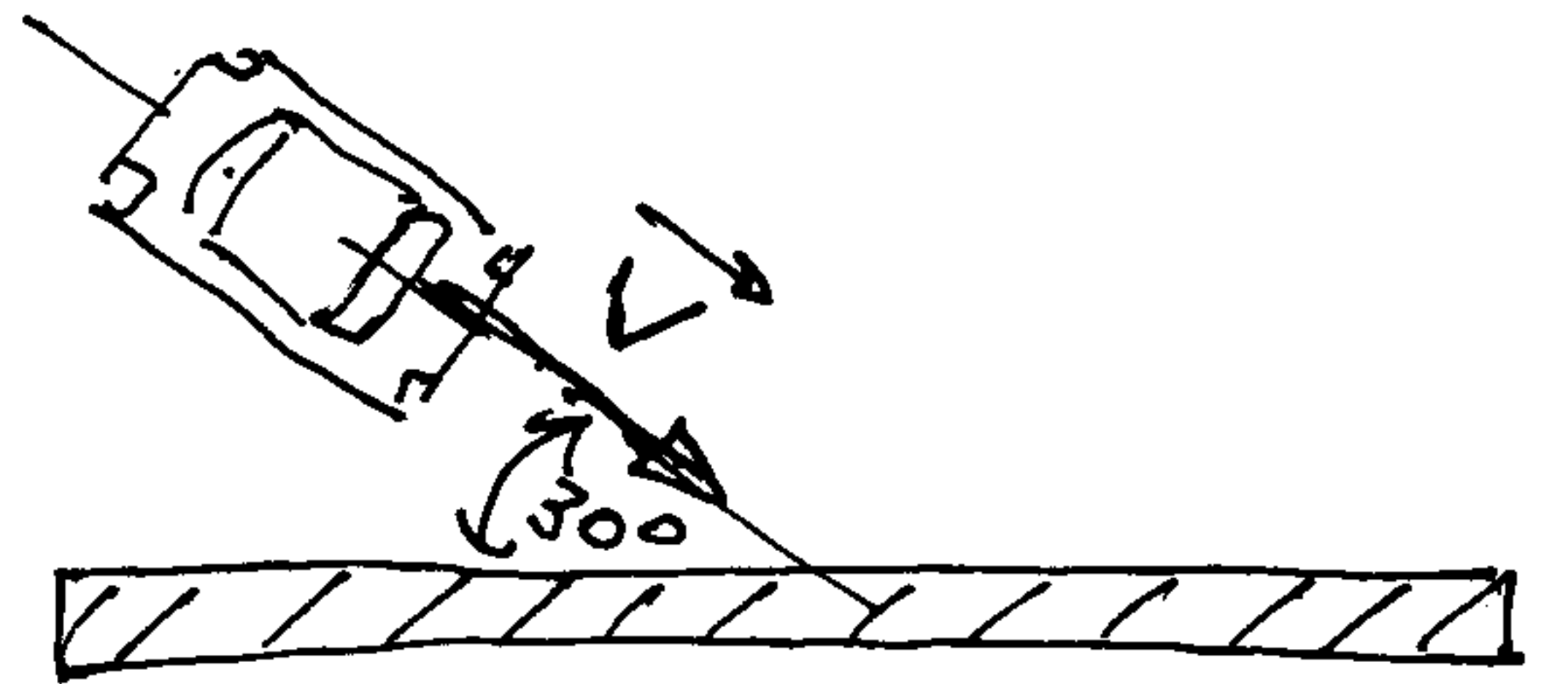
$$U = V \sqrt{\sin^2 \alpha + k^2 \cos^2 \alpha}, \quad \tan \beta = \frac{1}{k} \tan \alpha, \quad I = m(k+1)V \cos \alpha. \quad (\#)$$

U realnim uslovima je $k < 1$ pa je očigledno $U < V$ (brzina poslije sudara ima manji intenzitet od brzine prije sudara) i $\beta > \alpha$ (odbojni ugao je veći od upadnog).

Primer - Automobil, mase $m = 1200 \text{ kg}$, udara u zaštitni ograda puta brzinom intenziteta $v = 120 \text{ km/h}$, pod uglom od 30° u odnosu na ogradu.

