3. Prinudne oscilacije

Pretpostavimo da na materijalni sistem pored konzervativnih sila $\vec{F}_\nu^{(k)}$ i sila otpora $\vec{F}_\nu^{(d)} = -\beta_\nu \vec{v}_\nu$ djeluju i tzv. prinudne (poremećajne) sile $\vec{F}_\nu^* = \vec{F}_\nu^*(t)$, koje se u toku vremena mijenjaju po poznatom zakonu. Diferencijalne jednačine malih kretanja u okolini položaja $q=0$, koji predstavlja stabilni ravnotežni položaj sistema kada se on nalazi pod dejstvom samo konzervativnih sila, biće

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}} + \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}} + \frac{\partial E_p}{\partial q} = Q^*(t) \qquad (1)$$

gdje su: $E_k \approx \frac{1}{2} a_{11} \dot{q}^2$, $\Phi = \frac{1}{2} b_{11} \dot{q}^2$, $E_p = \frac{1}{2} c_{11} q^2$ i $Q^*(t) \approx \sum_{\nu=1}^{N} \vec{F}_\nu^*(t) \left(\frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q}\right)_{q=0}$ – generalisana prinudna sila.

$$(1) \rightarrow a_{11}\ddot{q} + b_{11}\dot{q} + c_{11} q = Q^*(t) \qquad (2)$$
– dif. jed. prinudnih prigušenih oscilacija

Zakon generalisane prinudne sile $Q^*(t)$ može biti periodičan ili neperiodičan.

3.1. Prosta neprigušena prinudna oscilacija

$b_{11} = 0$ (zanemareno prigušenje), $Q^* = Q_0 \sin \Omega t$, $Q_0 = \text{const}$ – amplituda prinudne sile, Ω – const – kružna frekvencija prinudne sile

$$(3.2) \rightarrow \ddot{q} + \omega^2 q = h \sin \Omega t, \quad \omega^2 = \frac{c_{11}}{a_{11}}, \; h = \frac{Q_0}{a_{11}} \qquad (1)$$

Opšte rješenje jed. (1), koja predstavlja diferencijalnu jednačinu prostih neprigušenih prinudnih oscilacija, je

$$q = q_h + q_p \qquad (2)$$

gdje je

$$q_h = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t \qquad (3)$$

opšte rješenje homogene jednačine $\ddot{q} + \omega^2 q = 0$, a q_p partikularno rješenje jednačine (1). Partikularno rješenje se traži u obliku

$$q_p = C \sin \Omega t \qquad (4)$$

gdje se konstanta C bira tako da funkcija (4) zadovoljava jed. (1).

$$(4) \text{ u } (1) \Rightarrow C(\omega^2 - \Omega^2) \sin \Omega t = h \sin \Omega t$$

$$\Rightarrow C = \frac{h}{\omega^2 - \Omega^2}, \; \omega \neq \Omega \qquad (5)$$

$$\Rightarrow q_p = \frac{h}{\omega^2 - \Omega^2} \sin \Omega t \qquad (6)$$

$$(2) \xrightarrow{(3),(6)} q = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t + \frac{h}{\omega^2 - \Omega^2} \sin \Omega t \qquad (7)$$
– opšte rješ. jed. (1)

Iz početnih uslova: $t_0=0$, $q(t_0)=q_0$, $\dot{q}(t_0)=\dot{q}_0$, nalazi se

$$C_1=q_0,\ C_2=\frac{\dot{q}_0}{\omega}-\frac{\Omega}{\omega}\frac{h}{\omega^2-\Omega^2}$$

pa je

$$q=q_0\cos\omega t+\frac{\dot{q}_0}{\omega}\sin\omega t-\frac{\Omega}{\omega}\frac{h}{\omega^2-\Omega^2}\sin\omega t+\frac{h}{\omega^2-\Omega^2}\sin\Omega t \qquad (8)$$

jednačina kretanja sistema.

Prva dva sabirka na desnoj strani izraza (8) određuju slobodne neprigušene oscilacije, izazvane početnim uslovima, koje bi vršio sistem u odsustvu prinudne sile. Treći član u (8) je mješovitog tipa i on određuje harmonijsku oscilaciju čija je kružna frekvencija jednaka kružnoj frekvenciji slobodnih oscilacija, ali je izazvana dejstvom prinudne sile i nezavisi od početnih uslova. Četvrti član

$$q_p=\frac{h}{\omega^2-\Omega^2}\sin\Omega t \qquad (6)$$

određuje oscilacije koje su isključivo posledica dejstva prinudne sile i one se zovu <u>prinudne</u> oscilacije. Prinudna oscilacija (6) ne zavisi od početnih uslova, ima istu kružnu frekvenciju Ω kao i prinudna sila, a amplituda je

