1.13

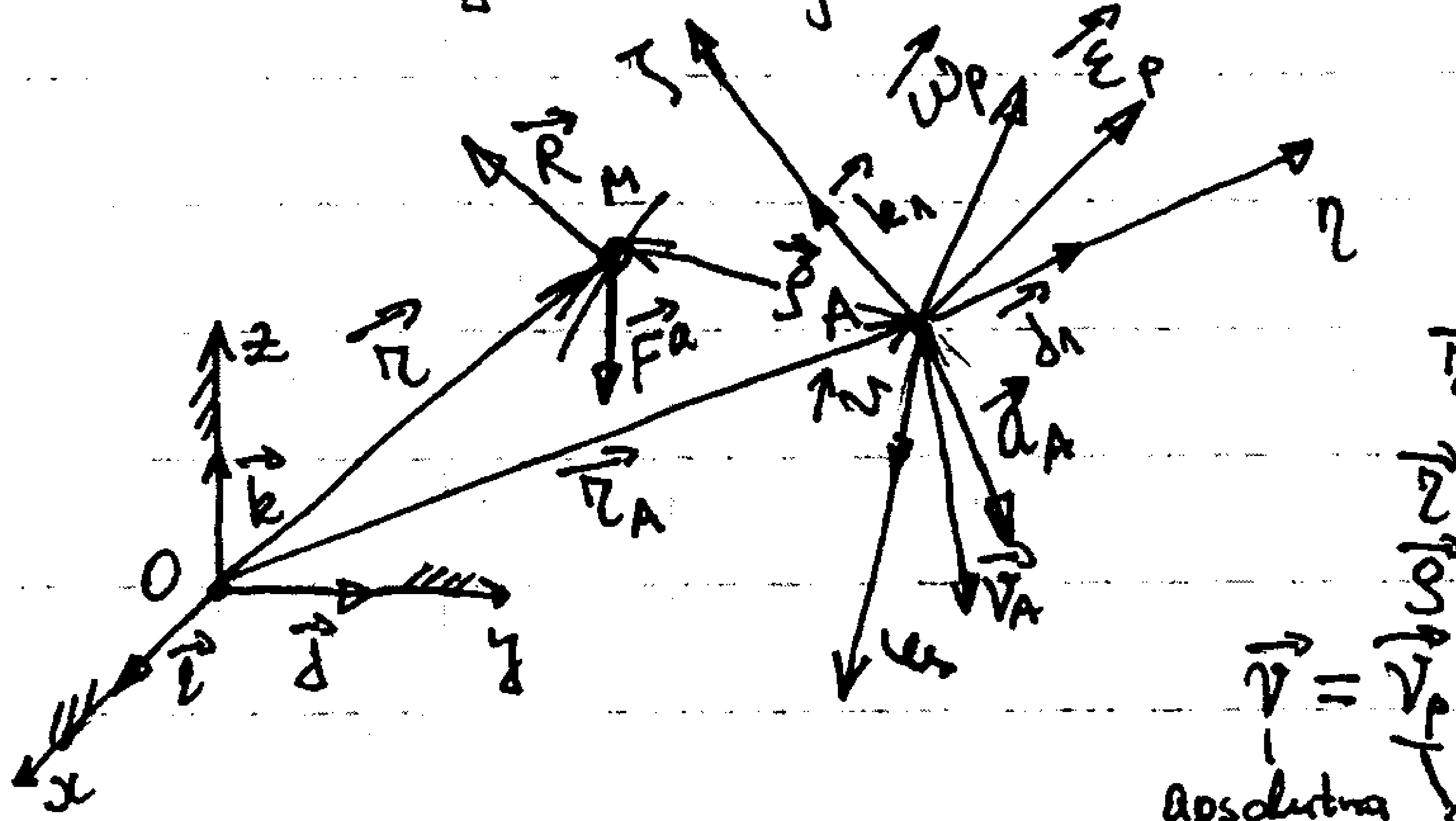
Dinamika relativnog kretanja materijalne tačke