Ako je vrijeme trajanja udara $\tau = 0,05 \text{ s}$, a koeficijent udara $k = 0,1$ odrediti: udarni impuls, srednju udarnu silu, brzinu automobila na kraju udara i ugao pod kojim se automobil odbija od ograde.

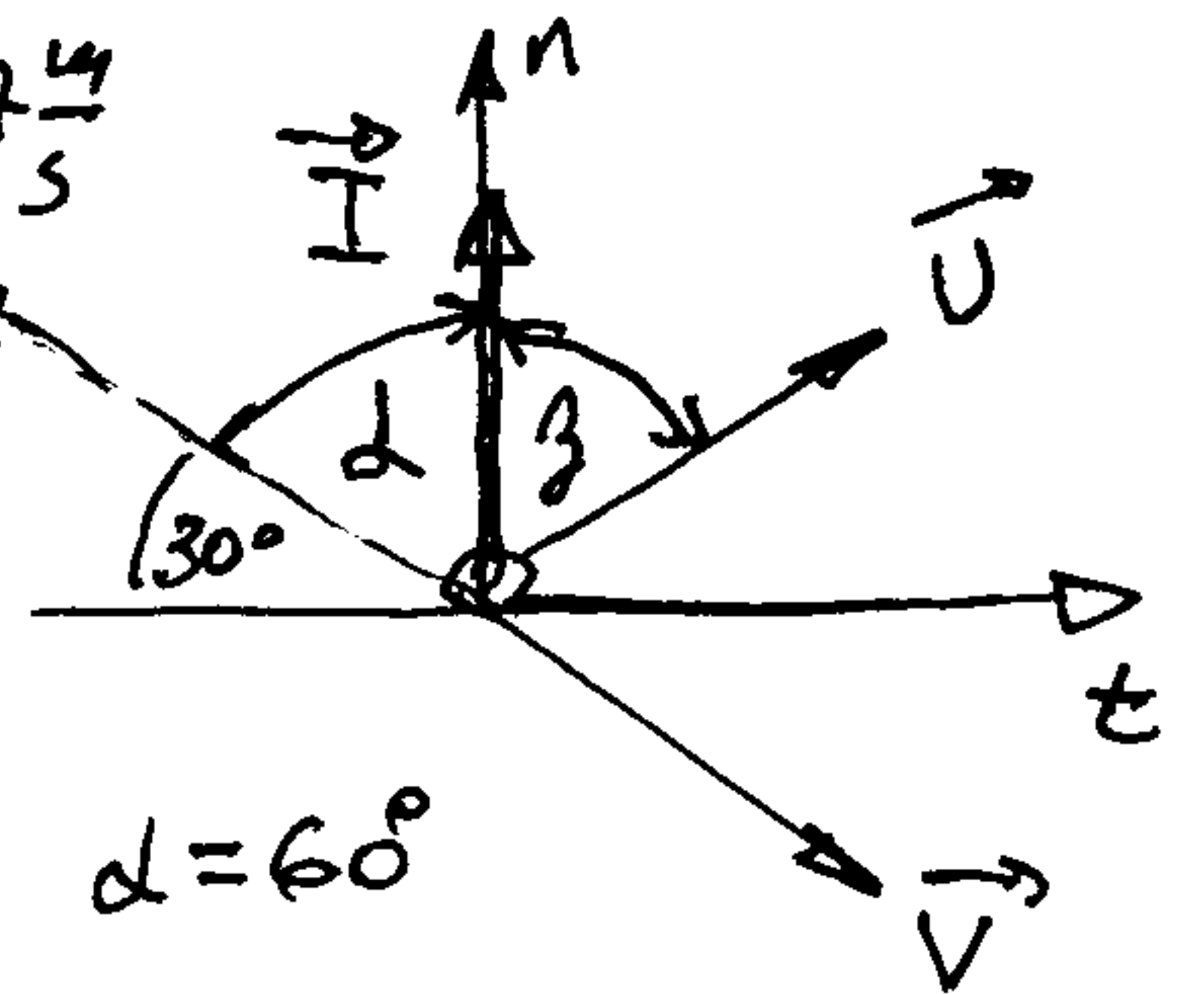
Automobil smatramo materijalnom točkom.