$$P=\frac{h}{|\omega^2-\Omega^2|} \qquad (9)$$

Izraz (6) se može napisati u obliku

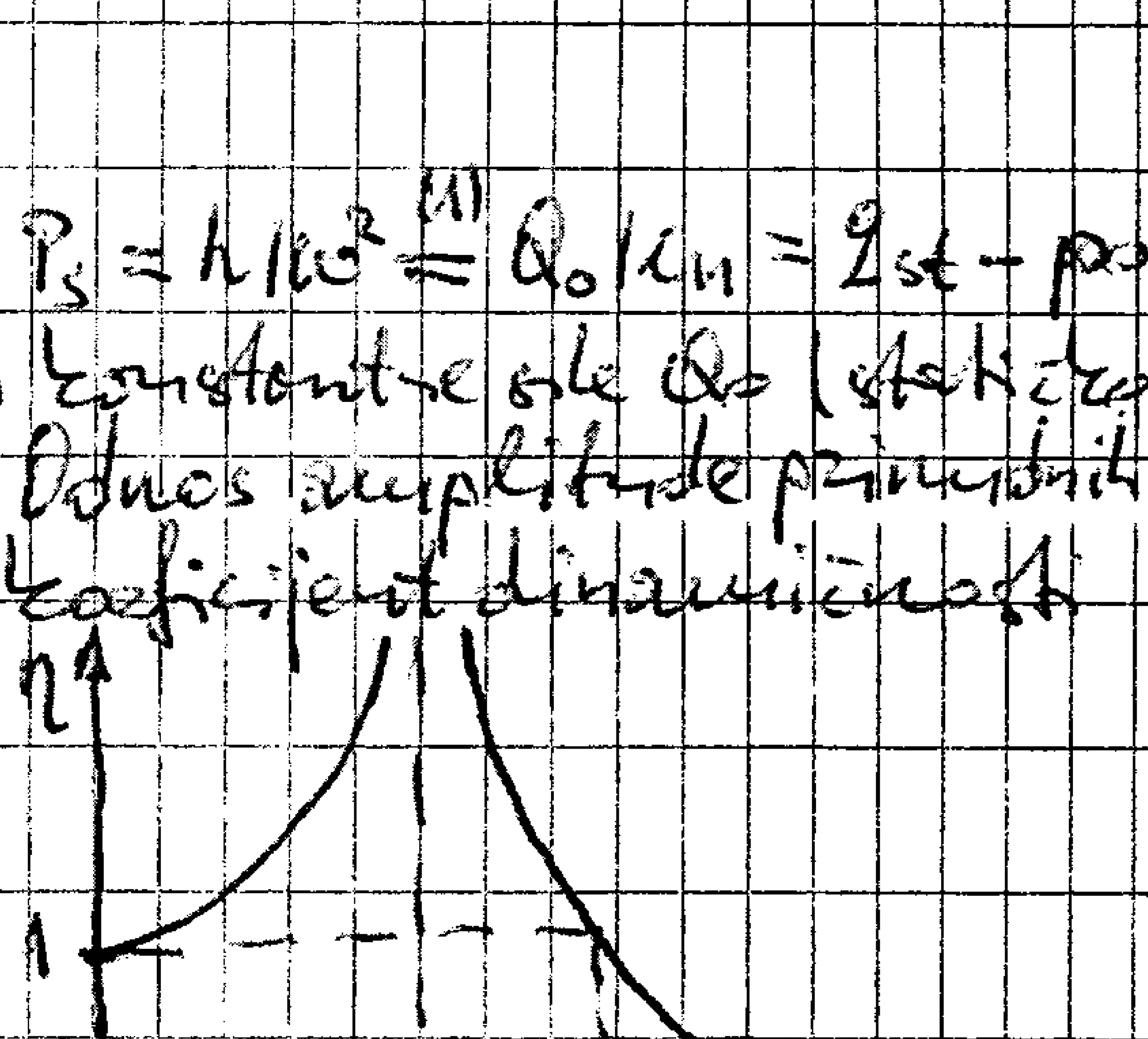
$$q_p=\begin{cases}P\sin\Omega t,\ \Omega<\omega\ (\text{pomjeranje } q_p \text{ i prinudna sila su u istoj fazi})\\ -P\sin\Omega t=P\sin(\Omega t\mp\pi),\ \Omega>\omega\ (q_p \text{ i prinudna sila su u anti fazi – razlikuju se u fazi za } \pi)\end{cases}$$

Razmotrimo tok promjene amplitude prinudnih oscilacija sa promjenom kružne frekvencije prinudne sile.

$$(9)\Rightarrow\quad P=\frac{h/\omega^2}{|1-(\Omega/\omega)^2|}=\frac{P_s}{|1-\lambda^2|}$$

gdje je $\lambda=\Omega/\omega$ koeficijent poremećaja, a $P_s=h/\omega^2\overset{(1)}{=}Q_0/c_{11}=q_{st}$ – pomjeranje zav. položaja prouzrokovano dejstvom konstantne sile Q_0 (statičko pomjeranje ili "statička amplituda"). Odnos amplitude prinudnih oscilacija i statičke amplitude naziva se koeficijent dinamičnosti ili dinamički faktor pojačavanja

$$\eta=\frac{P}{P_s}=\frac{1}{|1-\lambda^2|} \qquad (10)$$



$0<\lambda<1\rightarrow\eta>1\ (P>P_s)$

$1<\lambda\le\sqrt{2}\rightarrow\eta\geq1\ (P\geq P_s)$

$\sqrt{2}<\lambda\rightarrow\eta<1\ (P<P_s)$

Kada je $\lambda = 1$ $(\Omega = \omega)$ amplituda prinudnih oscilacija ima neograničeno veliku vrijednost. Ova pojava se zove rezonancija.

