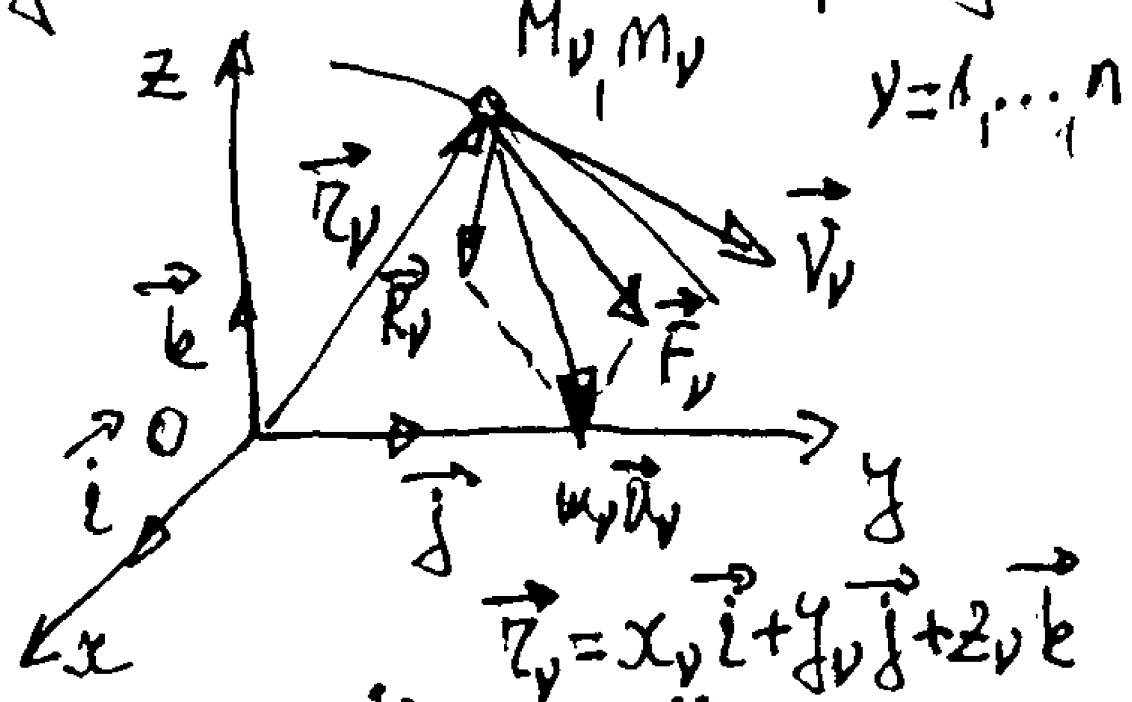
11 Elementi analitičke mehanike

– Osnovni model: sistem od n materijalnih tačaka masa $m_1,\dots,m_n$, na koje dejstvuju aktivne sile $\vec{F}_1,\dots,\vec{F}_n$, a čije kretanje ograničava r $(r<3n)$ holonomnih stacionarnih veza koje se analitički zapisuju u obliku:

$$f_\alpha(\vec{r}_1,\vec{r}_2,\dots,\vec{r}_n)=0,\ \alpha=1,\dots,r \qquad (1)$$

ili

$$f_\alpha(x_1,y_1,z_1,\dots,x_n,y_n,z_n)=0 \qquad (1')$$



$\vec{r}_\nu = x_\nu \vec{i} + y_\nu \vec{j} + z_\nu \vec{k}$

$\vec{v}_\nu = \dot{\vec{r}}_\nu,\ \vec{a}_\nu = \ddot{\vec{r}}_\nu$

Diferencijalne jednačine kretanja tačaka sistema u vektorskom obliku su:

$$m_\nu \ddot{\vec{r}}_\nu = \vec{F}_\nu + \vec{R}_\nu,\ \nu=1,\dots,n \qquad (2)$$

gdje su $\vec{R}_\nu$ reakcije veza.

– Generalisane koordinate –

Broj $s=3n-r$ (broj nezavisnih Dekartovih koordinata) zove se broj stepeni slobode sistema.

