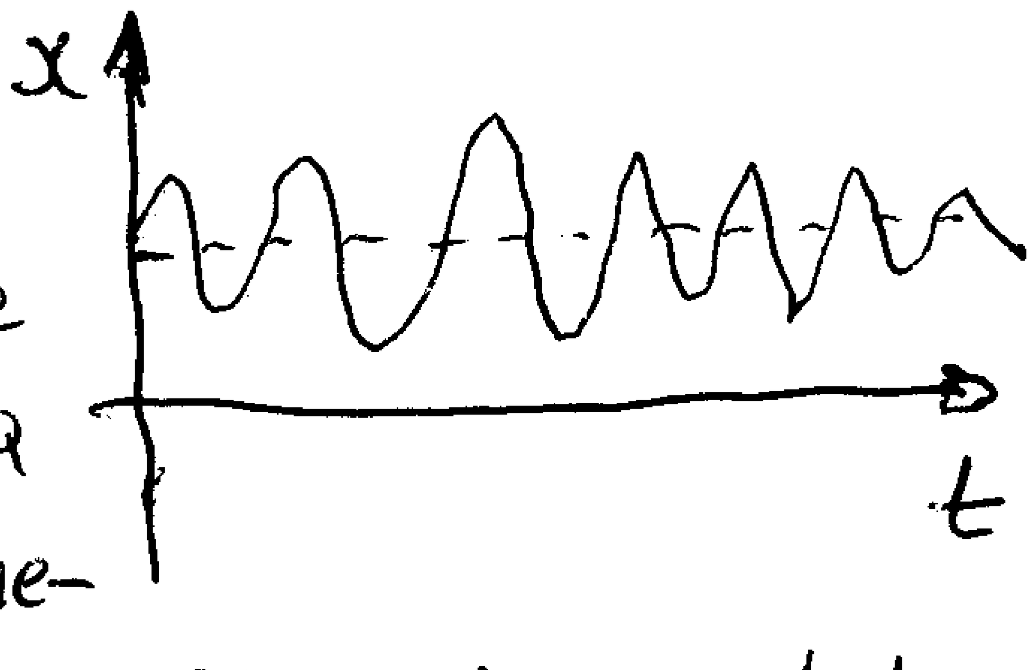
12. Elementi teorije oscilacija

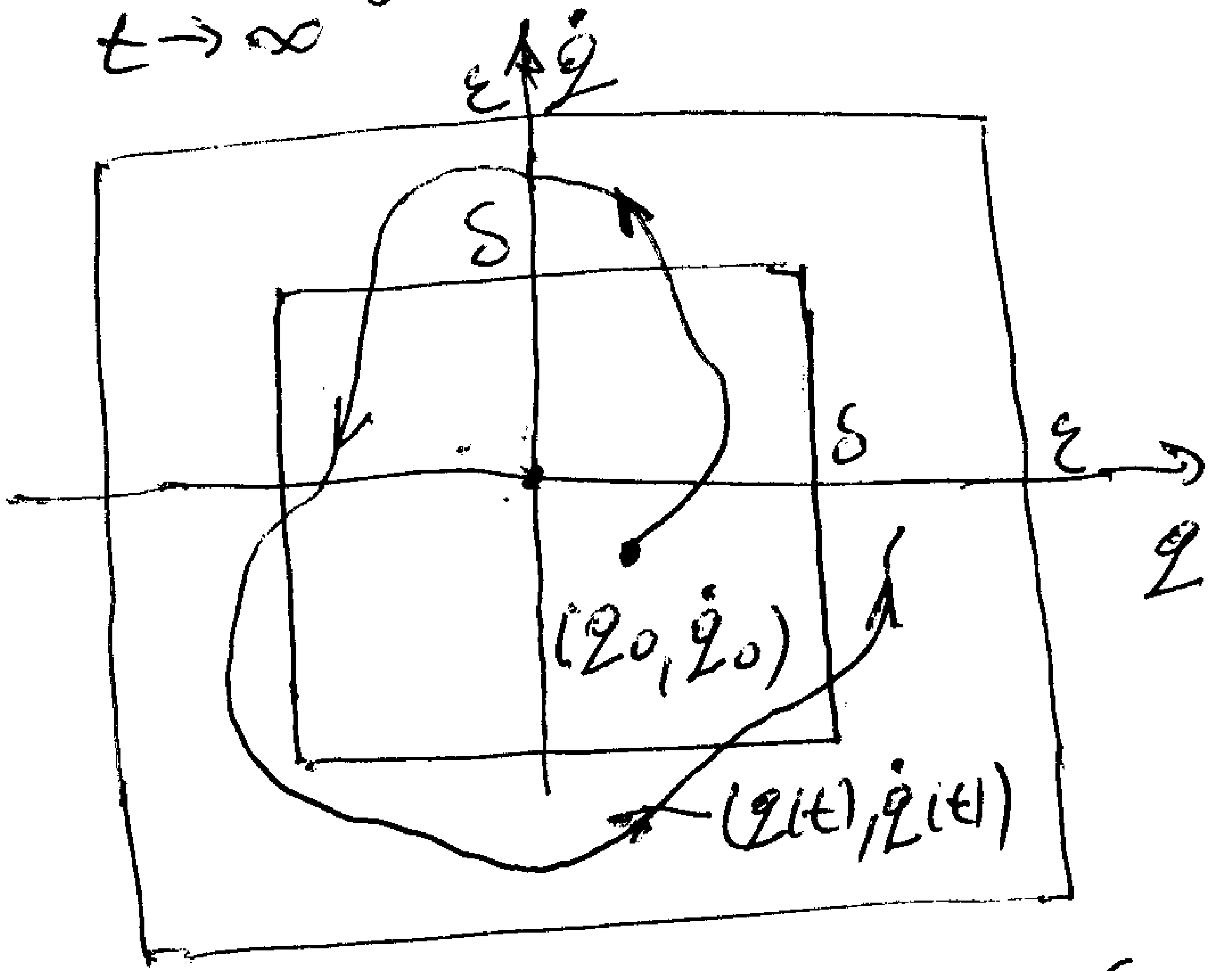


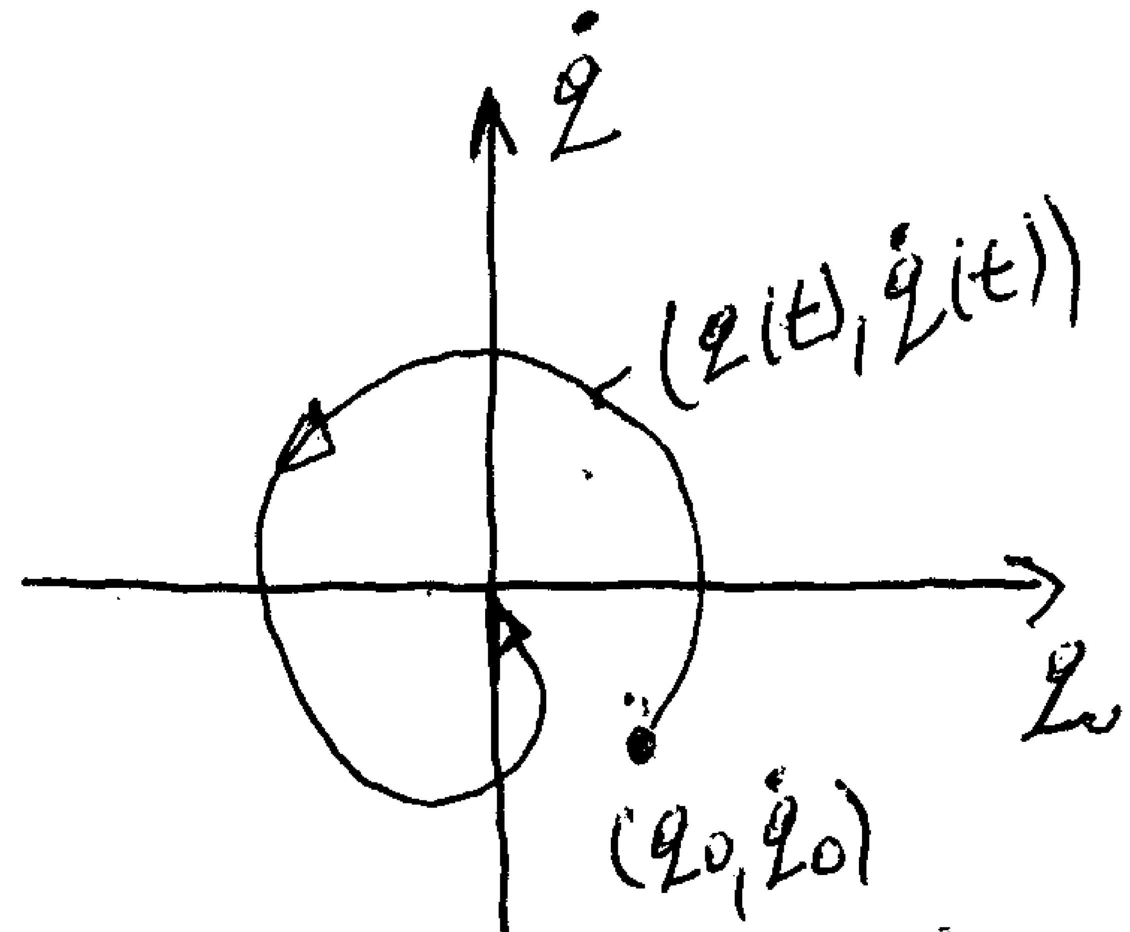
Pod oscilacijama skalarne veličine podrazumijeva se takav proces njene promjene pri kojem ona naizmjenično raste i opada u odnosu na referentni nivo. Ako se kinematičke veličine mehaničkog sistema mijenjaju oscilatorno tokom vremena govorimo o mehaničkim oscilacijama. Teorija oscilacija mehaničkih sistema ima veliki značaj u svim oblastima savremene tehnike i tehnologije.

U ovom kursu se ograničavamo na teoriju malih (linearnih) oscilacija sistema sa jednim stepenom slobode, koja je važna iz dva razloga: 1) linearna teorija daje dobru aproksimaciju kretanju kada su amplitude oscilacija male, i 2) u linearnoj teoriji problemi se mogu riješiti eksplicitno u zatvorenom obliku.

Zavisno od vrste sila koje uzrokuju oscilatorna kretanja razlikujemo slobodne i prinudne oscilacije. Konzervativne sile izazivaju slobodne oscilacije (one se vrše u okolini položaja stabilne ravnoteže), a prinudne (poremećajne) sile, koje se u toku vremena mijenjaju po poznatom zakonu izazivaju prinudne oscilacije. Obje vrste oscilacija mogu biti prigušene ako su prisutne sile otpora.

Neka je $q=0$ ravnotežni položaj sistema sa jednim stepenom slobode ($s=1$). Kaže se da je ravnotežni položaj $q=0$ <u>stabilan</u> (ili ravnotežno stanje $q=0, \dot{q}=0$ stabilno) ako za dovoljno malo početno odstupanje q_0 i dovoljno malu početnu brzinu $\dot{q}_0$ sistem sve vrijeme kretanja ne izlazi iz unaprijed zadane (koliko god male) okoline položaja ravnoteže. U protivnom, ravnotežni položaj je <u>nestabilan</u>. Ravnotežni položaj $q=0$ je <u>asimptotski stabilan</u> ako je on stabilan i $\lim_{t\to\infty} q(t)=0$.





asimptotski stabilna ravnoteža

stabilna ravnoteža ($\forall \varepsilon>0, \exists \delta(\varepsilon): |q_0|<\delta, |\dot{q}_0|<\delta \Rightarrow |q(t)|<\varepsilon, |\dot{q}(t)|<\varepsilon$)

– Stabilnost ravnoteže konzervativnog sistema –

Ravnotežni položaji konzervativnog sistema sa jednim stepenom slobode i potencijalnom energijom $E_p = E_p(q)$, su rješenja jednačine

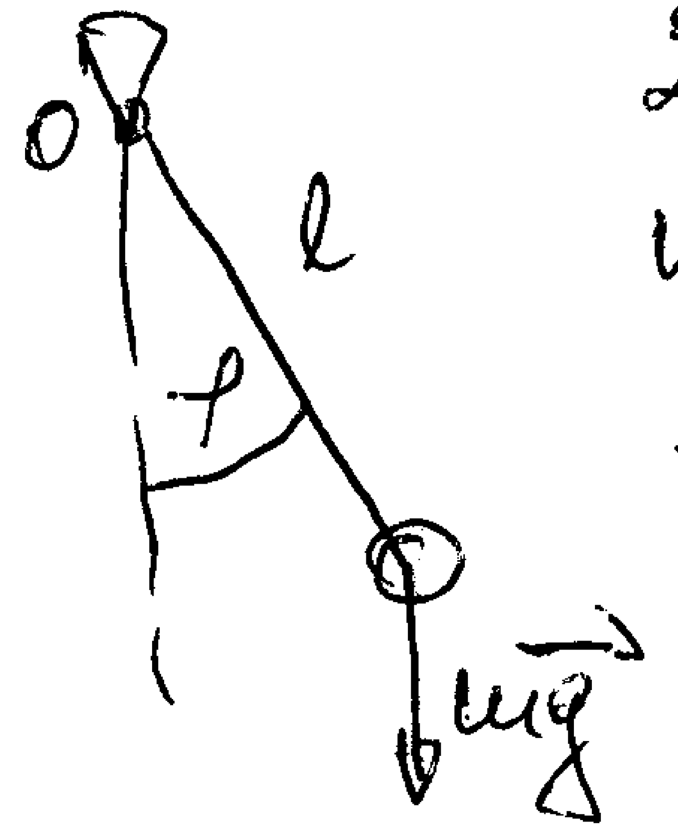
$$\frac{dE_p(q)}{dq} = 0$$

(v. (21), §11, $s=1$, $q_1=q$, $\frac{\partial}{\partial q_1}=\frac{d}{dq}$), tj. oni su stacionarne (kritične) tačke funkcije potencijalne energije. O njihovom karakteru govori sledeće tvrđenje:

Lagranž-Dirihleova teorema. Ravnotežni položaj konzervativnog sistema je stabilan ako u njemu potencijalna energija ima minimum.

S druge strane, poznato je iz matematičke analize da funkcija jedne promjenljive ima minimum u stacionarnoj tački ako je njen drugi izvod u toj tački pozitivan. Odavde slijedi da ako $E_p(q)$ u položaju ravnoteže ima pozitivan drugi izvod po generalisanoj koordinati q $\left(\frac{d^2E_p}{dq^2}>0\right)$, onda je ravnotežni položaj stabilan.