Rezonancija

Rezonancija nastaje kada je kružna frekvencija slobodnih oscilacija ω jednaka kružnoj frekvenciji prinudne sile Ω. Tada partikularno rješenje (6), koje određuje prinudne oscilacije, gubi smisao pa se mora tražiti u drugom obliku

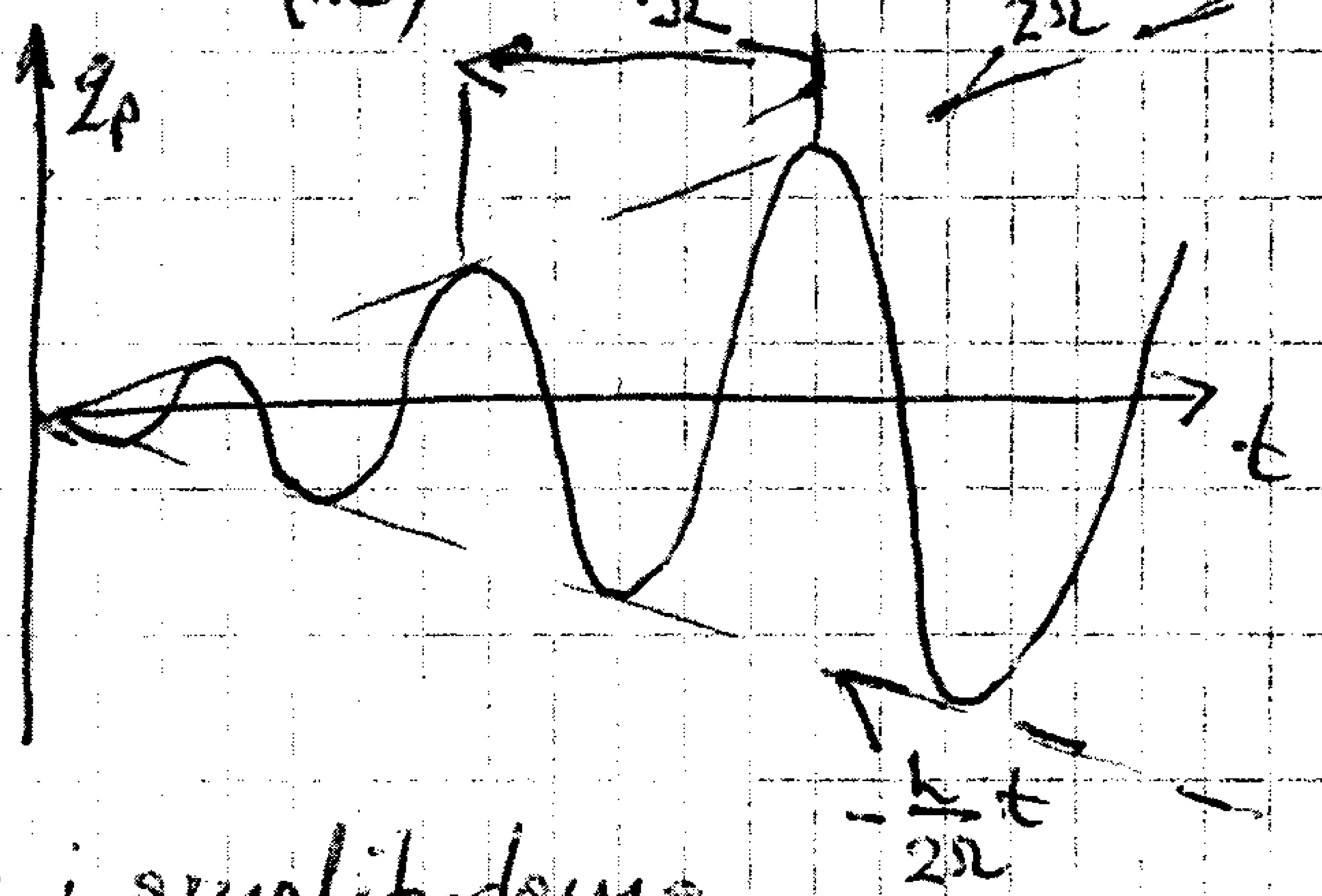
$$q_p = C t \cos \Omega t \qquad (11)$$

gdje je C konstanta koja se određuje tako da (11) zadovoljava jednačinu

$$\ddot{q} + \Omega^2 q = h \sin \Omega t \qquad (12)$$

$$(11),(12) \longrightarrow \quad C = -h/2\Omega$$

$$\longrightarrow q_p = -\frac{h}{2\Omega} t \cos \Omega t = \frac{h}{2\Omega} t \sin\left(\Omega t - \frac{\pi}{2}\right)$$



Prinudna oscilacija, u slučaju rezonancije, predstavlja kvaziperiodično oscilatorno kretanje sa uslovnim periodom jednakim $T_\Omega = 2\pi/\Omega$, fazom koja zaostaje za fazom poremećajne sile za $\pi/2$ i amplitudama koje u toku vremena rastu po linearnom zakonu.