Skup nezavisnih parametara $q_1,\dots,q_s$ koji jednoznačno određuje položaj sistema naziva se generalisanim koordinatama. Uvođenjem generalisanih koordinata može se uspostaviti veza između njih i Dekartovih koordinata, odnosno vektora položaja, tačaka sistema

$$\left.\begin{aligned} x_\nu &= x_\nu(q_1,\dots,q_s)\\ y_\nu &= y_\nu(\ \text{-''-}\ )\\ z_\nu &= z_\nu(\ \text{-''-}\ )\end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \vec{r}_\nu = \vec{r}_\nu(q_1,\dots,q_s),\ \nu=1,\dots,n \qquad (3)$$

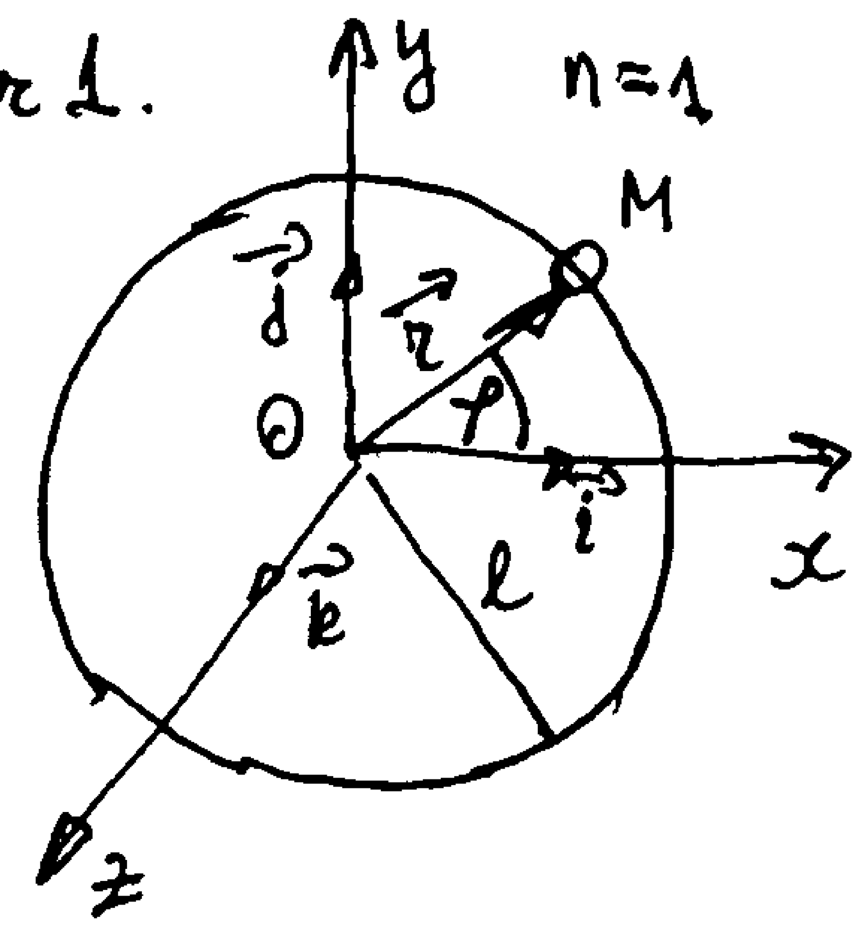
Konačne jednačine kretanja sistema u generalisanim koordinatama glase

$$q_1=q_1(t),\ q_2=q_2(t),\dots,\ q_s=q_s(t) \Leftrightarrow q_i=q_i(t),\ i=1,\dots,s \qquad (4)$$

Veličine $\dot{q}_i = \dfrac{dq_i}{dt}$ i $\ddot{q}_i = \dfrac{d^2 q_i}{dt^2} = \dfrac{d\dot{q}_i}{dt}$ zovu se generalisane brzine i generalisana ubrzanja. Na osnovu (3), brzine $\vec{v}_\nu$ tačaka sistema mogu se izraziti preko generalisanih brzina

$$\vec{v}_\nu = \dot{\vec{r}}_\nu = \sum_{i=1}^{s} \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q_i}\dot{q}_i,\ \nu=1,\dots,n \qquad (5)$$