Pr. Matematičko klatno



$q=\varphi$, $E_p=-mgl\cos\varphi$

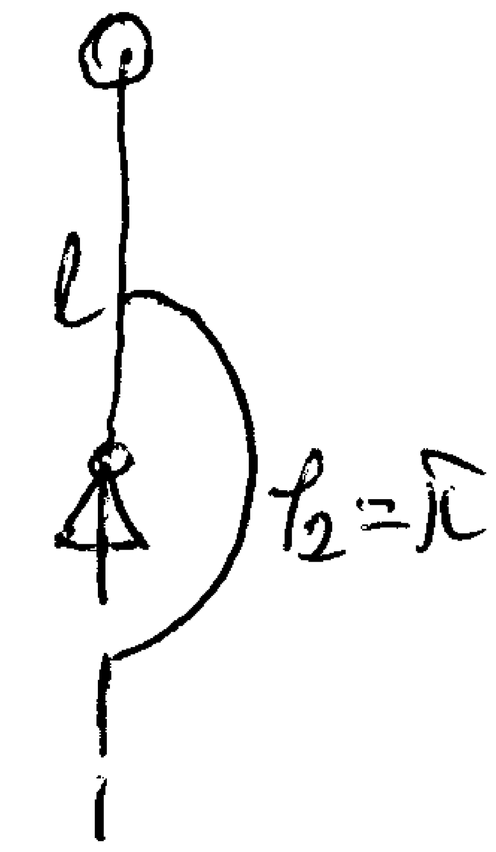
uslovi ravnoteže: $\frac{dE_p}{d\varphi}=mgl\sin\varphi=0$

$\Rightarrow \varphi_1=0,\ \varphi_2=\pi$ – ravnotežni položaji

$$\frac{d^2E_p}{d\varphi^2}=mgl\cos\varphi$$

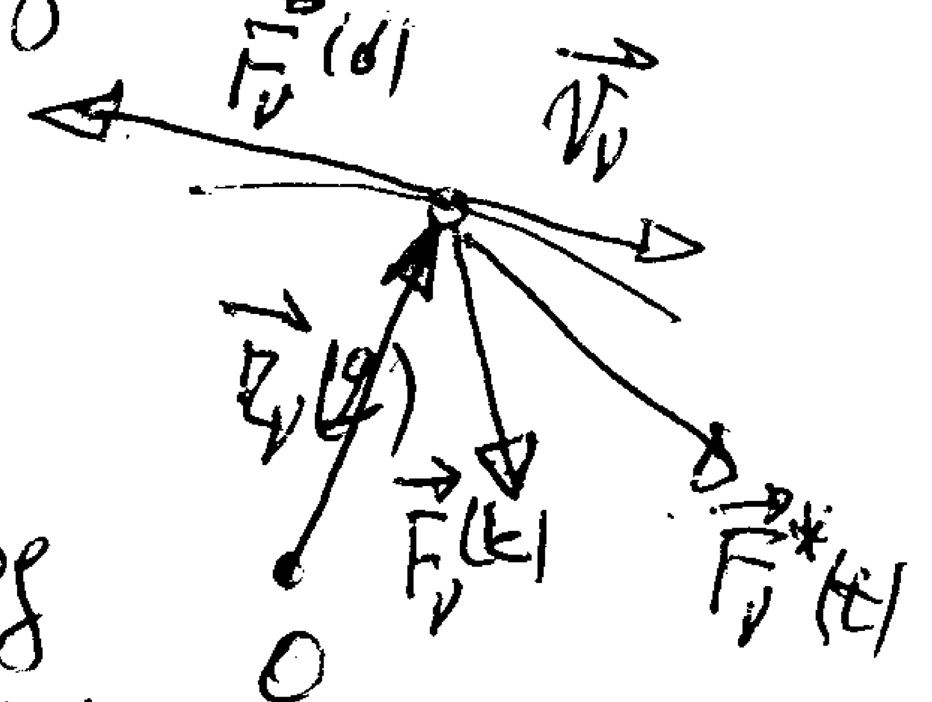
$\varphi_1=0$

$$\left.\frac{d^2E_p}{d\varphi^2}\right|_{\varphi=\varphi_1=0}=mgl>0 \text{ – stabilna ravnoteža}$$



$$\left.\frac{d^2E_p}{d\varphi^2}\right|_{\varphi=\varphi_2=\pi}=-mgl<0 \text{ – nestabilna ravnoteža}$$

– Linearizacija Lagranžove jednačine druge vrste –



Pretpostavimo da na tačke M_ν $(\nu=1,\dots,n)$ materijalnog sistema čije kretanje ograničavaju idealne veze, a koji ima jedan stepen slobode, djeluju konzervativne sile $\vec{F}_\nu^{(t)}$, sile viskoznog otpora $\vec{F}_\nu^{(d)}=-\beta_\nu\vec{v}_\nu$ i poremećajne sile $\vec{F}_\nu^*=\vec{F}_\nu^*(t)$. Položaj sistema određen je jednom generalisanom koordinatom q. Neka je $q=0$ stabilni ravnotežni položaj odgovarajućeg konzervativnog sistema.

Lagranževa jednačina II vrste, koja je diferencijalna jednačina kretanja sistema je (v. § 11)

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial E_k}{\partial q} = Q \,; \quad Q = Q^{(k)} + Q^{(d)} + Q^{*} \qquad (*)$$

gdje su

$$E_k = \frac{1}{2} A_{11}(q)\,\dot{q}^2 \,, \quad A_{11} = \sum_{\nu=1}^{n} m_\nu \left(\frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q}\right)^2 \,, \text{ – kinetička energija sistema}$$

$$Q^{(k)} = -\frac{\partial E_p}{\partial q} \text{ – generalisana konzervativna sila}$$

$$Q^{(d)} = -\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}} \text{ – generalisana sila otpora}$$

$$\Phi = \frac{1}{2} B_{11}(q)\,\dot{q}^2 \,, \quad B_{11} = \sum_{\nu=1}^{n} \beta_\nu \left(\frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q}\right)^2 \,, \text{ – disipativna funkcija sistema}$$

$$Q^{*} = \sum_{\nu=1}^{n} \vec{F}_\nu^{*}(t) \cdot \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q} \text{ – generalisana prinudna sila}$$

U opštem slučaju jednačina (*) je nelinearna diferencijalna jednačina drugog reda. Ako su tokom kretanja sistema njegova odstupanja od položaja ravnoteže mala, što je slučaj kada je položaj ravnoteže stabilan a malo početno odstupanje i mala početna generalisana brzina, nelinearna jednačina (*) može se linearizovati (aproksimirati sa linearnom) tako što se uzme da je

$$\left.\begin{aligned}
E_k &\approx \frac{1}{2} a_{11}\,\dot{q}^2 \,, \quad a_{11} = \text{const.} = A_{11}(q=0) \\
\Phi &\approx \frac{1}{2} b_{11}\,\dot{q}^2 \,, \quad b_{11} = \text{const} = B_{11}(q=0) \\
E_p &\approx \frac{1}{2} c_{11}\, q^2 \,, \quad c_{11} = \left.\frac{\partial^2 E_p(q)}{\partial q^2}\right|_{q=0} \\
Q^{*}(t) &= \sum_{\nu=1}^{n} \vec{F}_\nu^{*}(t) \cdot \left.\frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q}\right|_{q=0}
\end{aligned}\right\} \quad (**)$$

S obzirom da aproksimativni izraz za kinetičku energiju sistema ne zavisi od koordinate q ($\partial E_k / \partial q = 0$), Lagranžova jednačina II vrste za male oscilacije sistema sa konzervativnim, disipativnim i prinudnim silama zapisuje u obliku

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}} + \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}} + \frac{\partial E_p}{\partial q} = Q^*(t), \qquad (1)$$

koji, imajući u vidu (**), daje linearnu dif. jednačinu drugog reda

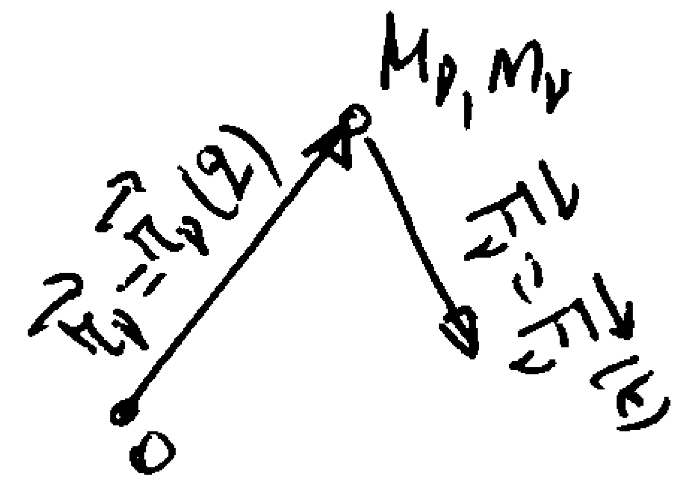
$$a_{11}\ddot{q} + b_{11}\dot{q} + c_{11}q = Q^*(t). \qquad (2)$$

sa konstantnim koeficijentima a_{11}, b_{11}, c_{11} koji se, respektivno, zovu (generalisani) koeficijenti inercije, otpora i krutosti sistema.

N1. Aproksimativni izrazi za E_k i Φ mogu se direktno dobiti tako što se odredi kinetička energija i disipativna funkcija pri prolasku sistema kroz položaj ravnoteže.

Male oscilacije sistema sa jednim stepenom slobode

1. Slobodne neprigušene oscilacije



M_ν, m_ν, $\vec{F}_\nu = \vec{F}_\nu^{(k)}$ – konzervativne sile, $\nu = 1, \dots, N$

$s = 1$, q – generalisana koordinata

$q = 0$ – položaj stabilne ravnoteže sistema

$E_p = E_p(q)$

$$E_p \approx \frac{1}{2} c_{11} q^2; \quad c_{11} = \left.\frac{d^2 E_p}{dq^2}\right|_{q=0} > 0, \quad E_k \approx \frac{1}{2} a_{11} \dot{q}^2, \quad a_{11} = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \left(\frac{d\vec{r}_\nu}{dq}\right)^2_{q=0} > 0$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}} + \frac{\partial E_p}{\partial q} = 0 \rightarrow a_{11}\ddot{q} + c_{11} q = 0 \;|: a_{11}$$

$$\rightarrow \ddot{q} + \omega^2 q = 0, \quad \omega^2 = \frac{c_{11}}{a_{11}}$$ (1) – dif. jed. slobodnih neprigušenih oscilacija

(1) $\xrightarrow{q = e^{\lambda t}}$ $\lambda^2 + \omega^2 = 0$ – karakteristična jednačina dif. jed. (1), čija su rješenja $\lambda_{1,2} = \pm i\omega$, pa je opšte rješenje

$$q = C_1' e^{i\omega t} + C_2' e^{-i\omega t} = \overbrace{(C_1' + C_2')}^{C_1}\cos\omega t + \overbrace{i(C_1' - C_2')}^{C_2}\sin\omega t,$$ odnosno

$$q = C_1 \cos\omega t + C_2 \sin\omega t \qquad (2)$$

Transformacijom integracionih konstanti C_1, C_2:

$$C_1 = A\sin\alpha, \quad C_2 = A\cos\alpha \quad \Longleftrightarrow \quad A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}, \; \sin\alpha = \frac{C_1}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}}, \; \cos\alpha = \frac{C_2}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}}, \qquad (3)$$

opšte rješenje (2) se može napisati u obliku

$$q = A\sin(\omega t + \alpha) \qquad (4)$$

Integracione konstante C_1 i C_2 (odnosno A i α) određuju se iz početnih uslova:

$$t_0 = 0: \; q(t_0) = q_0, \; \dot{q}(t_0) = \dot{q}_0 \qquad (5)$$

$$(2) \xrightarrow{(5)} C_1 = q_0, \; C_2 = \frac{\dot{q}_0}{\omega} \xrightarrow{(3)} A = \sqrt{q_0^2 + \left(\frac{\dot{q}_0}{\omega}\right)^2}, \; \sin\alpha = \frac{q_0}{A}, \; \cos\alpha = \frac{\dot{q}_0}{A\omega}, \; \alpha \in [0, 2\pi)$$

pa je konačna jednačina kretanja

$$q = q_0 \cos\omega t + \frac{\dot{q}_0}{\omega}\sin\omega t, \qquad (6)$$

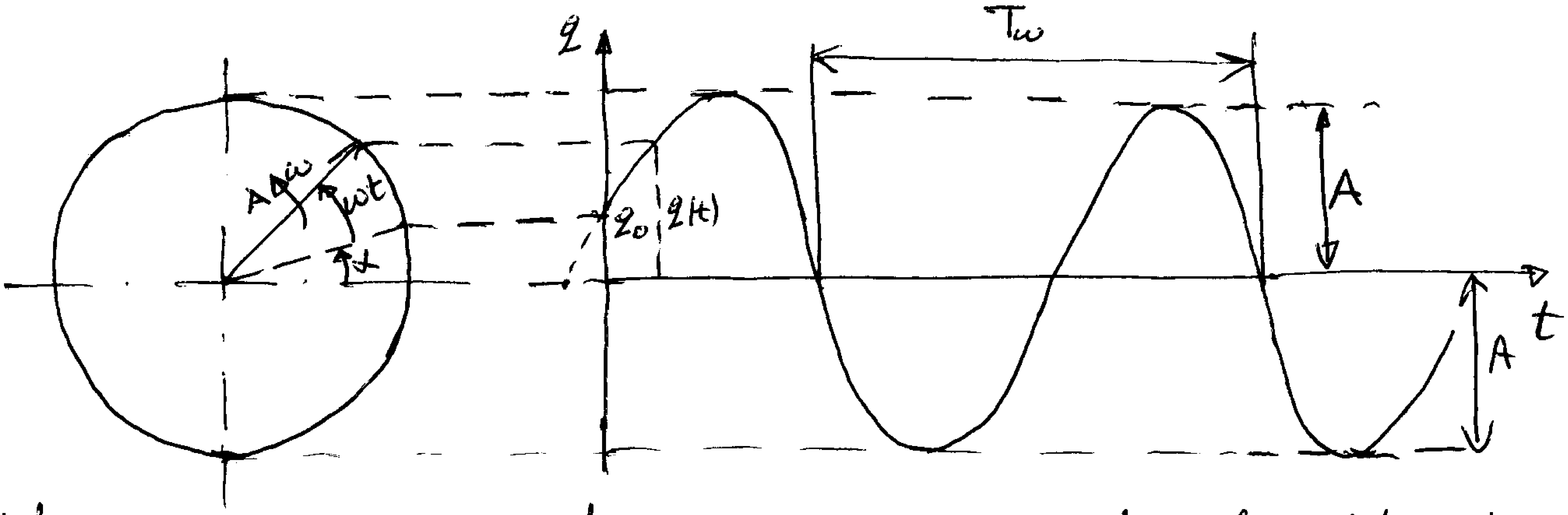
odnosno

$$q = \sqrt{q_0^2 + \left(\frac{\dot{q}_0}{\omega}\right)^2}\sin(\omega t + \alpha), \qquad (7)$$

što je grafički prikazano na slici. Dakle, kretanje je oscilatorno i periodično sa osnovnim periodom

$$T_\omega = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{a_{11}}{c_{11}}} \qquad (q(t + T_\omega) = q(t), \; \forall t)$$

koji se zove period oscilovanja. Broj perioda oscilovanja u jednoj sekundi $f = \frac{1}{T_\omega}$ zove se učestanost ili frekvencija oscilovanja.