3.2. Prosta prinudna prigušena oscilacija

$Q^*(t) = Q_0 \sin \Omega t$

$$(3.2) \rightarrow \quad \ddot{q} + 2n\dot{q} + \omega^2 q = h \sin \Omega t, \quad n = \frac{b_{11}}{2a_{11}}, \ \omega^2 = \frac{c_{11}}{a_{11}}, \ h = \frac{Q_0}{a_{11}} \quad (1)$$

$$q = q_h + q_p$$

$$q_h = \begin{cases} R e^{-nt} \sin(\sqrt{\omega^2 - n^2}\, t + \alpha), & n < \omega \\ e^{-nt}(C_1 e^{\sqrt{n^2-\omega^2}\, t} + C_2 e^{-\sqrt{n^2-\omega^2}\, t}), & n > \omega \\ (C_1 t + C_2) e^{-nt}, & n = \omega \end{cases}$$

(2) – opšte rješenje homogene jednačine

Partikularno rješenje jednačine (1) traži se u obliku

$$q_p = P \sin(\Omega t - \gamma) \quad (3)$$

$$(3) \text{ u } (1) \rightarrow P(\omega^2 - \Omega^2)\sin(\Omega t - \gamma) + 2n\Omega P \cos(\Omega t - \gamma) = h \sin(\Omega t - \gamma + \gamma)$$
$$= h\cos\gamma \sin(\Omega t - \gamma) + h \sin\gamma \cos(\Omega t - \gamma)$$

$$\rightarrow \left.\begin{array}{l} P(\omega^2 - \Omega^2) = h\cos\gamma \\ 2n\Omega P = h \sin\gamma \end{array}\right\} \rightarrow P = \frac{h}{\sqrt{(\omega^2 - \Omega^2)^2 + 4n^2\Omega^2}}, \quad \operatorname{tg}\gamma = \frac{2n\Omega}{\omega^2 - \Omega^2} \quad (4)$$

Dakle, partikularno rješenje, koje, inače, određuje prinudnu oscilaciju je

$$q_p = \frac{h}{\sqrt{(\omega^2 - \Omega^2)^2 + 4n^2\Omega^2}} \sin(\Omega t - \gamma) \quad (5)$$

gdje je γ određeno formulom (4).

Kretanje koje odgovara opštem rješenju q_h odgovarajuće homogene dif. jednačine, kao što je pokazano u odjeljku 2, praktično brzo iščezava tako da poslije određenog vremenskog intervala t_u (vrijeme ustaljivanja) može se smatrati da je $q_h(t) \approx 0$, odnosno da se kretanje svodi samo na prinudnu oscilaciju (5) ($q(t) \approx q_p(t)$, $t > t_u$).

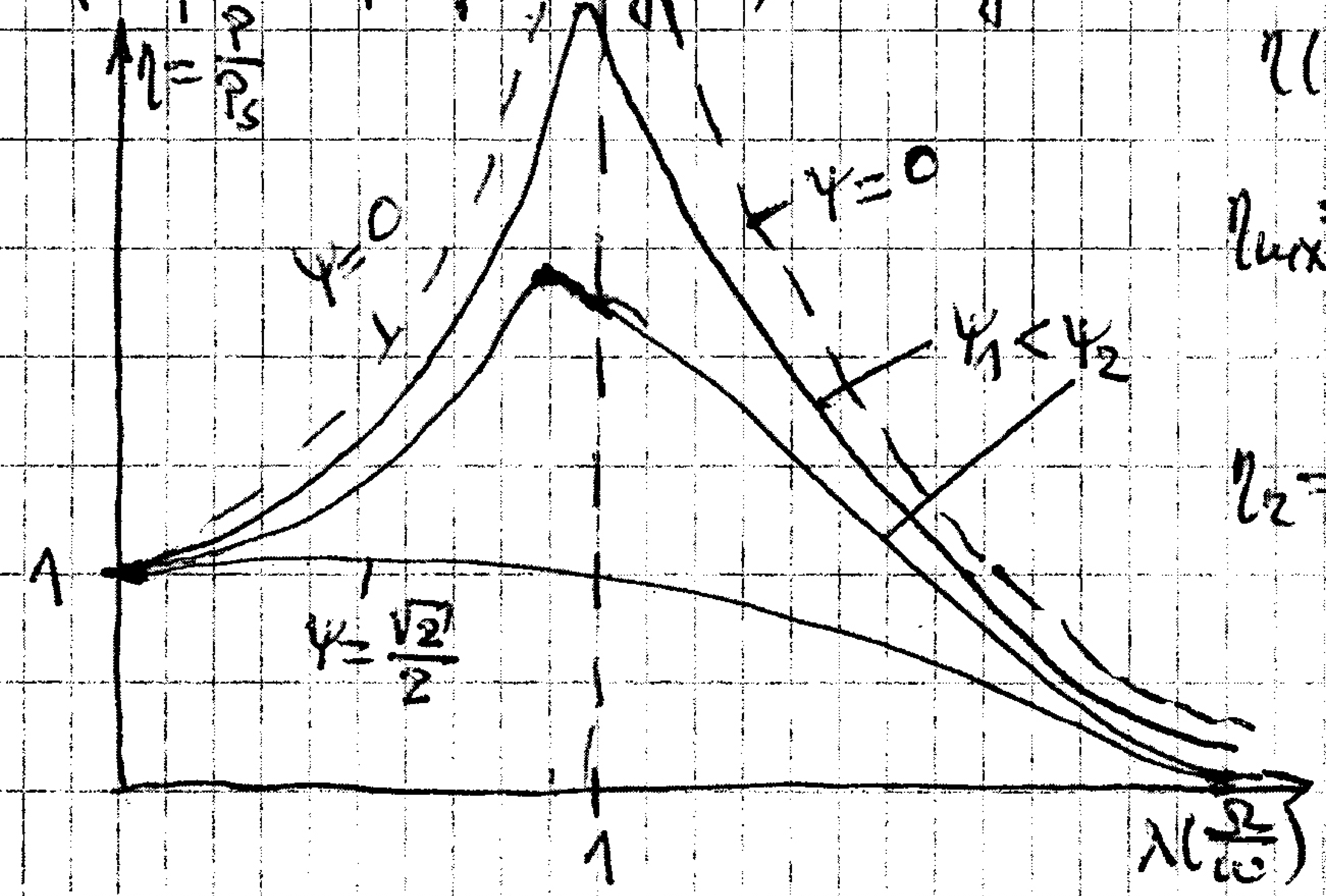
Amplituda prinudnih oscilacija može se napisati u obliku