Primjer 1. $n=1$



veze: $f_1 = z = 0$

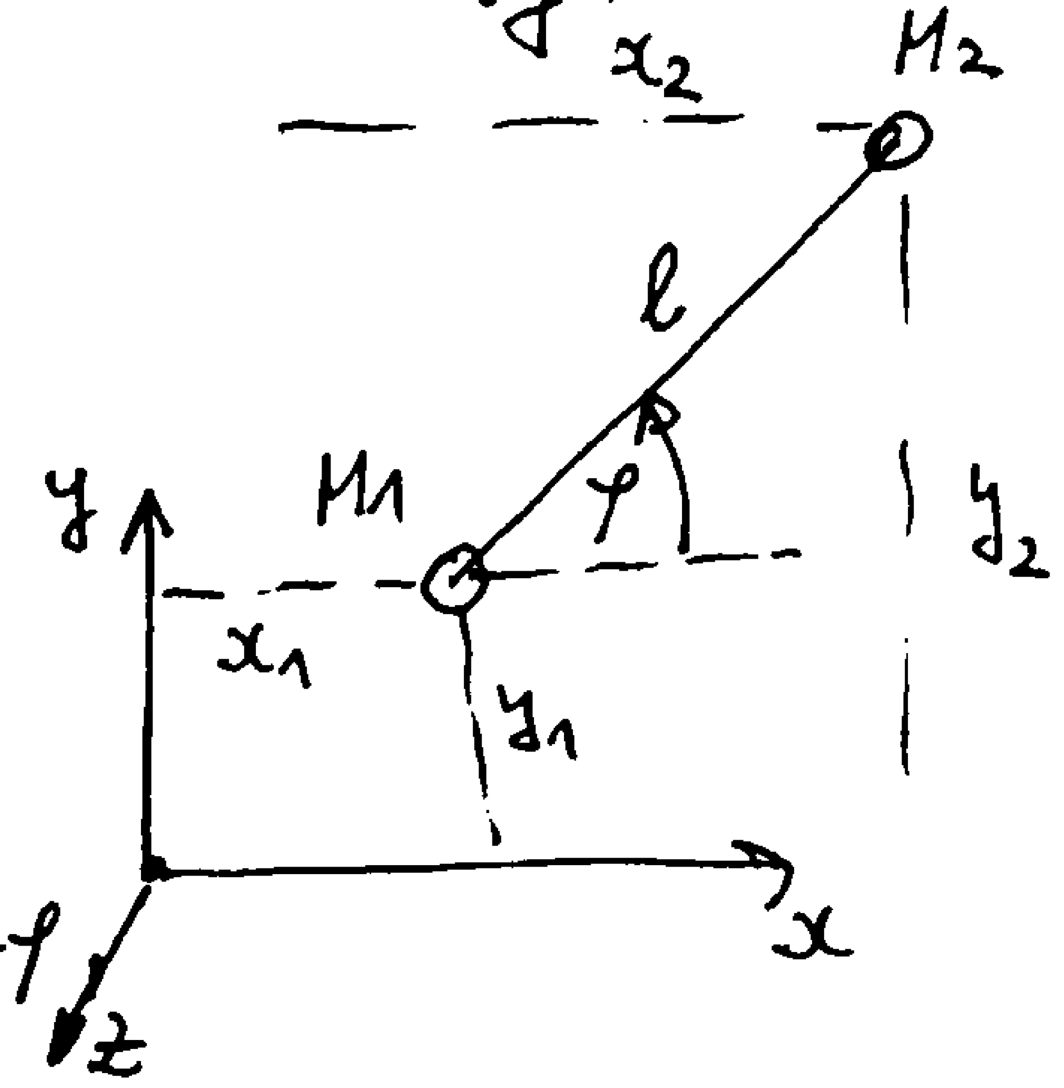
$f_2 = x^2 + y^2 - l^2 = 0$

$s = 3 - 2 = 1$

$q_1 = \varphi$; $\left.\begin{array}{l} x = l\cos\varphi \\ y = l\sin\varphi \\ z = 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \vec{r} = l\cos\varphi\,\vec{i} + l\sin\varphi\,\vec{j}$

Primjer 2. Dvije mat. tačke M_1 i M_2 spojene lakim krutim štapom dužine l, prinudene da se kreću u ravni Oxy.

$n = 2$



veze: $f_1 = z_1 = 0$

$f_2 = z_2 = 0$

$f_3 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 - l^2 = 0$

$s = 3 \cdot 2 - 3 = 3$

generalisane koordinate: $q_1 = x_1$, $q_2 = y_1$, $q_3 = \varphi$

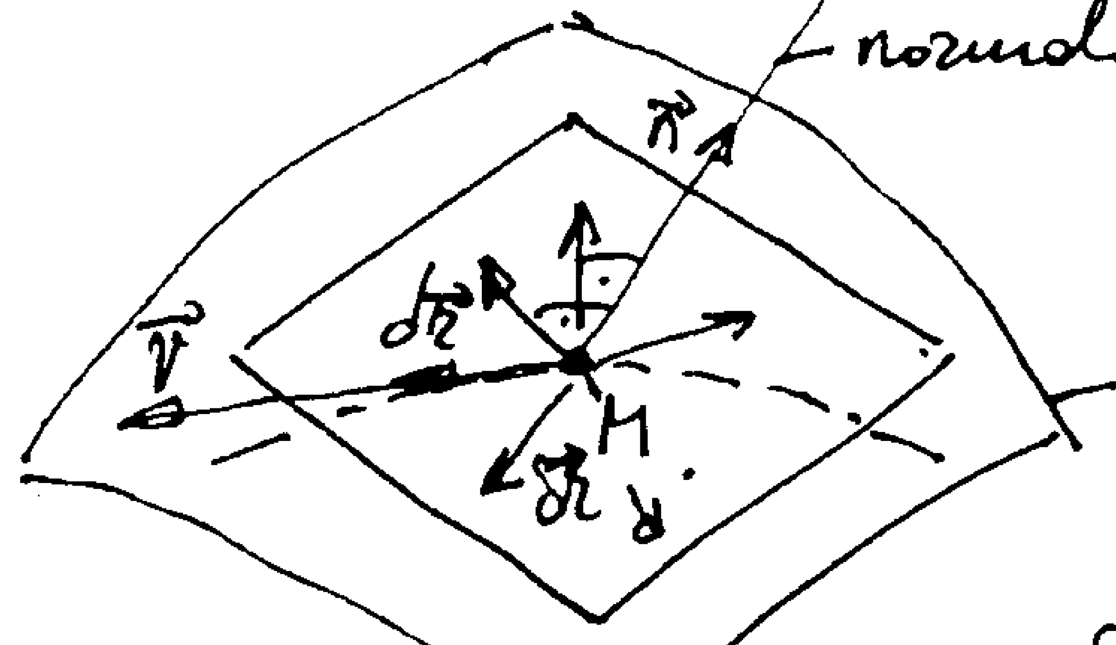
$\vec{r}_1 = x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j}$