Veličina ω zove se kružna frekvencija (v. sliku), a maksimalno odstupanje sistema od ravnotežnog položaja naziva se amplituda oscilovanja i ona je

$$A = |q_{max}(t)| = \sqrt{q_0^2 + \left(\frac{\dot{q}_0}{\omega}\right)^2}$$

$(\omega t + \alpha)$ je faza oscilovanja, a α je početna faza ili ugao faznog pomjeranja.

Dakle, tri konstante: ω (ili T_ω), A i α upotpunosti određuju zakon slobodnog oscilovanja. Pri tome, amplituda i početna faza zavise od početnih uslova, dok je kružna frekvencija (odnosno period) fizička konstanta datog sistema.

Primijetimo, na kraju, da je ukupna mehanička energija sistema

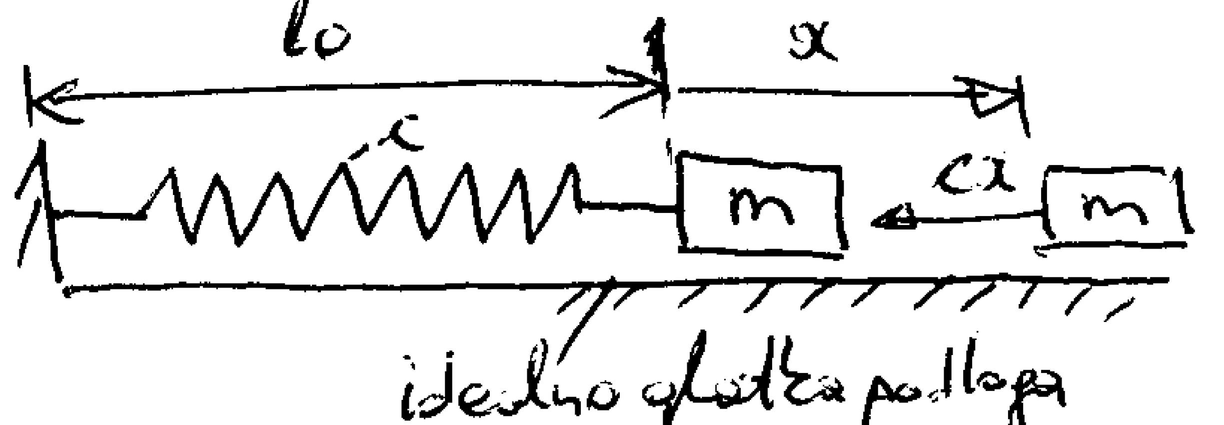
$$E = E_K + E_P = \frac{1}{2} a_{11} \dot{q}^2 + \frac{1}{2} c_{11} q \overset{(7)}{=} \frac{1}{2} c_{11} A^2 - const,$$

konstantna i proporcionalna kvadratu amplitude oscilovanja.

1.1 Osnovni primjeri

a) Opružni oscilator sa pravolinijskim kretanjem

a1) Horizontalni oscilator

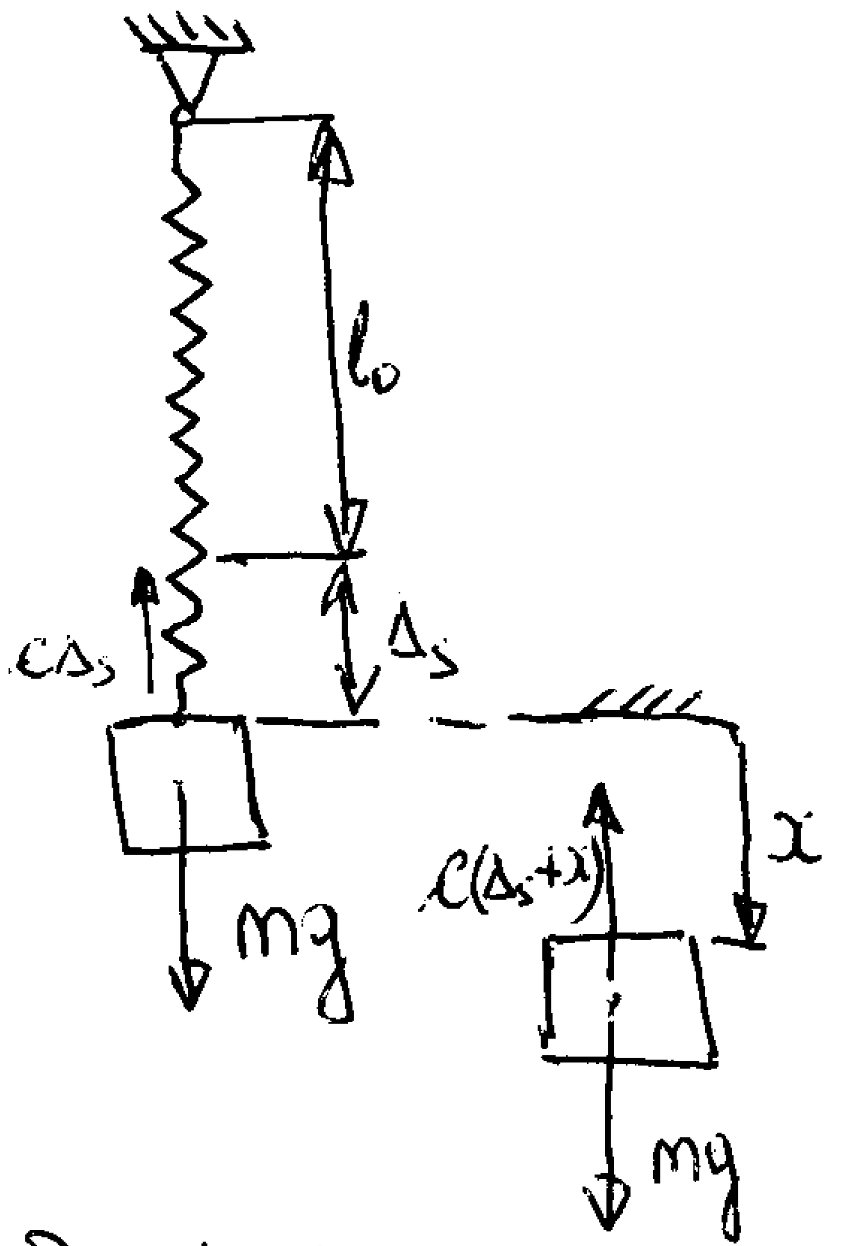


$$m\ddot{x} = -cx \to \ddot{x} + \omega^2 x = 0,\ \omega^2 = \frac{c}{m}$$

Ili $E_k = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 \to a_{11} = m$, $E_p = \frac{1}{2}c\Delta^2 = \frac{1}{2}cx^2 \to c_{11} = c$

$$\to \ddot{x} + \omega^2 x = 0,\ \omega^2 = \frac{c_{11}}{a_{11}} = \frac{c}{m}$$

a2) Oscilator sa vertikalnim kretanjem (uticaj konstantne sile na oscilatorno kretanje)



$mg = c\Delta_s$ (*) – uslov ravnoteže

$$m\ddot{x} = mg - c(\Delta_s + x) \overset{(*)}{=} -cx$$

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0,\ \omega^2 = \frac{c}{m}$$

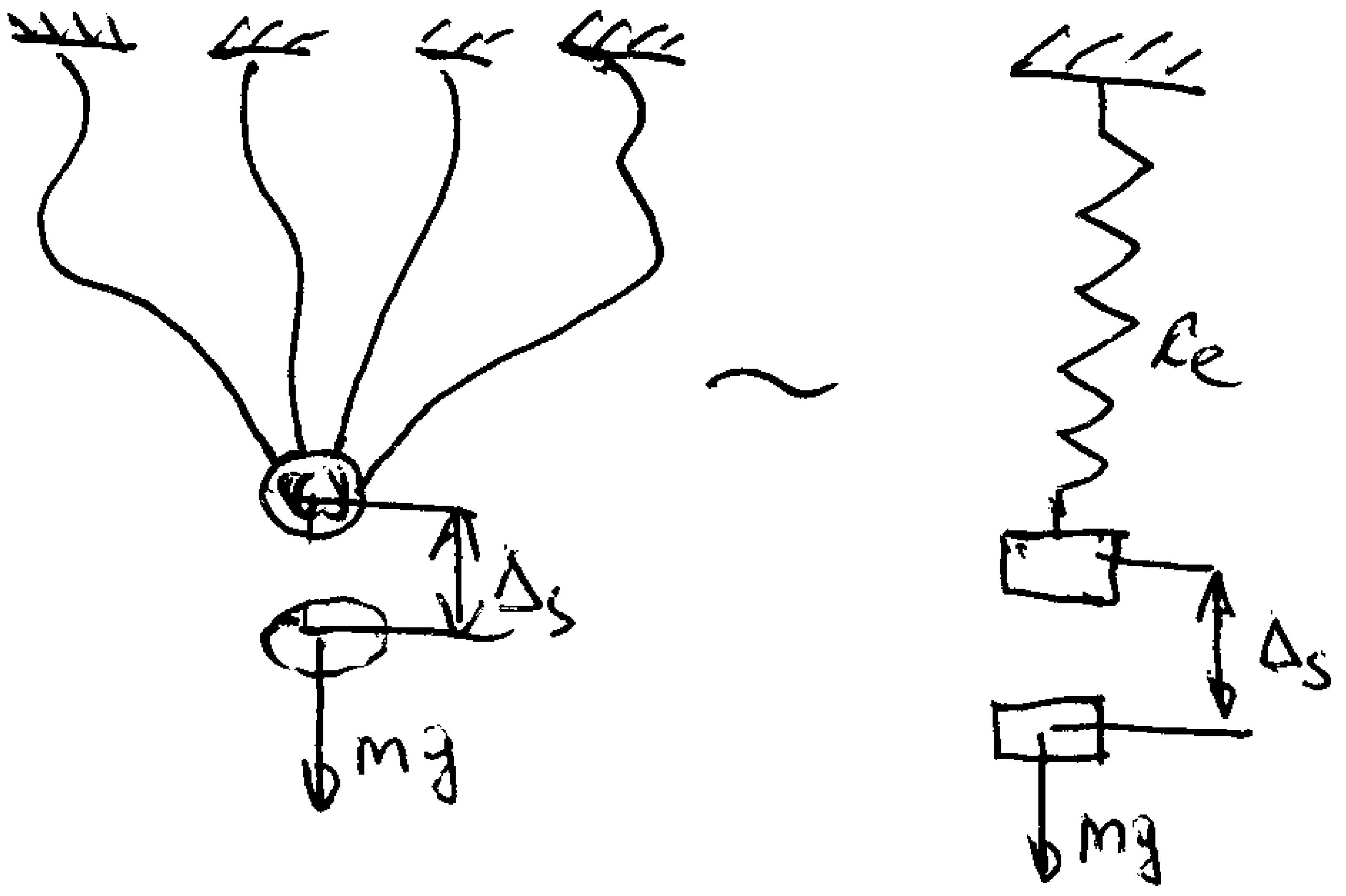
Napomena: $E_p = -mgx + \frac{1}{2}c(\Delta_s + x)^2 - \frac{1}{2}c\Delta_s^2 \overset{(*)}{=} \frac{1}{2}cx^2$

Konstantna sila mg ne mijenja karakter oscilovanja koje nastaje usled dejstva elastične sile opruge, već samo pomjera centar oscilovanja (ravnotežni položaj) u smjeru dejstva sile za veličinu statičkog pomjeranja (deformacije opruge) Δ_s.

$$(*) \mapsto c = \frac{mg}{\Delta_s} \to \omega^2 = \frac{g}{\Delta_s} \quad (**)$$

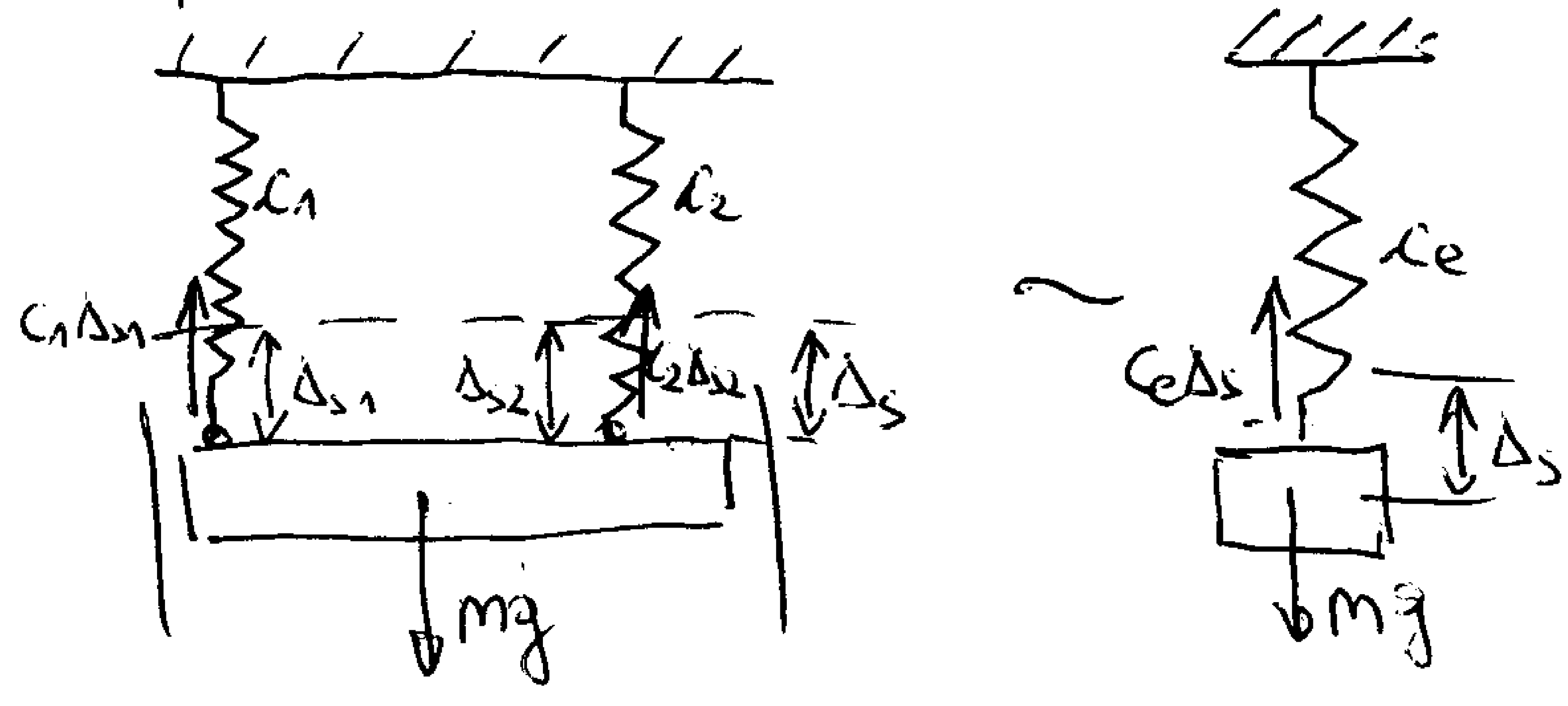
Formula (**) koristi se za eksperimentalno određivanje kružne frekvencije na osnovu izmjerenog statičkog pomjeranja Δ_s.