$$m(\vec{U} - \vec{V}) = \vec{I} \Rightarrow m(U_t - V_t) = 0 \Rightarrow U_t = V_t = v \sin \alpha = 28,87 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$m(U_n - V_n) = \vec{I}, \quad V_n = -v \cos \alpha = -16,67 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$k = \frac{|U_n|}{|V_n|} \Rightarrow U_n = 1,67 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$



$$\Rightarrow I = m(U_n - V_n) \approx 22000 \text{ Ns}$$

$$F_{sr}^{ud} = \frac{I}{\tau} = 440,00 \text{ kN}$$

Primijetimo da je $F_{sr}^{ud} / mg \approx 37$, srednja udarna sila je 37 puta veća od težine automobila

$$U = \sqrt{U_t^2 + U_n^2} = 28,92 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\tan \beta = \frac{U_t}{U_n} = 17,287 \Rightarrow \beta = 86,63^\circ, \text{ tj. automobil se odbija od}$$

ograde pod uglom $90^\circ - \beta = 3,31^\circ$

Takođe, primijetimo da se zadatak može riješiti direktnom primjenom formula (#).

10.2 Udar sistema materijalnih tačaka.

Neka se sistem sastoji od n materijalnih tačaka čije su mase $m_i, i=1, \dots, n$. Označimo sa \vec{I}_i^s i \vec{I}_i^u rezultante impulsa spoljašnjih i unutrašnjih udarnih sila koje djeluju na i -tu tačku, respektivno.

Prema jednačini (2), bide

$$m_i (\vec{U}_i - \vec{V}_i) = \vec{I}_i^s + \vec{I}_i^u, \quad i=1, \dots, n, \quad (4)$$

gdje su \vec{U}_i i \vec{V}_i brzine i -te tačke na kraju i na početku udara.

Sabiranjem prethodnih jednačina i uzimanjem u obzir da je, zbog osobine unutrašnjih sila, suma impulsa unutrašnjih udarnih sila jednaka nuli, dolazi se do zakona o promjeni količine kretanja materijalnog sistema pri udaru:

$$\vec{K}_2 - \vec{K}_1 = \vec{I}_2^s, \quad \vec{I}_2^s = \sum_{i=1}^n \vec{I}_i^s \quad (5)$$

Prema tome, priraštaj (promjena) količine kretanja materijalnog sistema za vrijeme udara jednaka je glavnom vektoru impulsa svih spoljašnjih udarnih sila koje djeluju na sistem.