$\vec{r}_2 = (x_1 + l\cos\varphi)\vec{i} + (y_1 + l\sin\varphi)\vec{j}$

– Virtualna (moguća) pomjeranja

Pod virtualnim pomjeranjem sistema podrazumijeva se skup zamišljenih beskonačno malih (elementarnih) pomjeranja $\delta\vec{r}_i$ tačaka sistema koje veze dopuštaju u datom trenutku.

Pr.



$\delta\vec{r}\cdot\vec{n}=0$

$\delta\vec{r}$ – svaki besk. mali vektor koji leži u tangentnoj ravni na površ $f(x,y,z)=0$

$d\vec{r}=\vec{v}dt$ – jedno od virtualnih pomjeranja tačke

$$(3) \Rightarrow \delta\vec{r}_\nu = \sum_{i=1}^{s}\frac{\partial\vec{r}_\nu}{\partial q_i}\delta q_i \qquad (6)$$

Beskonačno mali priraštaji generalisanih koordinata δq_i (tzv. varijacije generalisanih koordinata) zovu se generalisana virtualna pomjeranja.

– Rad sila na virtualnom pomjeranju.

Ako su $\vec{F}_\nu$, $\nu=1,\dots,n$, sile koje djeluju na tačke sistema, onda se veličina

$$\delta A = \sum_{\nu=1}^{n}\vec{F}_\nu\cdot\delta\vec{r}_\nu \qquad (7)$$

zove virtualni rad.

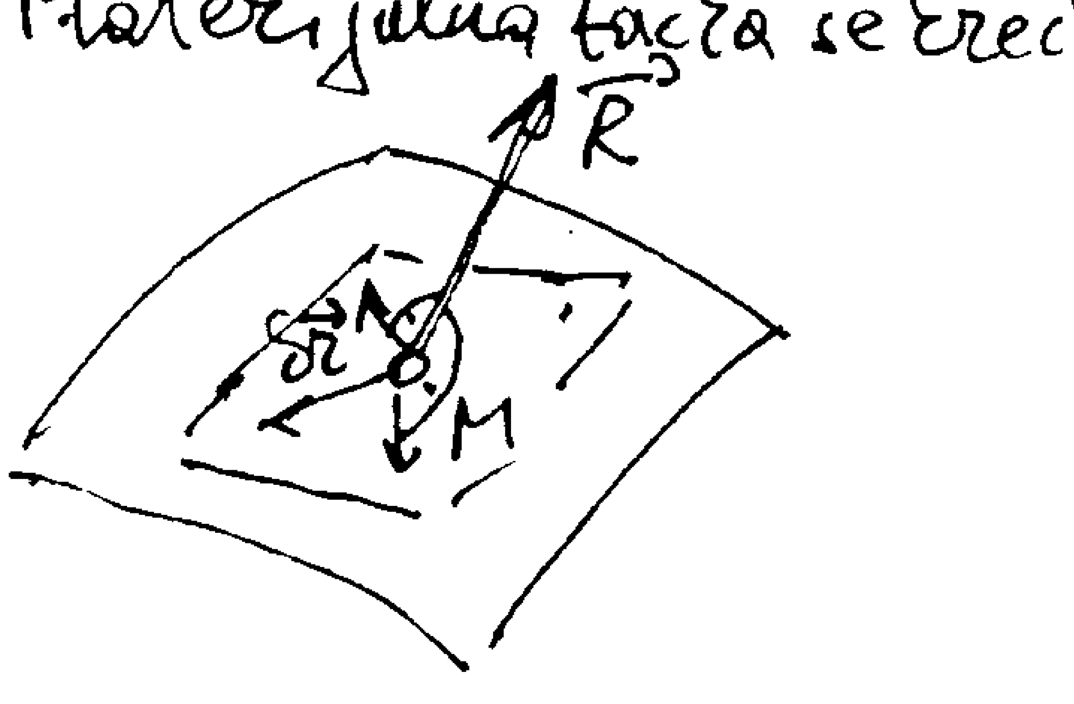
– Princip idealnosti veza

Veze kod kojih je zbir radova reakcija veza $\vec{R}_\nu$ na proizvoljnom virtualnom pomjeranju jednak nuli, tj

$$\sum_{\nu=1}^{n}\vec{R}_\nu\cdot\delta\vec{r}_\nu = 0 \qquad (8)$$

nazivaju se idealne veze.