Prethodna analiza, takođe pokazuje da će koncentrisana masa, vezana za neku elastičnu konstrukciju zanemarljive mase, koja izvodi pravolinijske oscilacije oscilovati na isti način kao kada bi bila vezana za jednu elastičnu oprugu ekvivalentne krutosti c_e određene iz uslova jednakosti statičkih pomjeranja.



a2-1) Ekvivalentne krutosti spregnutih opruga

– paralelna veza



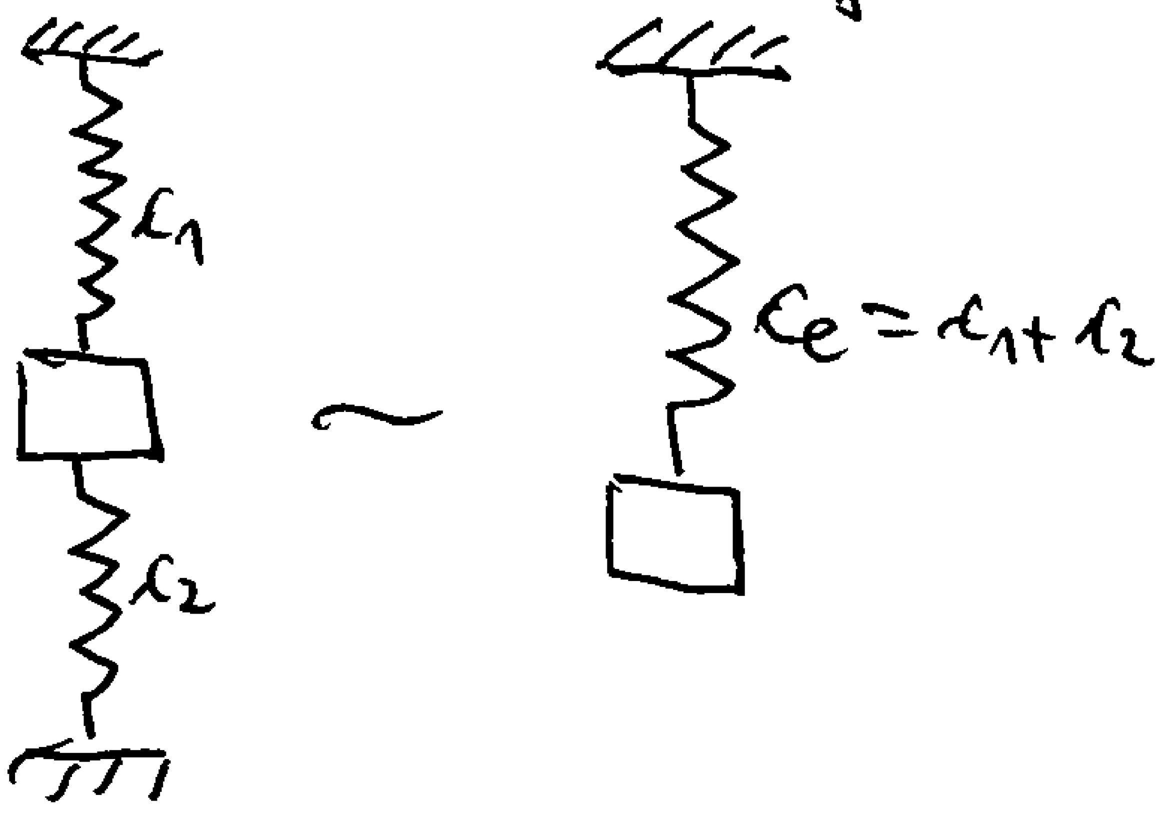
$$mg = c_1\Delta_{s1} + c_2\Delta_{s2}$$

$$mg = c_e\Delta_s$$

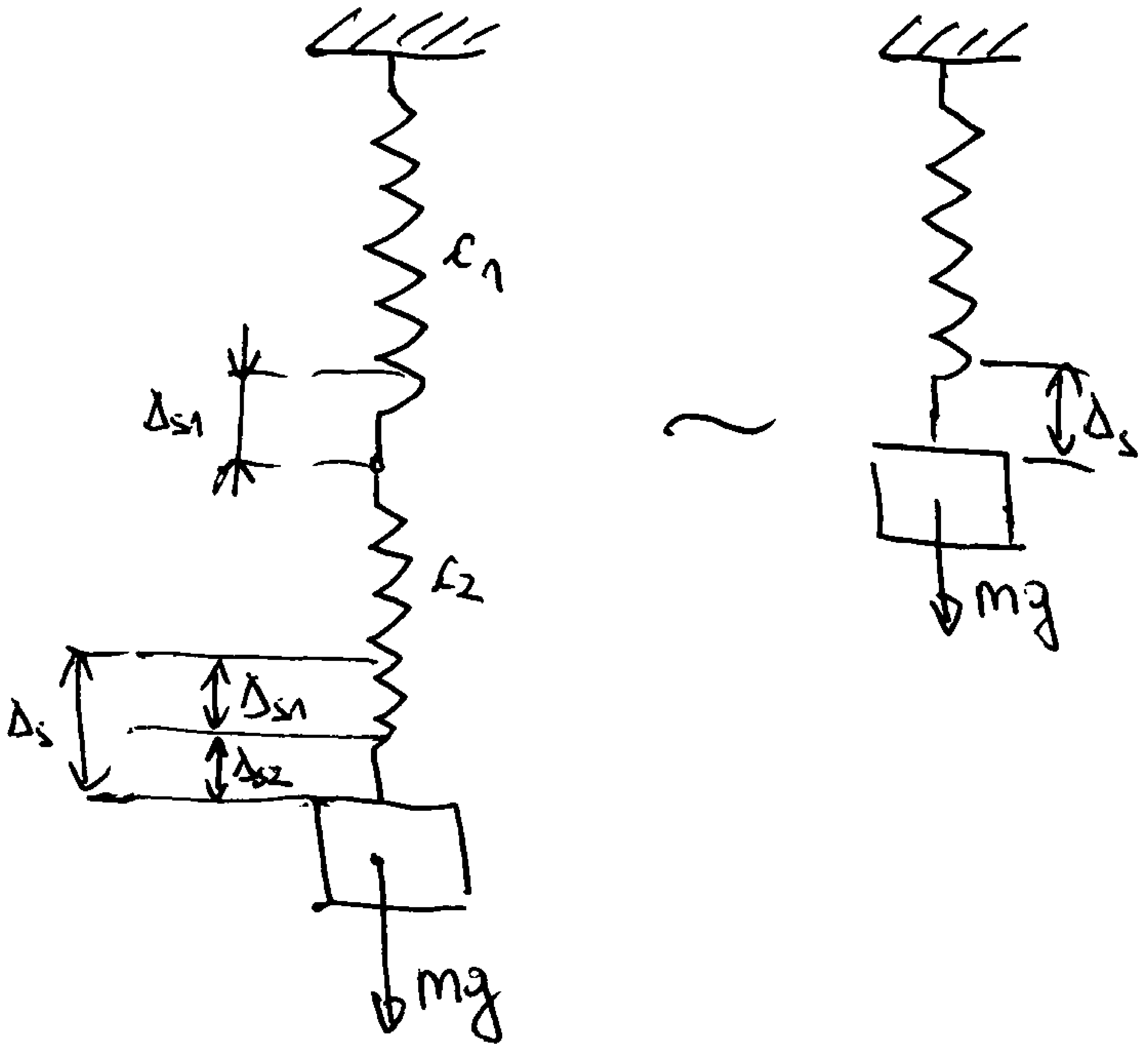
$$\Delta_{s1} = \Delta_{s2} = \Delta_s$$

$$\Rightarrow \boxed{c_e = c_1 + c_2}$$

Veza ostvarena na sledeći način je takođe paralelna, tj $c_e = c_1 + c_2$



– Redna (serijska) veza



$$\Delta_s = \Delta_{s1} + \Delta_{s2}$$

$$mg = c_1 \Delta_{s1}$$

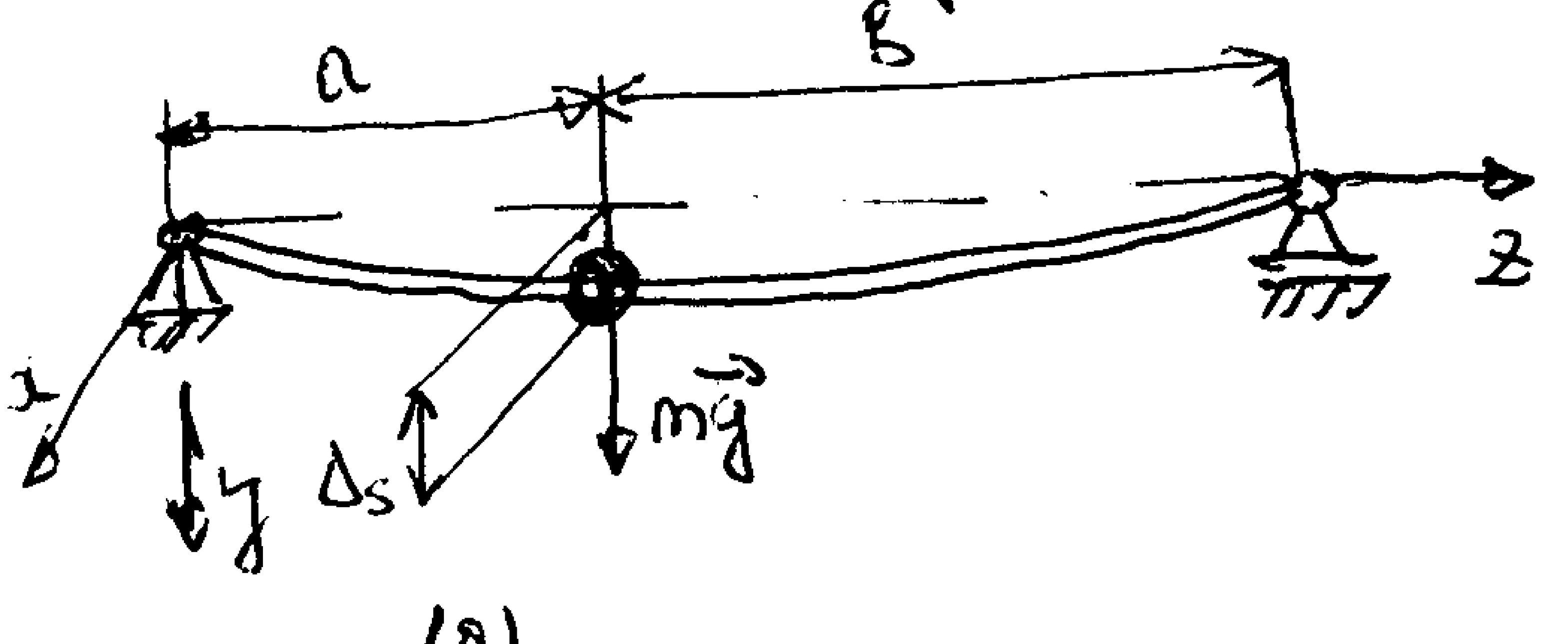
$$mg = c_2 \Delta_{s2}$$

$$mg = c_e \Delta_s$$

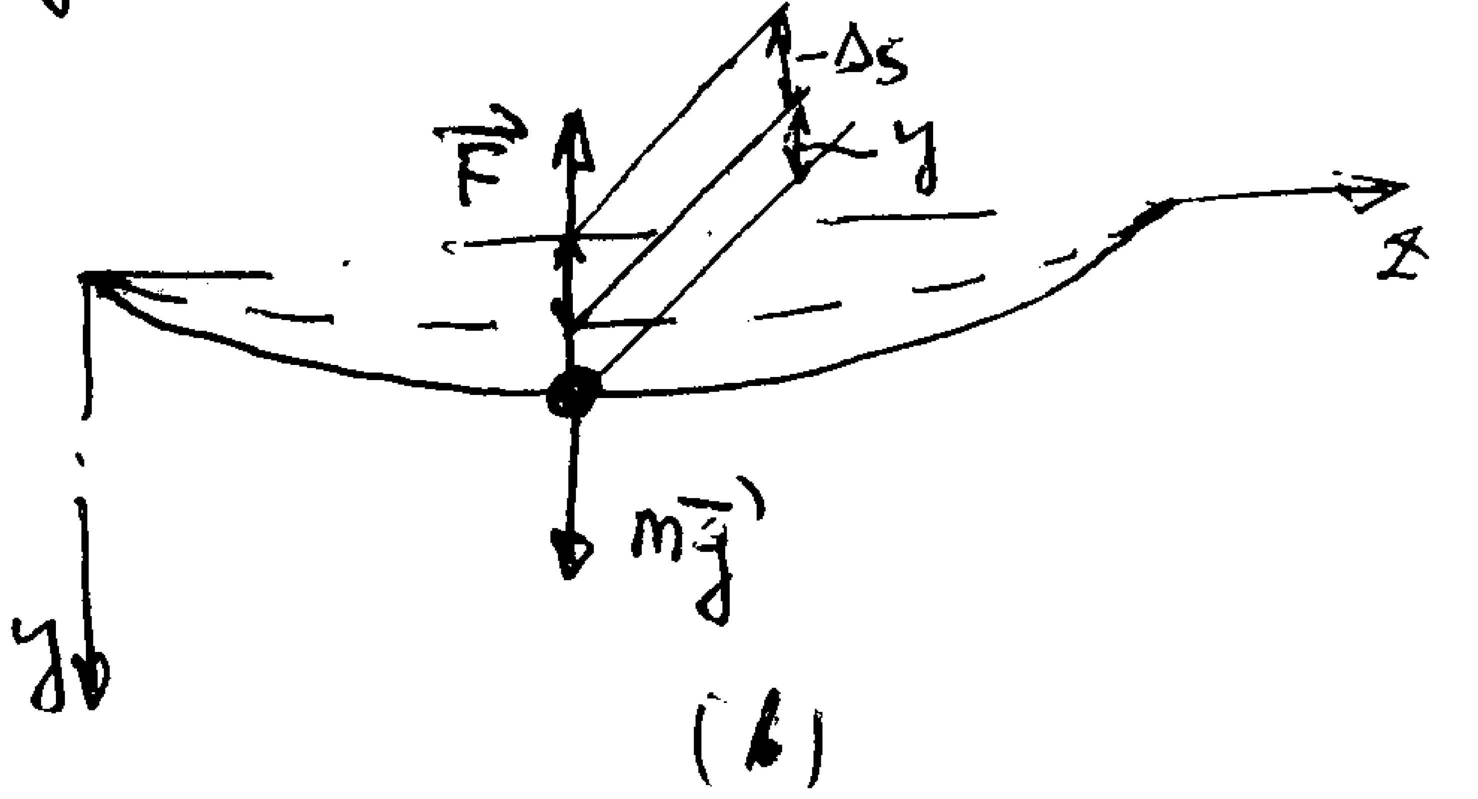
$$\boxed{\frac{1}{c_e} = \frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2}}$$

b) Poprečne slobodne oscilacije elastične grede sa jednom koncentrisanom masom

Posmatrajmo gredu (pravolinijski puni nosač), čije su dimenzije poprečnog presjeka mnogo manje od dužine, na kojem se nalazi koncentrisani teret (materijalna tačka) mase m čvrsto vezana za nosač. Pretpostavlja se da je masa materijalne tačke mnogo veća od mase grede, tako da masu grede zanemarujemo. Smatra se da se pri deformaciji grede njeni djelići pomjeraju u pravcu upravnom na osu nedeformisane grede.