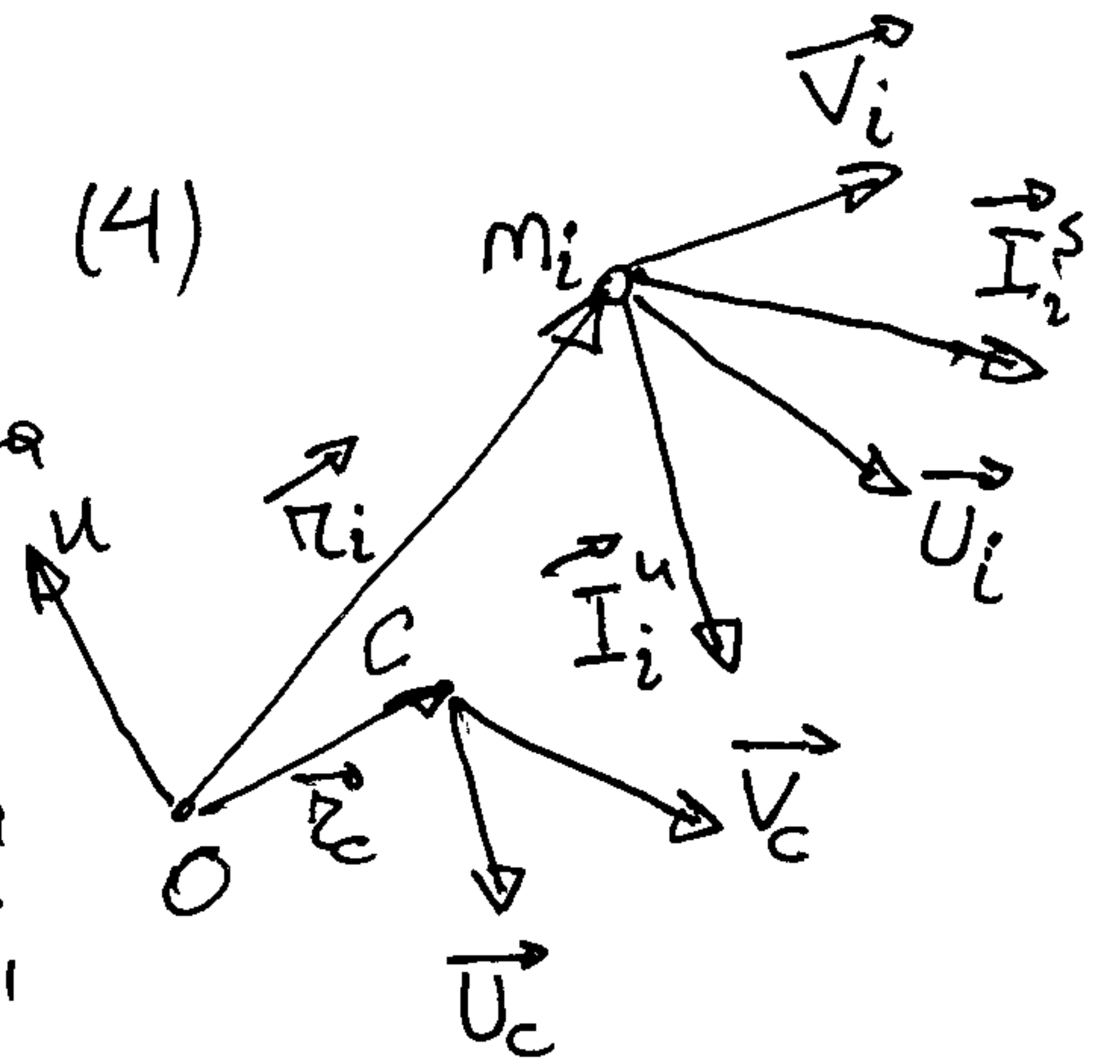
Kako je $\vec{K}_1 = \sum_{i=1}^n m_i \vec{V}_i = m \vec{V}_c$ i $\vec{K}_2 = \sum_{i=1}^n m_i \vec{U}_i = m \vec{U}_c$, gdje je $m = \sum_{i=1}^n m_i$ - masa sistema, a \vec{V}_c i \vec{U}_c brzine centra inercije sistema na početku i na kraju udara, jednačina (4) se može napisati u obliku

$$m(\vec{U}_c - \vec{V}_c) = \sum \vec{I}_i^s \quad (5')$$

Projiciranjem vektorske jednačine (4) na bilo koju osu n dolazimo do zakona o promjeni projekcije količine kretanja sistema na tu osu:

$$K_{2n} - K_{1n} = \sum_{i=1}^n I_{in}^s \quad (5)$$

Ako je $\sum \vec{I}_i^s = 0$, onda je, na osnovu (5), $\vec{K}_2 = \vec{K}_1$, tj. tada važi zakon održavanja količine kretanja materijalnog sistema pri udaru.



Označimo sa \vec{L}_{O1} i \vec{L}_{O2} momente količine kretanja sistema u odnosu na tačku O na početku i na kraju udara, tj.

$$\vec{L}_{O1} = \sum_{i=1}^n \vec{M}_O m_i \vec{v}_i, \quad \vec{L}_{O2} = \sum_{i=1}^n \vec{M}_O m_i \vec{u}_i.$$

Ako jednačinu (4) pomnožimo s lijeva vektorski vektorima položaja odgovarajućih tačaka, zatim tako dobijene jednačine saberemo i imajući u vidu da je, zbog osobine unutrašnjih sila, $\sum \vec{M}_O \vec{I}_i^s = 0$, dobijemo zakon o promjeni momenta količine kretanja materijalnog sistema pri udaru:

$$\vec{L}_{O2} - \vec{L}_{O1} = \sum_{i=1}^n \vec{M}_O \vec{I}_i^s, \quad (7)$$

koji glasi: Promjena momenta količine kretanja sistema za bilo koju tačku, za vrijeme udara, jednaka je sumi momenata za istu tačku svih impulsa spoljašnjih udaraih sila koje djeluju na sistem.

U obliku projekcije na bilo koju osu n jednačina (7) daje

$$L_{2n} - L_{1n} = \sum_{i=1}^n M_n \vec{I}_i^s. \quad (8)$$