Pr. Materijalna tačka se kreće po glatkoj površi



$\vec{R}\cdot\delta\vec{r}=0$

– Generalisane sile

Neka su $\vec{F}_\nu$, $\nu=1,\dots,n$, aktivne sile koje djeluju na tačke sistema čije kretanje ograničavaju *idealne* holonomne veze (1). Tada je, imajući u vidu (6),

$$\delta A = \sum_{\nu=1}^{n} \vec{F}_\nu \cdot \delta\vec{r}_\nu = \sum_{\nu=1}^{n} \vec{F}_\nu \cdot \Big(\sum_{i=1}^{s} \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q_i}\delta q_i\Big) = \sum_{i=1}^{s}\Big(\sum_{\nu=1}^{n} \vec{F}_\nu \cdot \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q_i}\Big)\delta q_i,$$

odnosno, ako se uvedu oznake

$$Q_i = \sum_{\nu=1}^{n} \vec{F}_\nu \cdot \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q_i}, \quad i=1,\dots,s \qquad (9)$$

$$\delta A = \sum_{i=1}^{s} Q_i \delta q_i = Q_1\delta q_1 + Q_2 \delta q_2 + \dots + Q_s \delta q_s \qquad (10)$$

Veličine (9), tj. koeficijenti Q_i uz varijacije generalisanih koordinata u izrazu za virtualni rad, zovu se generalisane sile.

– Dva opšta principa mehanike

1) Lagranžov princip virtualnih pomjeranja: Da bi se materijalni sistem čije kretanje ograničavaju idealne veze nalazio u ravnoteži potrebno je i dovoljno da su početne brzine svih tačaka sistema jednake nuli i da je rad svih aktivnih sila na proizvoljnom virtualnom pomjeranju sistema jednak nuli.

Matematička formulacija ovog principa (tzv. opšta jednačina statike) glasi:

$$\sum_{\nu=1}^{n} \vec{F}_\nu \cdot \delta\vec{r}_\nu = 0 \qquad (11)$$

Iz (11), imajući u vidu (10), dolazi se do generalisanih uslova ravnoteže

$$Q_1 = 0,\ Q_2 = 0, \dots, Q_s = 0 \qquad (12)$$

2) Lagranž-Dalamberov princip: Materijalni sistem čije kretanje ograničavaju idealne veze kreće se tako da je (u svakom trenutku) rad svih aktivnih sila i uslovno pridodatih sila inercije na proizvoljnom virtualnom pomjeranju sistema jednak nuli

Matematička formulacija ovog principa (tzv. opšta jednačina dinamike) glasi $\sum_{\nu=1}^{n}(\vec{F}_\nu+\vec{F}_\nu^{in})\cdot\delta\vec{r}_\nu=0,\quad \vec{F}_\nu^{in}=-m_\nu\vec{a}_\nu$ (13)

– Lagranžove jednačine II vrste

Polazeći od (13) izvode se diferencijalne jednačine kretanja sistema u generalisanim koordinatama, koje glase

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_i}-\frac{\partial E_k}{\partial q_i}=Q_i\ ,\ i=1,\dots,s \qquad (14)$$

gdje je $E_k=E_k(q_1,\dots,q_s,\dot{q}_1,\dots,\dot{q}_s)$ kinetička energija sistema, a $Q_i=Q_i(q_1,\dots,q_s,\dot{q}_1,\dots,\dot{q}_s,t)$ su generalisane sile.

Jednačine (14) zovu se Lagranžove jednačine druge vrste. One predstavljaju sistem od s diferencijalnih jednačina drugog reda u odnosu na generalisane koordinate. Njihovom integracijom, uz zadate početne uslove, dobijaju se konačne jednačine kretanja sistema

$$q_i=q_i(t)\ ,\ i=1,\dots,s \qquad (15)$$

Da bi se sastavile Lagranžove jednačine II vrste treba kinetičku energiju sistema izraziti kao funkciju generalisanih brzina i generalisanih koordinata. Ako se iskoriste relacije (5), izraz za kinetičku energiju sistema od n materijalnih tačaka

$$E_k=\frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{n}m_\nu v_\nu^2$$

se transformiše na traženi oblik

$$E_k=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{s}A_{ij}\,\dot{q}_i\,\dot{q}_j \qquad (16)$$

gdje su

$$A_{ij}(q_1,\dots,q_s)=\sum_{\nu=1}^{n}m_\nu\frac{\partial\vec{r}_\nu}{\partial q_i}\cdot\frac{\partial\vec{r}_\nu}{\partial q_j}\ ,\quad A_{ij}=A_{ji}.$$

Prema tome, E_k je homogena kvadratna funkcija (kvadratna forma) generalisanih brzina. Koeficijenti A_{ij} zovu se koeficijenti inercije sistema.