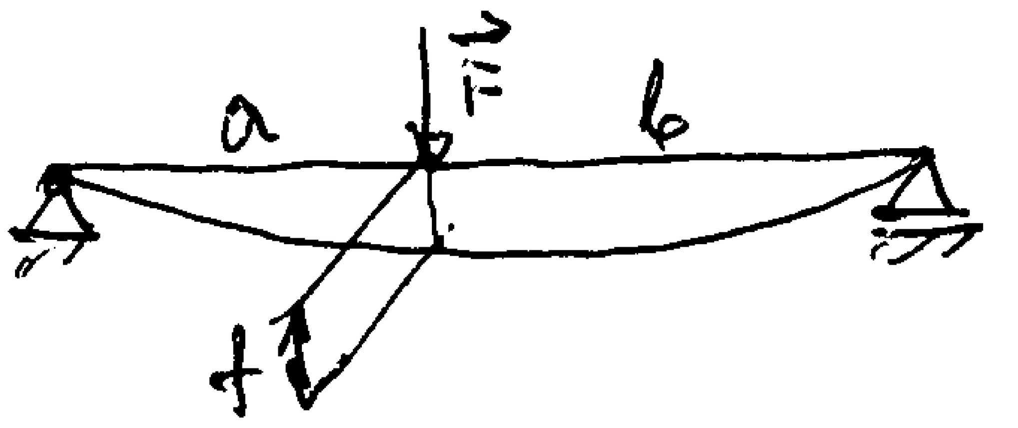
(a)



(b)

Položaj ravnoteže prikazan je na slici (a) i tada je Δ_s statičko pomjeranje tačke. Ako se mat. tačka izvede iz ravnotežnog položaja ili joj se saopšti početna brzina u pravcu upravnom na osu z grede doći će do približno pravolinijskih vertikalnih oscilacija tačke (sl. (b)).

Iz Otpornosti materijala je poznato da ako na gredni nosač djeluje poprečna sila F, tako da izaziva malo poprečno pomjeranje (ugib) f (ose grede), tada je $f = \alpha_{11} F$, gdje je $\alpha_{11} = \text{const}$ Maksvelov uticajni koeficijent. Za slučaj proste grede konstantnog poprečnog presjeka je



$$\alpha_{11} = \frac{1}{3EI_x}\frac{a^2 b^2}{l},$$

gdje je E - Jungov modul elastičnosti, I_x - moment inercije površine poprečnog presjeka za osu x, $l = a+b$ - dužina nosača. Veličina $B = EI_x$ zove se savojna krutost.

Prema tome, u proizvoljnom položaju pri oscilovanju tačke je $f = \Delta_s + y$ (sl. (b)) i greda djeluje na tačku silom $F = \frac{1}{\alpha_{11}}(\Delta_s + y) \equiv \beta_{11}(\Delta_s + y)$, gdje je $\beta_{11} = \frac{1}{\alpha_{11}}$ dualni Maksvelov uticajni koeficijent (y mjerimo od ravnotežnog položaja).

Diferencijalna jednačina pravolinijskog kretanja tačke je

$$m\ddot{y} = mg - \beta_{11}(\Delta_s + y)$$

Pošto je u ravnotežnom položaju

$$mg = \beta_{11}\Delta_s$$

biće

$$m\ddot{y} = -\beta_{11} y$$

ili

$$\ddot{y} + \omega^2 y = 0, \quad \omega^2 = \frac{\beta_{11}}{m} = \frac{1}{m\alpha_{11}}$$

Do diferencijalne jednačine poprečnih oscilacija tiče može se doći i primjenom Lagrangeove jednačine druge vrste.

Kinetička energija tiče je $E_k = \frac{1}{2} m \dot{y}^2$

Uzimajući da je potencijalna energija u položaju ravnoteže jednaka nuli, tiče

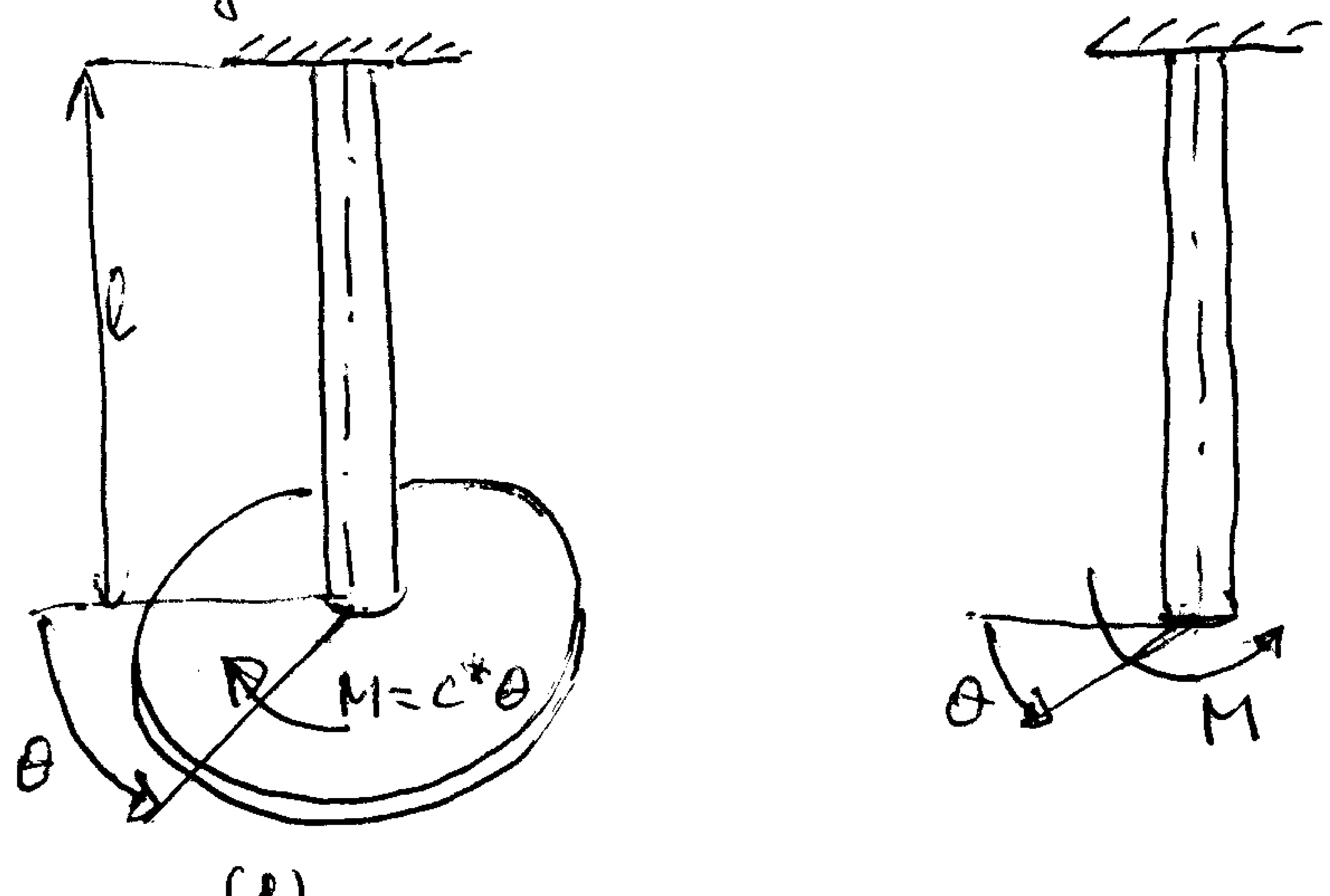
$$E_p = -mgy + \int_{\cancel{\Delta}_s + y}^{0} -\mathfrak{z}_{11}(\Delta_s + y)\,dy = \frac{1}{2}\mathfrak{z}_{11} y^2$$

Na taj način dolazimo do zaključka da su opruzni i gredni oscilator ekvivalentni pri čemu je krutost grede kao elastičnog elementa

$$c = \mathfrak{z}_{11} = \frac{1}{\alpha_{11}}$$

c) Torzijski oscilator.

Posmatrajmo prizmatično pravolinijsko elastično vratilo koje je na jednom kraju uklješteno a na drugom nosi osno simetrični kruti disk čija se osa simetrije poklapa sa osom vratila. Pretpostavlja se da je jedino kretanje koje disk izvodi obrtanje oko nepomične ose vratila. Masa vratila se zanemaruje u odnosu na masu diska.



(1)

Iz Otpornosti materijala je poznato da je veza između ugla uvijanja θ i momenta data sa

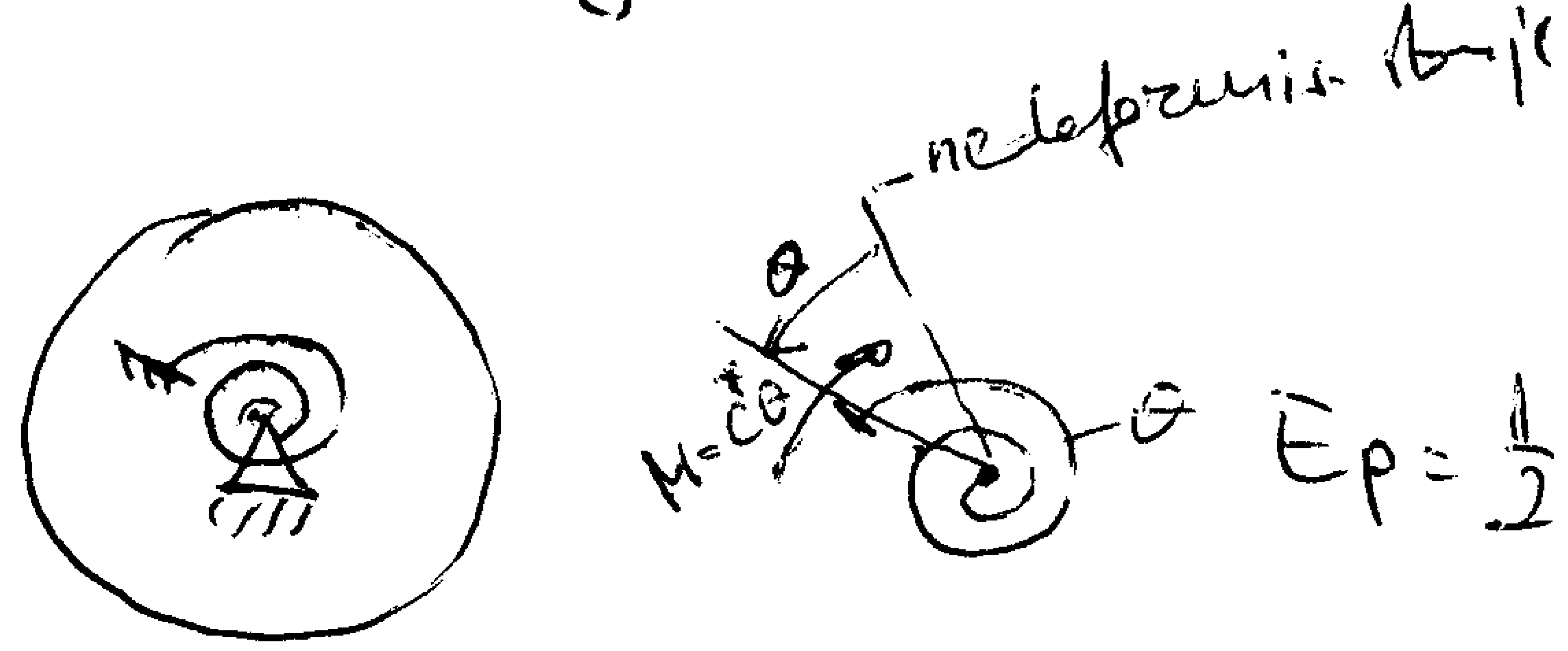
$$M = \frac{G I_o}{l}\theta \equiv c^*\theta,$$

G – modul smicanja (klizanja)
I_o – polarni moment inercije površine poprečnog presjeka vratila za njegovo težište
l – dužina vratila

$$E_k = \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2, \quad E_p = \int_{\theta}^{0} -c^*\theta\, d\theta = \frac{1}{2} c^* \theta^2$$