$$P = \frac{h}{\omega^2\sqrt{(1-\lambda^2)^2 + 4\lambda^2\psi^2}}, \quad \lambda = \frac{\Omega}{\omega}, \quad \psi = \frac{n}{\omega}$$

odakle, imajući u vidu da je $\frac{h}{\omega^2} = \frac{Q_0}{c_{11}} = P_s = q_{st}$ – statička amplituda, nalazimo dinamički faktor pojačavanja

$$\eta = \frac{P}{P_s} = \frac{1}{\sqrt{(1-\lambda^2)^2 + 4\lambda^2\psi^2}}$$

Zavisnost koeficijenta η od koeficijenta poremećaja λ, za neke vrijednosti koeficijenta prigušenja ψ, data je na slici



$$\eta(\lambda=0)=1$$

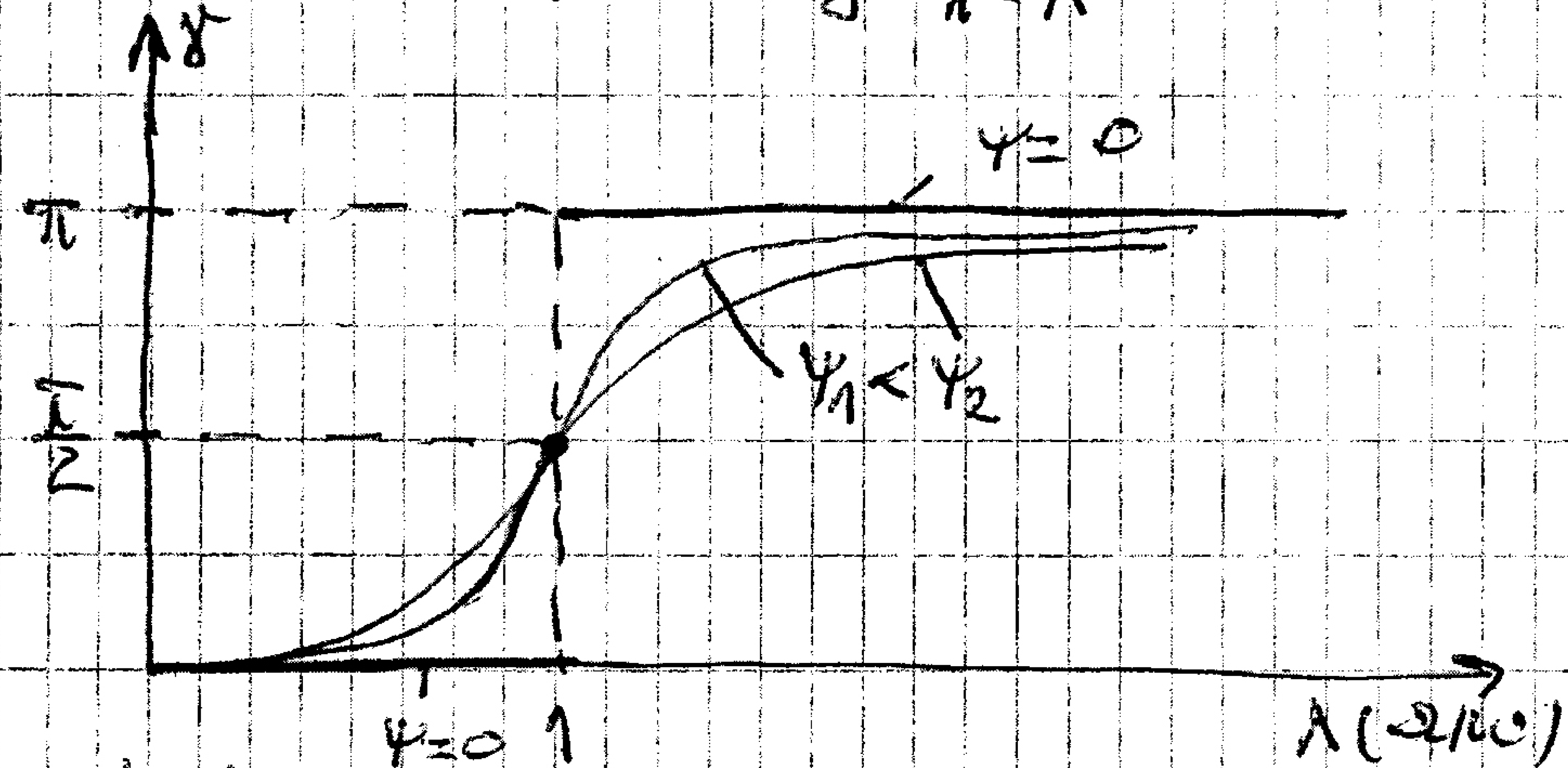
$$\eta_{max} = \begin{cases} \eta(\lambda=\sqrt{1-2\psi^2}) = \dfrac{1}{2\psi\sqrt{1-\psi^2}}, & \psi<\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \eta(\lambda=0)=1, & \psi \geq \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