U slučaju sistema sa jednim stepenom slobode ($s=1$), stavljajući $q_1 = q$, kinetička energija ima oblik

$$E_k = \frac{1}{2} A_{11}(q)\dot{q}^2 \qquad (17)$$

– Lagranžove jednačine II vrste konzervativnog sistema

Ako su sve aktivne sile $\vec{F}_\nu$ konzervativne, tj.

$$\vec{F}_\nu = \vec{F}_\nu^{(k)} = -\frac{\partial E_p}{\partial x_\nu}\vec{i} - \frac{\partial E_p}{\partial y_\nu}\vec{j} - \frac{\partial E_p}{\partial z_\nu}\vec{k}, \quad E_p = E_p(x_1, y_1, z_1, \ldots, x_n, y_n, z_n)$$

tada na osnovu (9) i (3), nalazimo da su generalisane konzervativne sile

$$Q_i = Q_i^{(k)} = -\frac{\partial E_p}{\partial q_i}, \quad i = 1, \ldots, s; \quad E_p = E_p(q_1, \ldots, q_s), \qquad (18)$$

Sada dif. jednačine (14) postaju

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial E_k}{\partial q_i} + \frac{\partial E_p}{\partial q_i} = 0, \quad i = 1, \ldots, s \qquad (19)$$

Ako sistem ima jedan stepen slobode ($s=1$, $q_1 = q$) imamo samo jednu diferencijalnu jednačinu kretanja

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial E_k}{\partial q} + \frac{\partial E_p}{\partial q} = 0, \qquad (20)$$

gdje je E_k oblika (17), a $E_p = E_p(q)$.

Napomenimo da za konzervativne sisteme važi zakon održanja mehaničke energije (integral energije):

$$E_k + E_p = h = const.$$

– Potencijalna energija u okolini ravnotežnog položaja

S obzirom na (12) i (18) ravnotežni položaji konzervativnog sistema su određeni rješenjima sistema jednačina

$$\frac{\partial E_p}{\partial q_1} = 0, \frac{\partial E_p}{\partial q_2} = 0, \ldots, \frac{\partial E_p}{\partial q_s} = 0 \qquad (21)$$

Uočimo neki ravnotežni položaj sistema. Ne umanjujući opštost možemo smatrati da u tom položaju sve generalisane koordinate imaju nulte vrijednosti, tj. da je

$$q_1 = 0,\ q_2 = 0, \dots,\ q_s = 0$$

ravnotežni položaj. Razvojem u Maklorenov red potencijalne energije $E_p(q_1, \dots, q_s)$, nalazimo

$$E_p(q_1, \dots, q_s) = E_p(0, \dots, 0) + \sum_{i=1}^{s} \frac{\partial E_p}{\partial q_i}\bigg|_0 q_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{s} \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial^2 E_p}{\partial q_i \partial q_j}\bigg|_0 q_i q_j + \dots$$

" $\big|_0 = \big|_{q_1 = 0, \dots, q_s = 0}$ "

Imajući u vidu uslove ravnoteže (21), prva suma u dobijenom izrazu je jednaka nuli, a takođe možemo uzeti da je $E_p(0, \dots, 0) = 0$ jer je E_p određena s tačnošću do konstante.

Ako uvedemo oznake

$$c_{ij} = \frac{\partial^2 E_p}{\partial q_i \partial q_j}\bigg|_0 = c_{ji}\ ;\ i, j = 1, \dots, s$$

i zanemarimo članove višeg reda od drugog po generalisanim koordinatama q_i, $i = 1, \dots, s$, što je opravdano u __maloj__ okolini ravnotežnog položaja, dobijamo