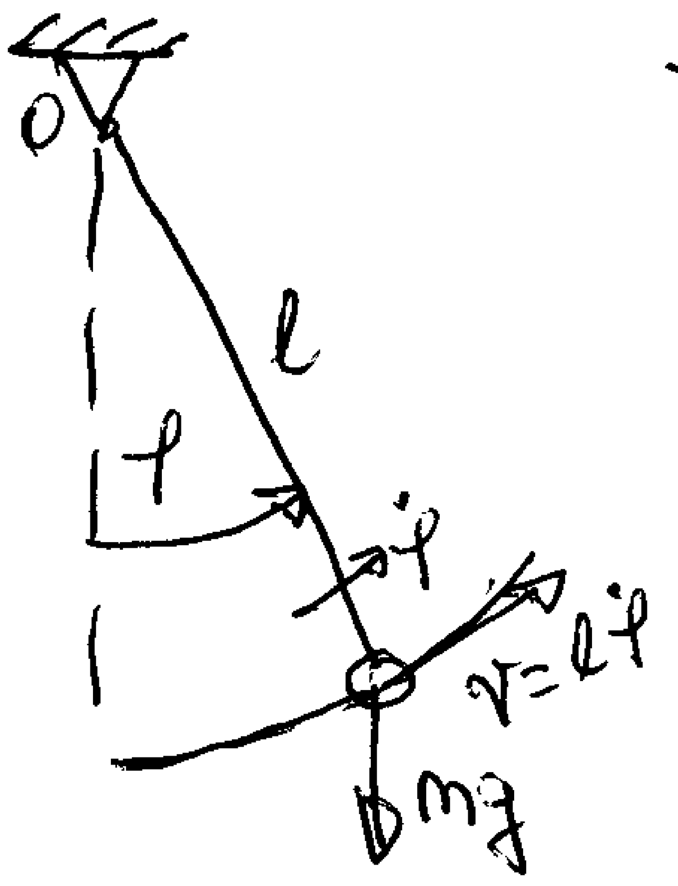
$$\ddot{\theta} + \omega^2\theta = 0, \quad \omega^2 = \frac{c^*}{J}$$

spiralni oscilator:



$$E_p = \frac{1}{2} c^* \theta^2$$

d) Matematičko klatno



$\varphi = 0$ – stabilni ravnotežni položaj

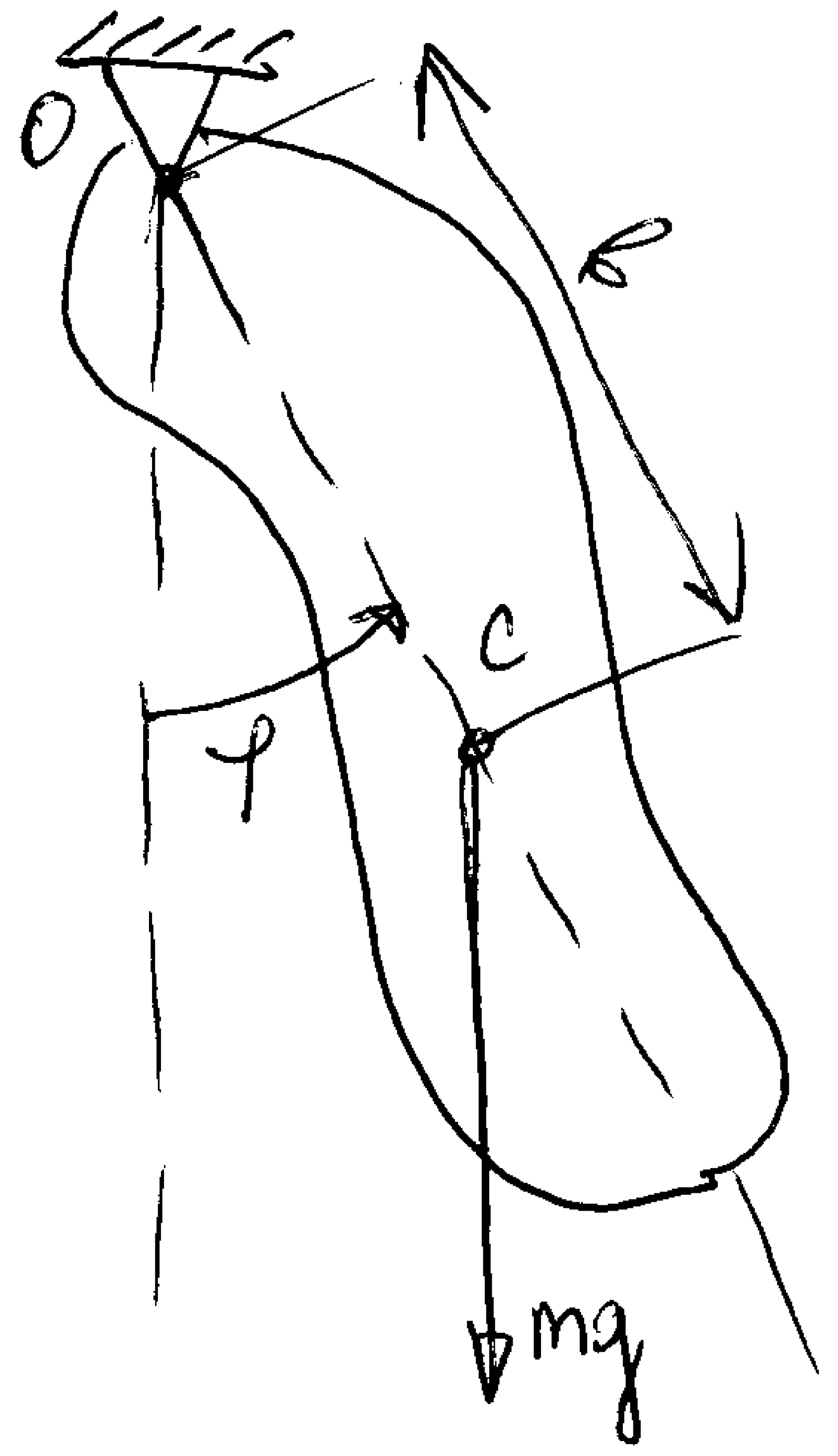
$E_K = \frac{1}{2} m (l\dot\varphi)^2 \longrightarrow a_{11} = ml^2$

$E_p = -mgl\cos\varphi$

$\rightarrow c_{11} = \left.\frac{d^2 E_p}{d\varphi^2}\right|_{\varphi=0} = mgl$

$\ddot\varphi + \omega^2 \varphi = 0, \quad \omega^2 = \frac{c_{11}}{a_{11}} = \frac{g}{l}$

e) Fizičko klatno



$\varphi = 0$ – stabilni ravnotežni položaj

$E_K = \frac{1}{2} J_O \dot\varphi^2 \longrightarrow a_{11} = J_O$

$E_p = -mgb\cos\varphi$

$c_{11} = \left.\frac{d^2 E_p}{d\varphi^2}\right|_{\varphi=0} = mgb$

$\ddot\varphi + \omega^2 \varphi = 0, \quad \omega^2 = \frac{mgb}{J_O}$

2. Slobodne prigušene oscilacije

Na sistem osim konzervativnih sila djeluju i sile otpora $\vec{F}_\nu^{(d)} = -\beta_\nu \vec{v}_\nu$, $\nu = 1, \dots, N$

U okolini stabilnog ravnotežnog položaja $q = 0$ je $E_k = \frac{1}{2} a_{11} \dot{q}^2$, $E_p = \frac{1}{2} c_{11} q^2$ i

$\Phi = \frac{1}{2} b_{11} \dot{q}$, gdje je $b_{11} = \sum_{\nu=1}^{N} \beta_\nu \left(\frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q}\right)_0^2$:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}} + \frac{\partial E_p}{\partial q} + \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}} = 0 \longrightarrow a_{11}\ddot{q} + b_{11}\dot{q} + c_{11} q = 0 \ \Big|: a_{11}$$

$$\rightarrow \ddot{q} + 2n\dot{q} + \omega^2 q = 0, \quad n = \frac{b_{11}}{2a_{11}}, \quad \omega^2 = \frac{c_{11}}{a_{11}} \qquad (1)$$

$(1) \xrightarrow{q = e^{\lambda t}} \lambda^2 + 2n\lambda + \omega^2 = 0$ (2) – karakteristična jednačina sistema

$$\lambda_{1,2} = -n \pm \sqrt{n^2 - \omega^2}$$

Karakter kretanja je određen prirodom korijena $\lambda_{1,2}$ karakteristične jednačine

a) Slučaj malog prigušenja (oscilatorno kvaziperiodično kretanje): $n < \omega$

U ovom slučaju korijeni karak. jednačine su konjugovano kompleksni brojevi sa negativnim realnim dijelovima, tj.

$$\lambda_{1,2} = -n \pm ip, \quad p = \sqrt{\omega^2 - n^2}, \quad i = \sqrt{-1}$$

Opšte rješenje dif. jed. (1) je

$$q = C_1' e^{\lambda_1 t} + C_2' e^{\lambda_2 t} = \dots = e^{-nt}(C_1 \cos pt + C_2 \sin pt), \qquad (3)$$

odnosno, poslije transformacije

$C_1 = R \sin\alpha$

$C_2 = R\cos\alpha$,

$$q = R e^{-nt} \sin(pt + \alpha); \ R = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}, \ \sin\alpha = \frac{C_1}{R}, \ \cos\alpha = \frac{C_2}{R} \qquad (4)$$

Za početne uslove: $t_0 = 0$, $q(t_0) = q_0$, $\dot{q}(t_0) = \dot{q}_0$ dobijamo

$$C_1 = q_0, \quad C_2 = \frac{\dot{q}_0 + n q_0}{p}$$

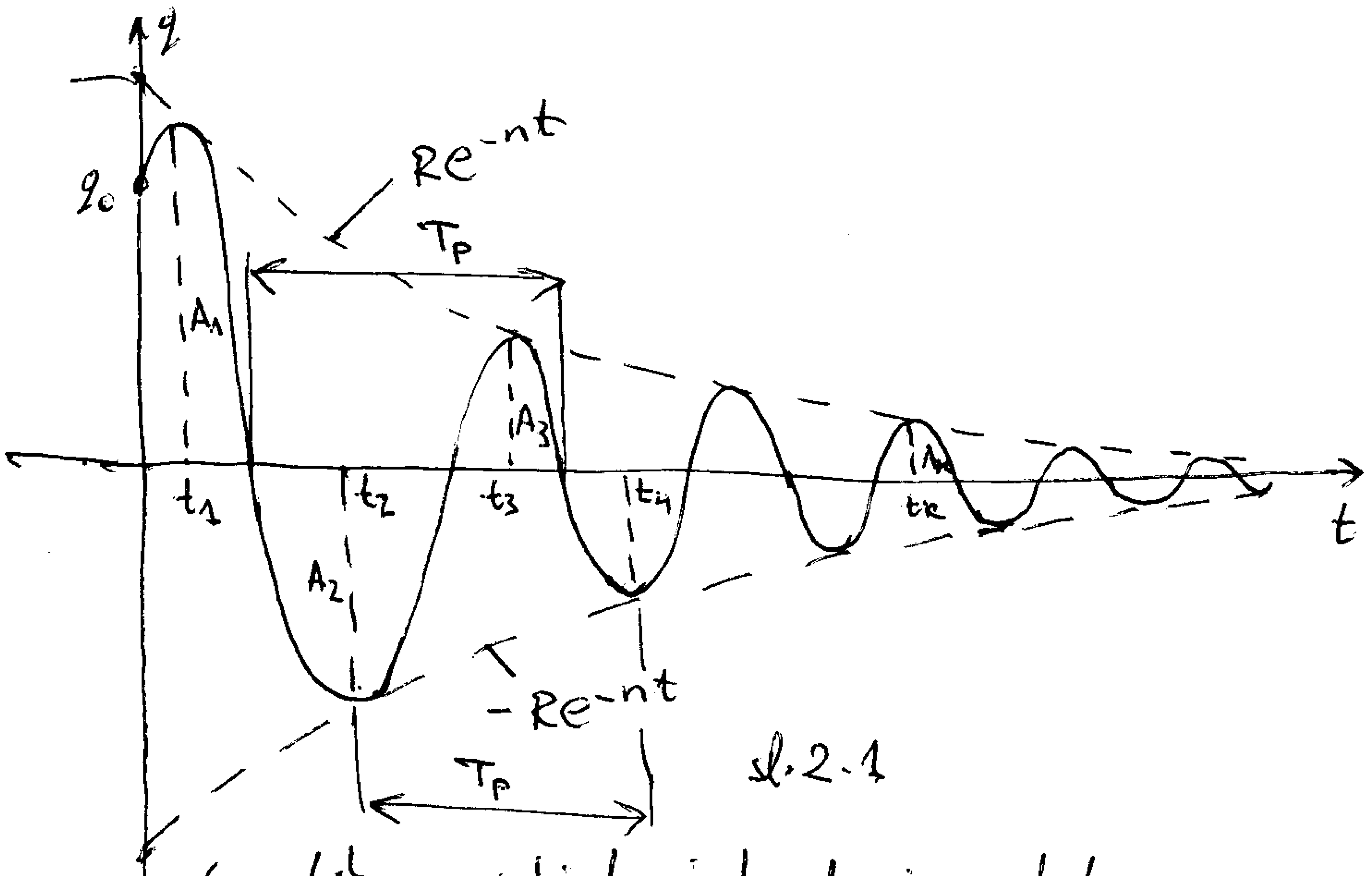
pa je konačna jednačina kretanja

$$q = e^{-nt}\left(q_0 \cos pt + \frac{\dot{q}_0 + n q_0}{p} \sin pt\right), \qquad (5)$$

odnosno

$$q = R e^{-nt} \sin(pt + \alpha), \ R = \sqrt{q_0^2 + \left(\frac{\dot{q}_0 + n q_0}{p}\right)^2}, \ \sin\alpha = \frac{q_0}{R}, \ \cos\alpha = \frac{\dot{q}_0 + n q_0}{pR}. \qquad (6)$$

Grafički prikaz jednačine kretanja dat je na slici 2.1.



sl. 2.1

Sa slike se vidi da je kretanje oscilatorno i nije periodično, ali se trenuci prolaska sistema kroz položaj ravnoteže (nule f-je $\sin(pt+\alpha)$) periodično ponavljaju pa se kaže da je kretanje kvaziperiodično (prividnoperiodično). Kao period prigušenih oscilacija T_p definiše se vremenski interval između dva uzastopna prolaska sistema kroz ravnotežni položaj sa iste strane, tj.

$$T_p = \frac{2\pi}{p} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega^2 - n^2}} \rightarrow T_p = \frac{2\pi}{\omega}\frac{1}{\sqrt{1-\psi^2}}, \quad \frac{2\pi}{\omega} = T_\omega \text{ - period odgovarajućih neprigušenih oscilacija}$$

$$\psi = \frac{n}{\omega} \text{ - bezdimenzijski koeficijent prigušenja } (0<\psi\leq 1)$$

$$\rightarrow \frac{T_p}{T_\omega} = \frac{1}{\sqrt{1-\psi^2}} > 1 \rightarrow \text{za mali koeficijent prigušenja } \psi,\ T_p \approx T_\omega$$

Trenuci dostizanja amplituda određuju se iz jednačine

$$\dot{q}(t) = Re^{-nt}\left[p\cos(pt+\alpha) - n\sin(pt+\alpha)\right] = 0,$$

odakle slijedi

$$t_k = \frac{1}{p}\left[\operatorname{arctg}\frac{p}{n} - \alpha + (k-1)\pi\right], \quad k = 1,2,3,\dots; \quad A_k = |q(t_k)|$$

$$\rightarrow t_{k+1} = t_k + \frac{\pi}{p} = t_k + \frac{T_p}{2} \rightarrow \text{vremenski razmak između dvije susjedne amplitude jednak je polovini perioda prigušenih oscilacija.}$$

Kao kvantitativna mjera uticaja prigušenja uzima se odnos dvije uzastopne amplitude, tj.