$$\eta_r = \eta(\lambda=1) = \frac{1}{2\psi}, \quad \lim_{\lambda\to\infty}\eta = 0$$

$$P = \eta P_s$$

Također, ugao fazne razlike γ prinudnih oscilacija u odnosu na prinudnu silu, određen izrazom (4), možemo napisati u funkciji koeficijenata λ i ψ.

$$\gamma = \operatorname{arctg}\frac{2\lambda\psi}{1-\lambda^2}$$



$$\gamma(\lambda=0)=0$$

$$\gamma(\lambda=1)=\frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{\lambda\to\infty}\gamma = \pi$$

Iz ovih dijagrama, ili odgovarajućih izraza, može se zaključiti:

1) Ako je λ vrlo malo ($\lambda \ll 1$, $\Omega \ll \omega$), onda je $P \approx P_s$ i $\gamma \approx 0$ — oscilacije se vrše sa amplitudom koja je jednaka statičkoj i sa faznom razlikom $\gamma \approx 0$.

2) Ako je $\lambda \gg 1$ ($\Omega \gg \omega$), onda je $P \approx 0$, tj. prinudne oscilacije u ovom slučaju praktično ne postoje.

3) Kada je ψ malo i kada je λ blizu jedinice, amplitude imaju velike vrijednosti. U slučaju rezonancije ($\lambda=1$) je $P_r = P_s/2\psi$, $\gamma = \frac{\pi}{2}$, tj

amplituda prinudne oscilacije je konačna, ali pri malom otporu veoma velika, a fazna razlika je $\gamma = \pi/2$.

Iz prethodnih razmatranja proističe da prinudne oscilacije posjeduju određena važna svojstva koja se razlikuju od sličnih karakteristika slobodnih oscilacija. Ta svojstva su:

a) Amplituda prinudnih oscilacija ne zavisi od početnih uslova.

b) Prinudne oscilacije se ne amortizuju (prigušuju) tokom vremena pri postojanju otpora.

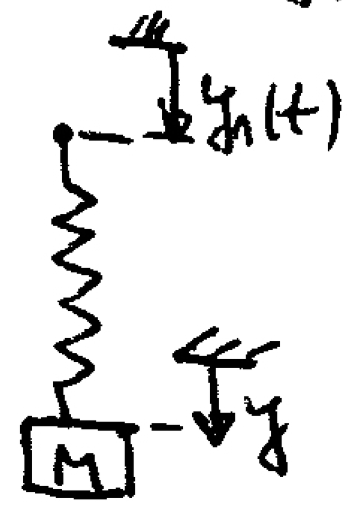
c) Frekvencija prinudnih oscilacija jednaka je frekvenciji prinudne sile.

d) Pri maloj prinudnoj sili (Q_0 - malo) mogu da nastanu velike prinudne oscilacije, ako je otpor mali a frekvencija prinudne sile bliska frekvenciji slobodnih oscilacija.

e) Pri velikoj prinudnoj sili, prinudne oscilacije mogu da budu vrlo male (ako je Ω mnogo veće od ω).