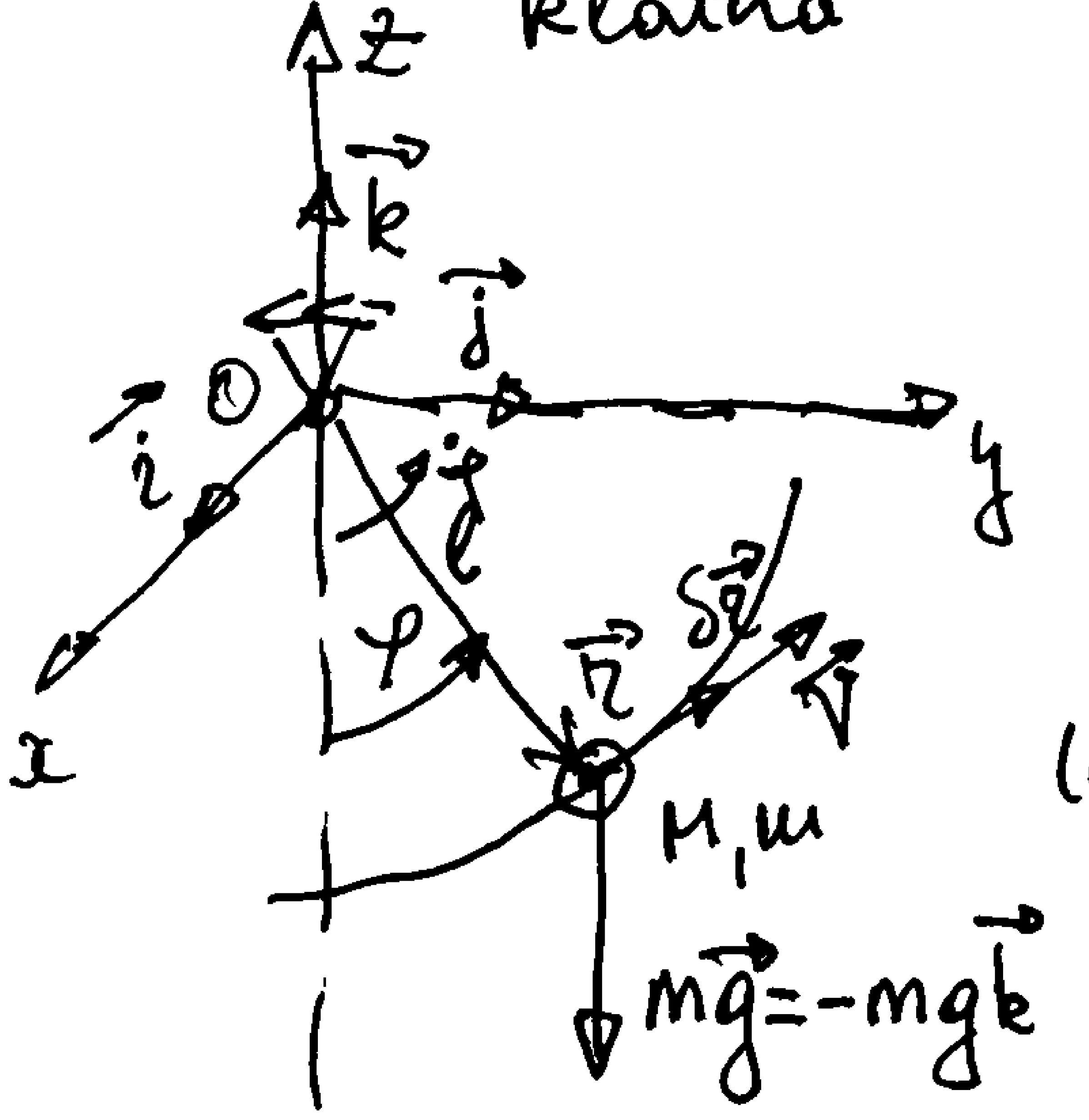
$$E_p = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{s} \sum_{j=1}^{s} c_{ij} q_i q_j \qquad (22)$$

Dakle, u maloj okolini ravnotežnog položaja potencijalna energija je homogena kvadratna forma generalisanih koordinata.

Ako sistem ima jedan stepen slobode ($s = 1$, $q_1 = q$) biće

$$E_p = \frac{1}{2} c_{11} q^2 \qquad (23)$$

Primjer 3. Diferencijalna jednačina kretanja matematičkog klatna



$$\left.\begin{aligned} f_1 &= x = 0 \\ f_2 &= y^2+z^2-l^2=0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow s = 3n-r = 3-2 = 1$$

$q_1 = \varphi$ – generalisana koordinata

$$\vec{r} = y\vec{j} + z\vec{k} = l\sin\varphi\,\vec{j} - l\cos\varphi\,\vec{k}$$

$$(6) \Rightarrow \delta\vec{r} = \frac{\partial\vec{r}}{\partial\varphi}\delta\varphi = l\cos\varphi\,\delta\varphi\,\vec{j} + l\sin\varphi\,\delta\varphi\,\vec{k}$$

$$\dot{\vec{r}} = l\dot\varphi\cos\varphi\,\vec{j} + l\dot\varphi\sin\varphi\,\vec{k}$$

$$v^2 = \dot{\vec{r}}\cdot\dot{\vec{r}} = l^2\dot\varphi^2$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial E_k}{\partial\dot\varphi} - \frac{\partial E_k}{\partial\varphi} = Q_\varphi \quad (*)$$