$$d = \frac{A_k}{A_{k+1}} = \frac{|q(t_k)|}{|q(t_{k+1})|} \overset{(6)}{=} e^{\frac{\pi n}{p}} = e^{\frac{nT_p}{2}} \text{ - dekrement prigušenja}$$

Znači, amplitude se smanjuju po zakonu geometrijske progresije.
Obično se kao mjera uticaja prigušenja umjesto d uzima tzv. takozvani logaritamski dekrement:

$$\vartheta \overset{def.}{=} \ln d = \pi\frac{n}{p}$$

Na kraju, primijetimo da je $\lim_{t\to\infty} q(t) = 0$, tj. pod dejstvom otpora stabilni ravnotežni položaj postaje asimptotski stabilan.

b) Slučaj velikog prigušenja (neoscilatorno aperiodično kretanje): $n > \omega$

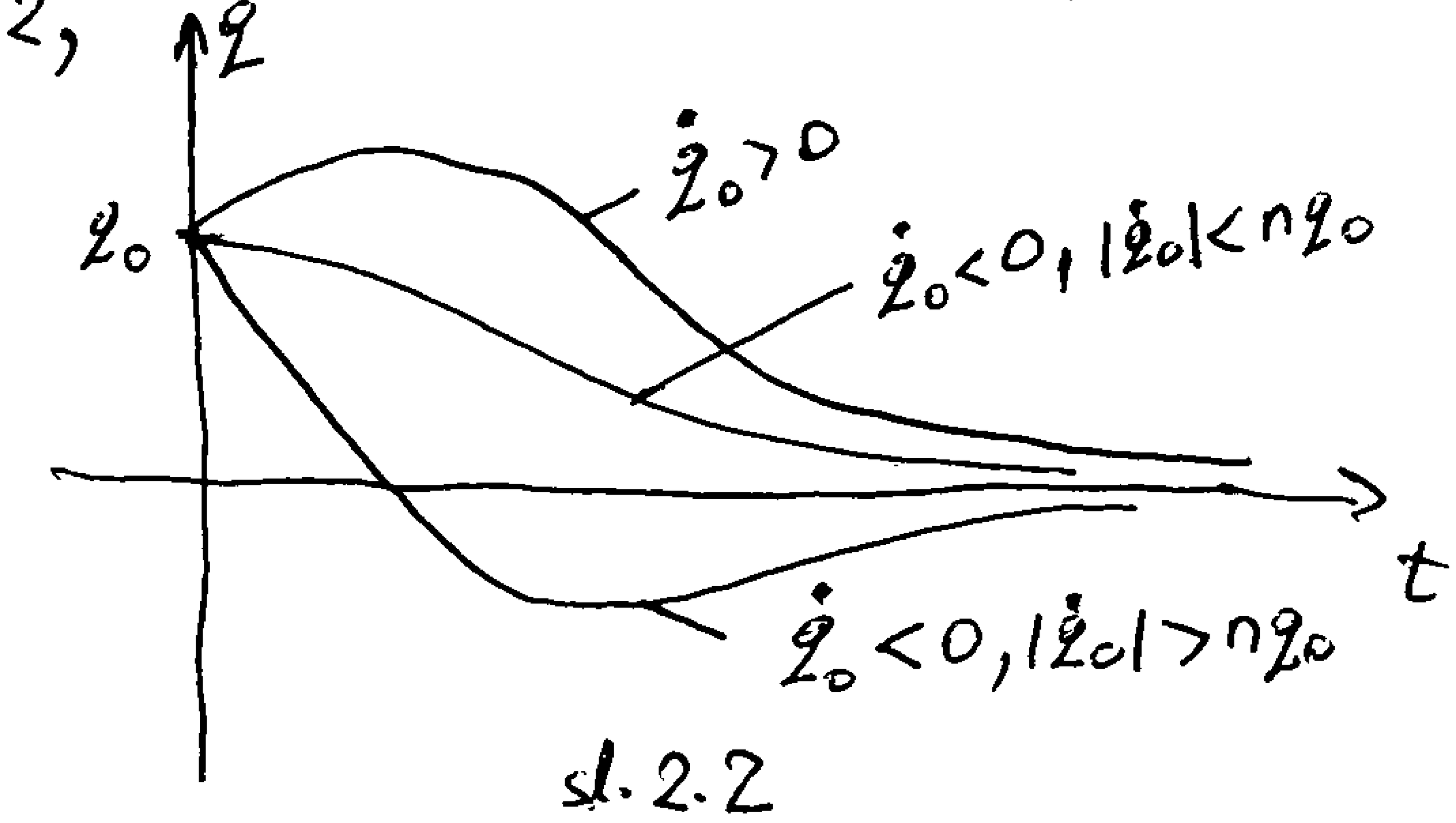
U ovom slučaju korijeni karakteristične jednačine (2) su realni i negativni, tj.

$$\lambda_{1,2} = -n \pm r, \quad r = \sqrt{n^2 - \omega^2}$$

pa je opšte rješenje dif. jed. (1) oblika

$$q = e^{-nt}\left(C_1 e^{rt} + C_2 e^{-rt}\right)$$

Jednačina kretanja dobija se određivanjem integracionih konstanti C_1 i C_2 saglasno početnim uslovima. Grafik kretanja, zavisno od početnih uslova, izgleda kao na sl. 2.2,



sl. 2.2

i kao što se vidi kretanje je neoscilatorno i potpuno neperiodično (aperiodično).

c) Granični slučaj (kritično prigušenje): $n = \omega$

U ovom slučaju korijeni karakteristične jednačine (2) su realni, negativni i jednaki, tj.

$$\lambda_{1,2} = -n$$

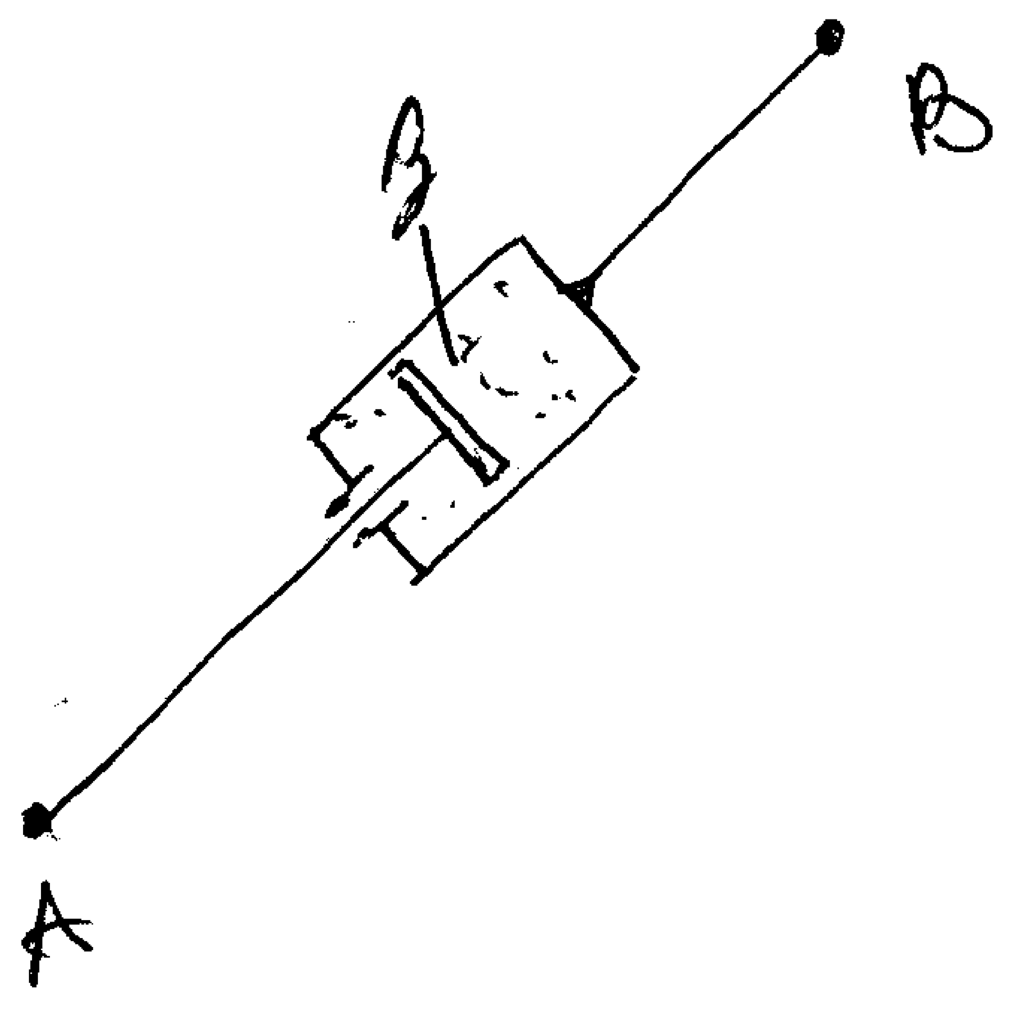
pa je, u skladu sa teorijom linearnih diferencijalnih jednačina, opšte rješenje

$$q = (C_1 t + C_2) e^{-nt}$$

Grafici kretanja su sličnog oblika kao na sl. 2.2, te se može zaključiti da je i u ovom slučaju kretanje neoscilatorno i aperiodično.

N. Sile otpora kretanju materijalnog sistema mogu biti spoljašnje i unutrašnje. Spoljašnje potiču od spoljašnje materijalne sredine a unutrašnje nastaju usled uzajamnog dejstva pojedinih djelova sistema suprostavljajući se promjeni njihovog međusobnog rastojanja i zavise od relativnih brzina kojima se ta rastojanja mijenjaju. Kao model za takva dejstva uzima se prigušivač čija je disipativna funkcija

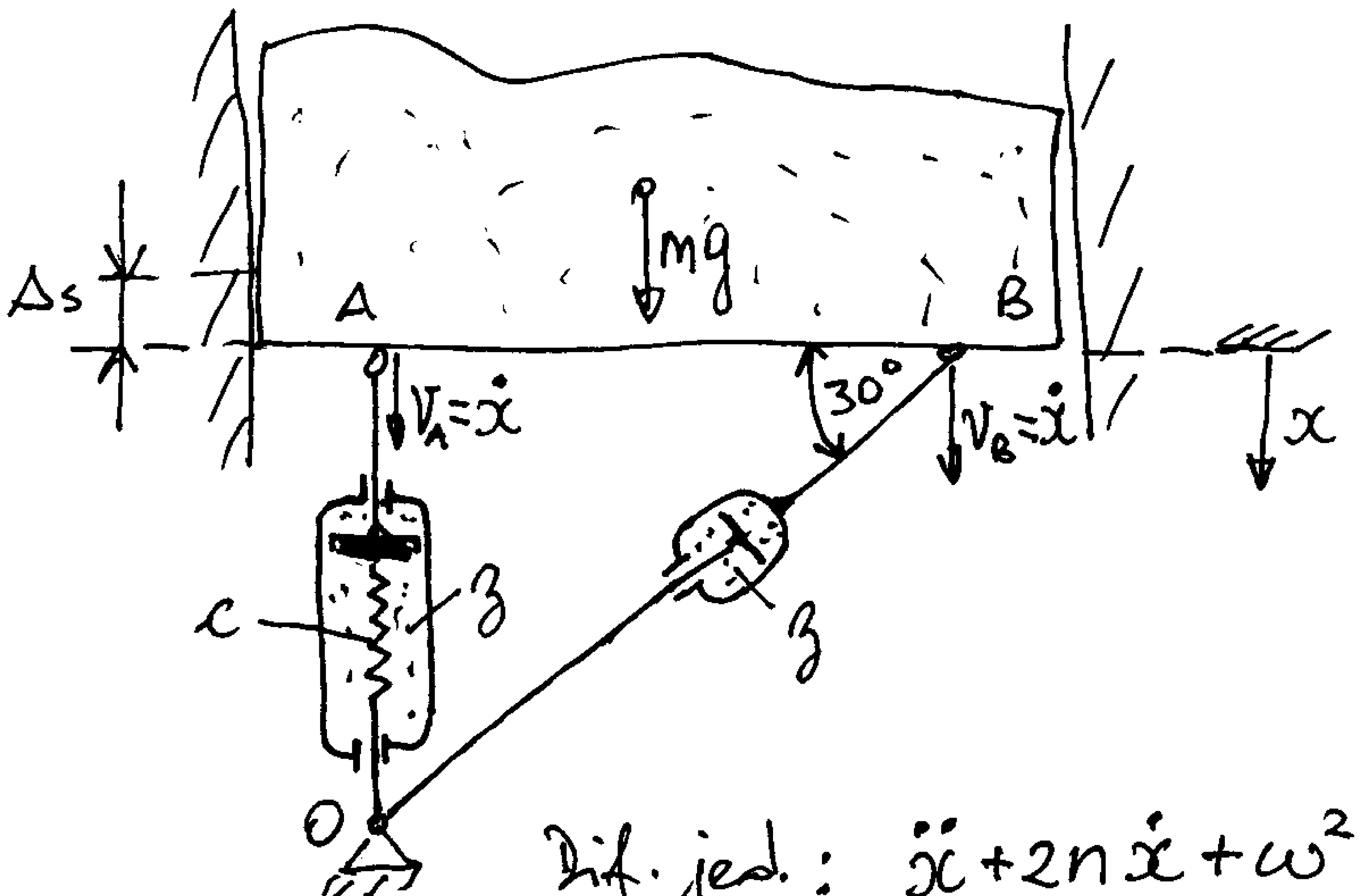
$$\Phi = \frac{1}{2} \gamma v_r^2,$$



gdje je v_r relativna brzina klipa u odnosu na cilindar prigušivača.