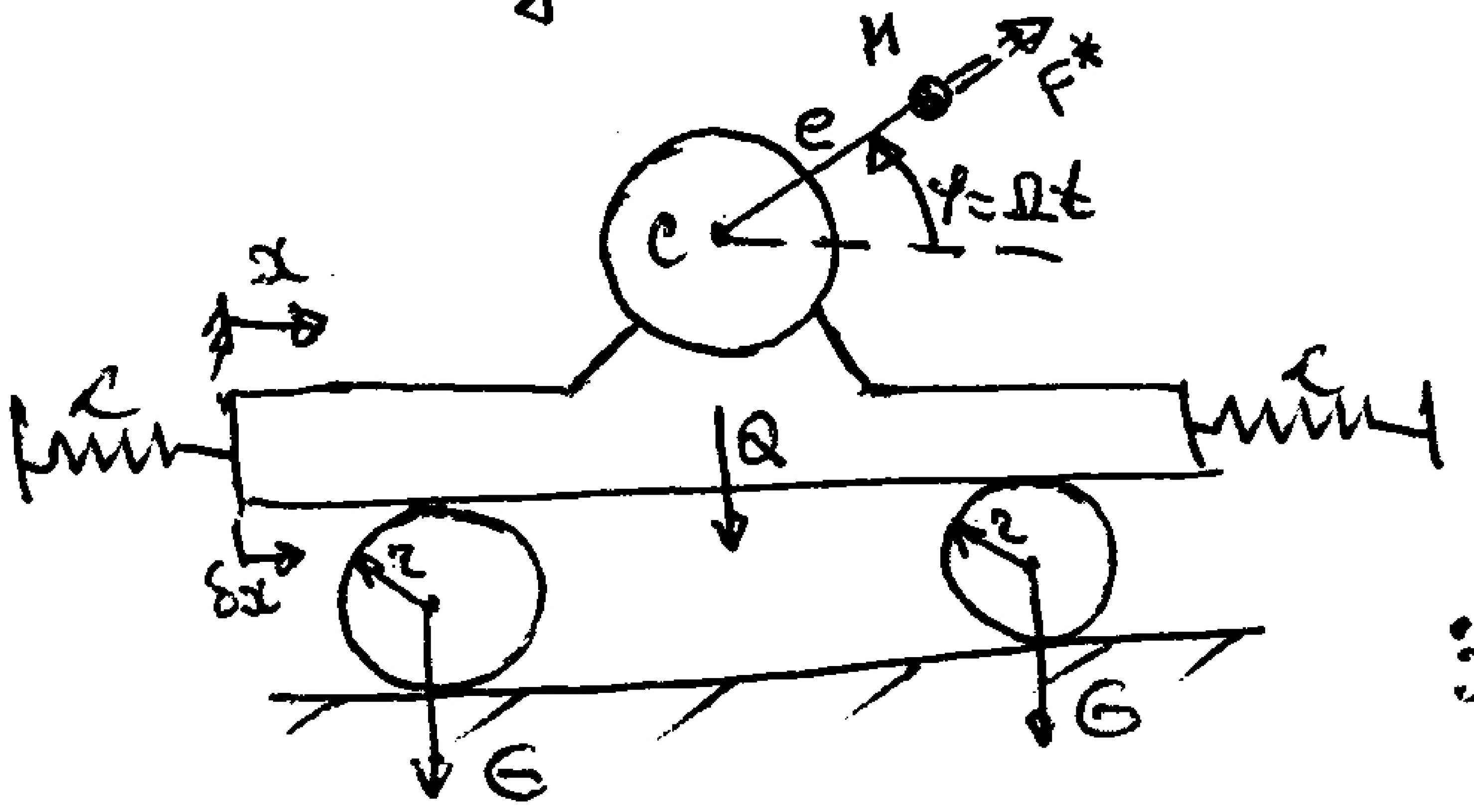
— Prinudne oscilacije —

1. Teret M učvršćen je za donji kraj elastične opruge čiji gornji kraj izvodi vertikalne oscilacije po zakonu $y_1 = b\sin(\Omega t)$. Odrediti prinudne oscilacije tereta M, ako je masa tereta $m = 400\,g$, $b = 2\,cm$, $\Omega = 7\,s^{-1}$, a sila od 39,2 N rasteže oprugu za 1 cm.



R: $y = 2\sin 7t$ [cm]

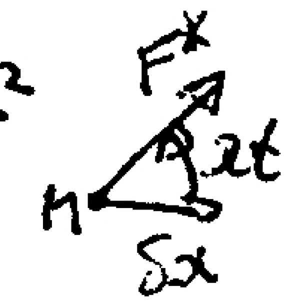
2. Na dasku AB, za koju su vezane dvije opruge istih krutosti c, postavljen je elektromotor sa ekscentrom dužine e na čijem je kraju učvršćena kuglica mase m, koja rotira konstantnom ugaonom brzinom Ω. Daska je postavljena na dva šuplja cilindra tankih zidova koji leže na horizontalnoj ravni. Težina daske sa elektromotorom (bez ekscentrično postavljene mase) je Q, a svakog cilindra G. Smatrajući da nema klizanja između daske i cilindara, a također između cilindara i podloge, naći amplitudu horizontalnih prinudnih oscilacija sistema. Težinu ekscentrične poluge zanemariti.