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}ml^2\dot\varphi^2$$

$$\overbrace{\frac{\partial E_k}{\partial\dot\varphi} = ml^2\dot\varphi\,;\ \frac{d}{dt}\frac{\partial E_k}{\partial\dot\varphi} = ml^2\ddot\varphi\,;\ \frac{\partial E_k}{\partial\varphi} = 0}^{(**)}$$

$$Q_\varphi = m\vec{g}\cdot\frac{\partial\vec{r}}{\partial\varphi} = -mg\vec{k}\cdot(l\cos\varphi\,\vec{j} + l\sin\varphi\,\vec{k})$$

$$Q_\varphi = -mgl\sin\varphi \quad (\#)$$

ili $\delta A = Q_\varphi\,\delta\varphi = m\vec{g}\cdot\delta\vec{r} = -mgl\sin\varphi\,\delta\varphi$

$$\Rightarrow Q_\varphi = -mgl\sin\varphi$$

$$(**), (\#) \text{ u } (*) \Rightarrow ml^2\ddot\varphi = -mgl\sin\varphi$$

$$\Rightarrow \boxed{\ddot\varphi + \frac{g}{l}\sin\varphi = 0}$$

N. U ovom primjeru, aktivna sila je $m\vec{g}$, ona je konzervativna a njena potencijalna energija je $E_p = mgz = -mgl\cos\varphi$. Na osnovu (18), generalisana sila koja odgovara generalisanoj koordinati φ biće

$$Q_\varphi = -\frac{\partial E_p}{\partial\varphi} = -mgl\sin\varphi$$

što se, očigledno, poklapa sa (#).

— Sistemi sa konzervativnim silama i silama viskoznog otpora

— Pretpostavimo da na materijalne tačke sistema osim konzervativnih sila $\vec{F}_\nu^{(k)}$ djeluju i sile viskoznog otpora $\vec{F}_\nu^{(d)} = -\beta_\nu \vec{v}_\nu$, gdje su β_ν koeficijenti otpora sredine. Na osnovu (9), nalazimo odgovarajuće generalisane sile otpora

$$Q_i^{(d)} = -\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_i}, \quad i=1,\dots,s; \quad \Phi = \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{n} \beta_\nu v_\nu^2 \qquad (24)$$

Skalarna funkcija Φ koja se zove disipativna funkcija ima oblik analogan kinetičkoj energiji sistema, tako da će ona kao funkcija generalisanih koordinata i brzina imati oblik (uporediti sa (16)):

$$\Phi = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{s} B_{ij}\,\dot{q}_i\,\dot{q}_j \qquad (25)$$

gdje su

$$B_{ij}(q_1,\dots,q_s) = \sum_{\nu=1}^{n} \beta_\nu \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q_i}\cdot\frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q_j}, \quad B_{ij} = B_{ji}.$$

U slučaju sistema sa jednim stepenom slobode, disipativna funkcija je oblika

$$\Phi = \frac{1}{2} B_{11}(q)\,\dot{q}^2. \qquad (26)$$

Ukupne generalisane sile biće: $Q_i = Q_i^{(k)} + Q_i^{(d)} = -\frac{\partial E_p}{\partial q_i} - \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_i}$ pa dif. jednačine (14) postaju

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial E_k}{\partial q_i} + \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_i} + \frac{\partial E_p}{\partial q_i} = 0, \quad i=1,\dots,s \qquad (27)$$

Za sistem sa jednim stepenom slobode imamo jednu dif. jednačinu kretanja:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial E_k}{\partial q} + \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}} + \frac{\partial E_p}{\partial q} = 0. \qquad (28)$$

Ako primijenimo diferencijalni oblik zakona o promjeni kinetičke energije sistema

$$\frac{dE_k}{dt} = \frac{\hat{d}A^{(k)}}{dt} + \frac{\hat{d}A^{(d)}}{dt}$$

imajući u vidu da je $\hat{d}A^{(k)} = -dE_p$ i

$$\boxed{\frac{\hat{d}A^{(d)}}{dt} = \frac{-\sum_{\nu=1}^{n} g_\nu \vec{v}_\nu \cdot d\vec{r}_\nu}{dt} = -\sum_{\nu=1}^{n} g_\nu \vec{v}_\nu \cdot \vec{v}_\nu = -2\Phi}$$

dobijamo

$$\frac{d(E_k + E_p)}{dt} = -2\Phi < 0$$

Prema tome, ukupna mehanička energija $(E_k + E_p)$ se pod dejstvom sila otpora smanjuje, tj. prelazi u neki drugi oblik energije. Prema gornjoj relaciji mjera ovog opadanja ukupne mehaničke energije je funkcija disipacije Φ.