Zadaci: Slobodne prigušene oscilacije

1. Mašina mase m, koja može da se pomjera u vertikalnom pravcu, vezana je zglobno za prigušivače zanemarljivih masa. Položaj ravnoteže prikazan na slici održava opruga krutosti c koja se nalazi u prigušivaču OA. Ako je sila otpora prigušivača srazmjerna brzini klipa u odnosu na cilindar, odrediti koji uslov treba da zadovoljava koeficijent proporcionalnosti β da bi mašina izvodila kvaziperiodično oscilatorno kretanje.



$$E_k = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 \rightarrow a_{11} = m$$

$$E_p = \frac{1}{2} c(\Delta_s + x)^2 - mgx$$

$$c_{11} = \frac{d^2 E_p}{dx^2}\Big|_{x=0} = c$$

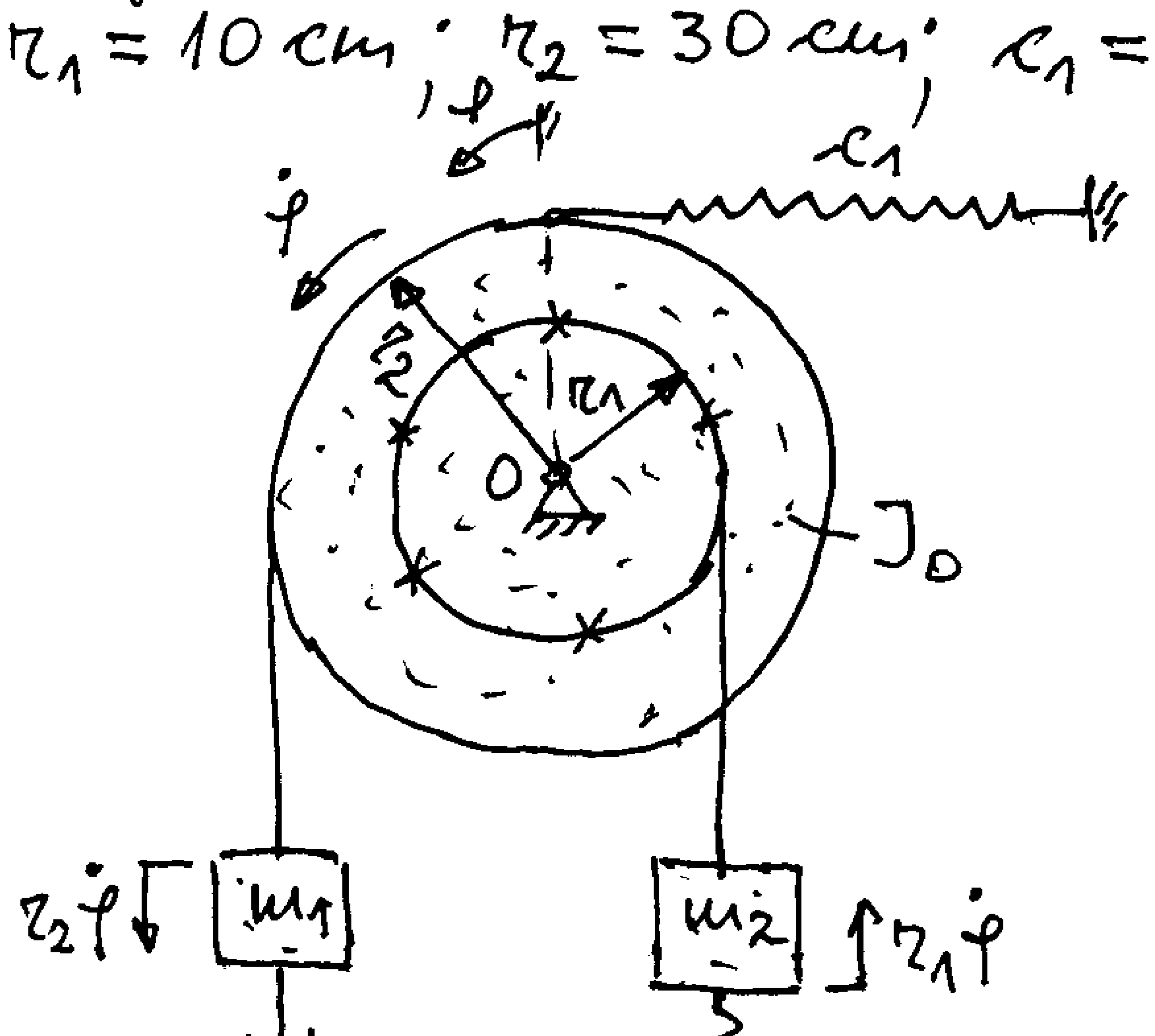
$$\Phi = \frac{1}{2}\beta V_A^2 + \frac{1}{2}\beta (V_B \cos 60^\circ)^2$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{5}{4}\beta \dot{x}^2 \rightarrow b_{11} = \frac{5}{4}\beta$$

Dif. jed.: $\ddot{x} + 2n\dot{x} + \omega^2 x = 0$, $2n = \frac{b_{11}}{a_{11}} = \frac{5}{4}\frac{\beta}{m}$; $\omega^2 = \frac{c_{11}}{a_{11}} = \frac{c}{m}$

uslov zadatka: $n < \omega \Rightarrow \boxed{\beta < \frac{8}{5}\sqrt{cm}}$

2. U oscilatornom sistemu prikazanom na slici bezdimenzioni koeficijent prigušenja je $\psi = 1,25$. Koliki je koeficijent prigušenja β u prigušivaču, ako su: $m_1 = 10$ kg; $m_2 = 20$ kg; $J_O = 1,1$ kgm^2; $r_1 = 10$ cm; $r_2 = 30$ cm; $c_1 = 10^4$ N/m; $c_2 = 10^5$ N/m.



$$\psi = \frac{n}{\omega}; \quad n = \frac{b_{11}}{2a_{11}}; \quad \omega = \sqrt{\frac{c_{11}}{a_{11}}}$$

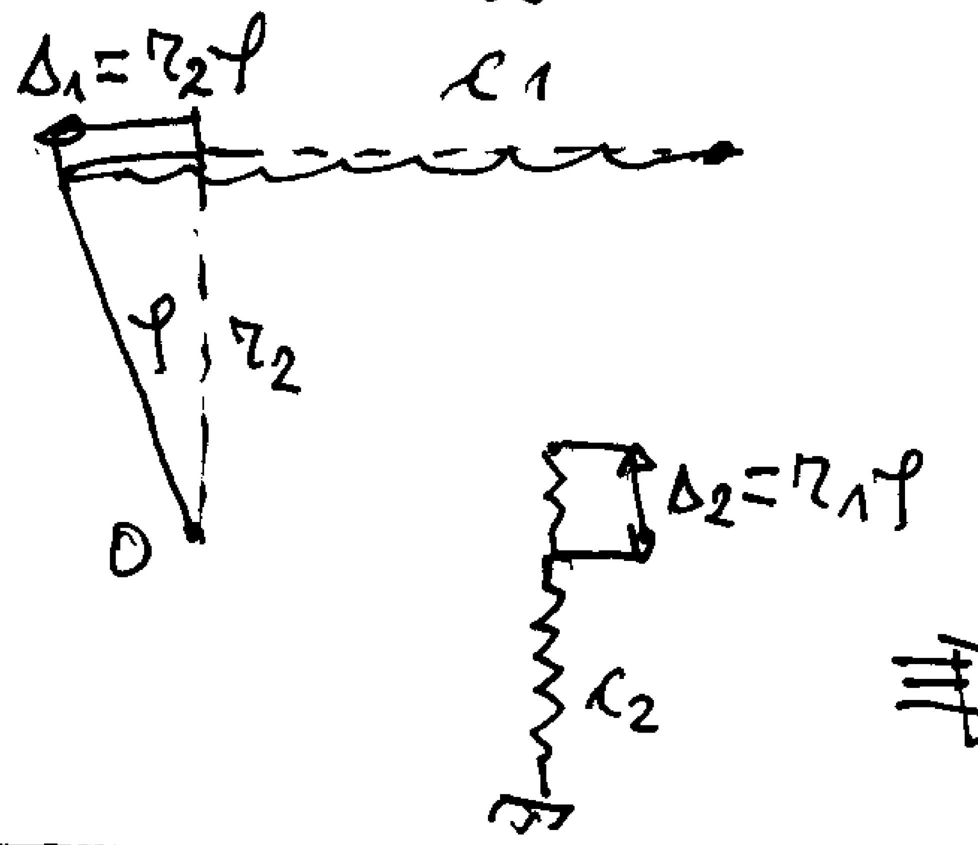
$$\Rightarrow a_{11},\ b_{11},\ c_{11}\ ?$$

$$E_k = \frac{1}{2}J_O\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}m_1(r_2\dot{\varphi})^2 + \frac{1}{2}m_2(r_1\dot{\varphi})^2$$

$$= \frac{1}{2}\left(J_O + m_1 r_2^2 + m_2 r_1^2\right)\dot{\varphi}^2$$

$$\Rightarrow a_{11} = J_O + m_1 r_2^2 + m_2 r_1^2$$

$$\Phi = \frac{1}{2}\beta(r_2\dot{\varphi})^2 = \frac{1}{2}\beta r_2^2\dot{\varphi}^2 \Rightarrow b_{11} = \beta r_2^2$$



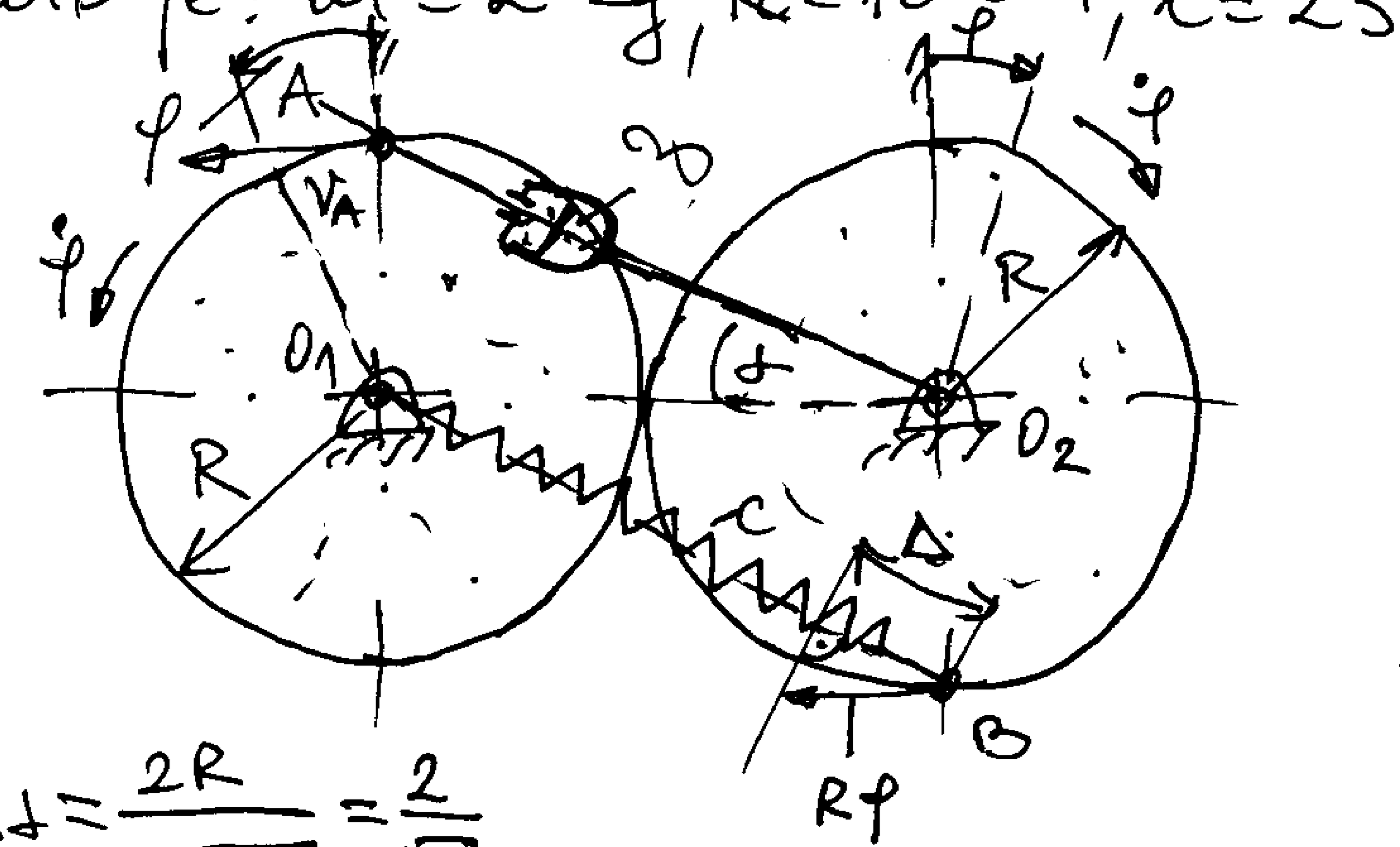
$$E_p = \frac{1}{2}c_1\Delta_1^2 + \frac{1}{2}c_2\Delta_2^2 = \frac{1}{2}(c_1 r_2^2 + c_2 r_1^2)\varphi^2$$

$$\Rightarrow \cancel{a}\ c_{11} = c_1 r_2^2 + c_2 r_1^2$$

$$\Rightarrow \frac{\beta r_2^2}{2(J_0 + m_1 r_2^2 + m_2 r_1^2)} = \psi\sqrt{\frac{c_1 r_2^2 + c_2 r_1^2}{J_0 + m_1 r_2^2 + m_2 r_1^2}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\beta = 1820\ \frac{Ns}{m}}$$

3. Sistem se sastoji od dva spregnuta zupčanika jednakih masa m i poluprečnika R. Zupčanici su vezani oprugom krutosti c i viskoznim prigušivačem sa koeficijentom prigušenja β. Zupčanike smatrati homogenim kružnim diskovima. Ako je u početnom trenutku sistem bio u miru a zupčanici obrnuti za mali ugao φ_0 u odnosu na ravnotežni položaj prikazan na slici, odrediti konačne jednačine oscilovanja sistema. Dato je: $m = 2$ kg; $R = 10$ cm; $c = 250$ N/m; $\beta = 30$ Ns/m; $\varphi_0 = 0{,}08$ rad.



$$E_k = \frac{1}{2}J_{O_1}\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}J_{O_2}\dot{\varphi}^2$$

$$J_{O_1} = J_{O_2} = \frac{mR^2}{2}$$

$$E_k = \frac{1}{2}mR^2\dot{\varphi}^2 \rightarrow a_{11} = mR^2$$

$$\Phi = \frac{1}{2}\beta(V_A\cos\alpha)^2 = \frac{1}{2}\,\frac{4}{5}\beta R^2\dot{\varphi}^2 \rightarrow b_{11} = \frac{4}{5}\beta R^2$$

$$\cos\alpha = \frac{2R}{\sqrt{(2R)^2 + R^2}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$V_A = R\dot{\varphi}$$

$$\Delta = R\varphi\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}R\varphi$$

$$E_p = \frac{1}{2}c\Delta^2 = \frac{1}{2}\,\frac{4}{5}cR^2\varphi^2 \Rightarrow c_{11} = \frac{4}{5}cR^2$$

$$\ddot{\varphi} + 2n\dot{\varphi} + \omega^2\varphi = 0;\quad n = \frac{2\beta}{5m},\ \omega^2 = \frac{4c}{5m}$$

$n = 6\ s^{-1}$; $\omega = 10\ s^{-1}$ $\Rightarrow n < \omega$ - slučaj malog prigušenja

$$p = \sqrt{\omega^2 - n^2} = 8\ s^{-1}$$

$$\varphi = e^{-nt}\left(\varphi_0\cos pt + \frac{\cancel{\dot{\varphi}_0} + n\varphi_0}{p}\sin pt\right)$$

$$\boxed{\varphi = e^{-6t}\left[0{,}08\cos 8t + 0{,}06\sin 8t\right]}$$