R: $a_{M rel.} = e\Omega^2$, $F^* = F^{in}_{M rel} = me\Omega^2$

$\delta A^* = F^*\cos\Omega t\,\delta x = Q^*_x\,\delta x$

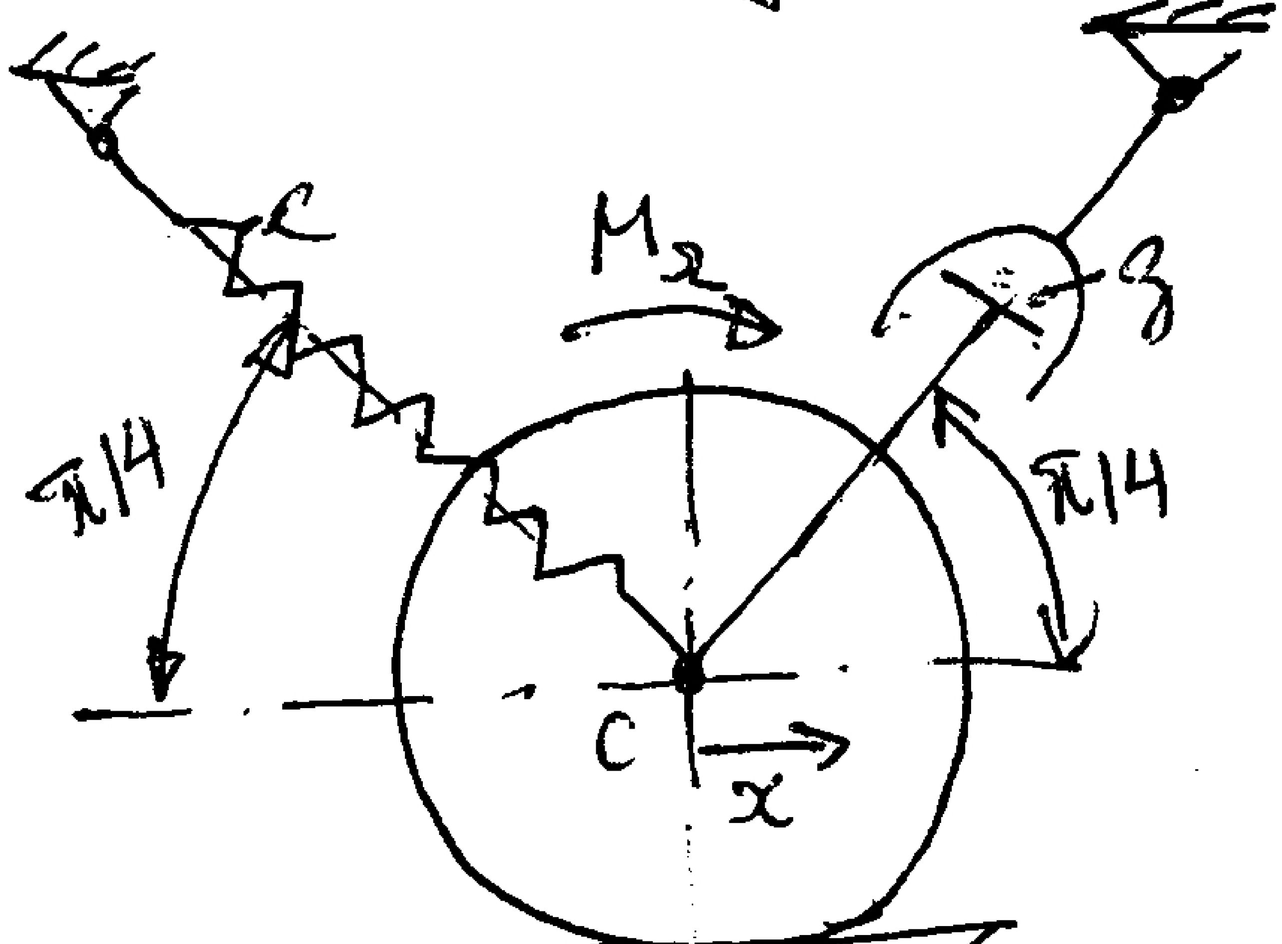
$\rightarrow Q^*_x = me\Omega^2\cos\Omega t$



$a_{11} = \dfrac{Q+G+mg}{g}$, $c_{11} = 2c$

$\ddot{x} + \omega^2 x = h\cos\Omega t$, $\omega^2 = \dfrac{2cg}{Q+G+mg}$, $h = \dfrac{mge\Omega^2}{Q+G+mg}$, $P = \dfrac{h}{|\omega^2 - \Omega^2|}$

3. Za središte točka (homogeni disk), mase m i poluprečnika R, vezana je opruga krutosti c i prigušnica sa koeficijentom prigušenja β, kao što je na slici prikazano. Ako na točak djeluje spreg sila momenta $M_\Omega = M_0\sin\Omega t$ dolazi do njegovog prinudnog oscilovanja pri čemu se točak kotrlja bez klizanja. Odrediti zakon prinudnog oscilovanja središta diska.



$\ddot{x} + 2n\dot{x} + \omega^2 x = h\sin\Omega t$

$n = \dfrac{\beta}{6m}$, $\omega^2 = \dfrac{c}{3m}$, $h = \dfrac{2M_0}{3mR}$

$x_{(p)} = 1,21\sin(20t - 69,9°)$ [cm]

$c = 200\,N/cm$; $m = 10\,kg$, $R = 10\,cm$;

$M_0 = 10\,Nm$; $\Omega = 20\,s^{-1}$, $\beta = 720\,Ns/m$