Osnovna jednačina dinamike relativnog kretanja

U dosadašnjim razmatranjima proučavano je kretanje materijalne tačke u odnosu na nepokretni (inercijalni) koordinatni sistem. Međutim, mnoštvo je kretanja koja se mogu posmatrati u odnosu na pokretne koordinatne sisteme koji se ne kreću translatorno konstantnom brzinom u odnosu na nepokretni referentni sistem. Takvi koordinatni sistemi nazivaju se neinercijalni i u odnosu na njih ne važi drugi Njutnov zakon (prvi i), kao ni opšti zakoni izvedeni iz njega.

U kinematici složenog kretanja tačke korišćeni su pojmovi:

- apsolutno kretanje – kretanje u odnosu na nepokretni koordinatni sistem $Oxyz$;
- prenosno kretanje – kretanje pokretnog koordinatnog sistema $A\xi\eta\zeta$ (ili, što je isto, tijela-nosača čvrsto vezanog sa njim) u odnosu na nepokretni sistem;
- relativno kretanje – kretanje tačke u odnosu na pokretni koor. sistem $A\xi\eta\zeta$.



$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

$\vec{\rho} = \xi\vec{i}_1 + \eta\vec{j}_1 + \zeta\vec{k}_1$

$\vec{r} = \vec{r}_A + \vec{\rho}$

$\vec{r} = \vec{r}(t)$ – jed. apsolutnog kretanja

$\vec{\rho} = \vec{\rho}(t)$ – jed. relativnog –״–

$\vec{v} = \vec{v}_p + \vec{v}_r$

apsolutna, prenosna, relativna brzina tačke

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k}, \quad \vec{v}_p = \vec{v}_A + \vec{\omega}_p \times \vec{\rho}, \quad \vec{v}_r = \left(\frac{d\vec{\rho}}{dt}\right)_r = \dot{\xi}\vec{i}_1 + \dot{\eta}\vec{j}_1 + \dot{\zeta}\vec{k}_1$$

$$\vec{a} = \vec{a}_r + \vec{a}_p + \vec{a}_c \qquad (1)$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k}$$ – apsolutno ubrzanje tačke

$$\vec{a}_r = \left(\frac{d^2\vec{\rho}}{dt^2}\right)_r = \ddot{\xi}\vec{i}_1 + \ddot{\eta}\vec{j}_1 + \ddot{\zeta}\vec{k}_1$$ – relativno –״–

$$\vec{a}_p = \vec{a}_A + \vec{\omega}_p \times (\vec{\omega}_p \times \vec{\rho}) + \vec{\varepsilon}_p \times \vec{\rho}$$ – prenosno ubrzanje

$$\vec{a}_c = 2\vec{\omega}_p \times \vec{v}_r$$ – Koriolisovo ubrzanje

Naš zadatak je da odredimo relativno kretanje tačke, mase m, ako je poznato prenosno kretanje, rezultanta $\vec{F}^a$ aktivnih sila i rezultanta $\vec{R}$ reakcija veza.

Prema osnovnoj jednačini dinamike, koja važi u nepokretnom koordinatnom sistemu, biće

$$m\vec{a} = \vec{F}^a + \vec{R} \qquad (2)$$

Zamjenom apsolutnog ubrzanja (1) u (2) dobijamo

$$m\vec{a}_r = \vec{F}^a + \vec{R} + (-m\vec{a}_p) + (-m\vec{a}_c)$$

Vektor

$$\vec{F}_p^{in} = -m\vec{a}_p$$

zove se prenosna inercijalna sila, a vektor

$$\vec{F}_c^{in} = -m\vec{a}_c$$

je Koriolisova inercijalna sila.

Sada je

$$m\vec{a}_r = \vec{F}^a + \vec{R} + \vec{F}_p^{in} + \vec{F}_c^{in} \qquad (3)$$

Jednačina (3) je osnovna jednačina dinamike relativnog kretanja materijalne tačke. Projiciranjem ove vektorske jednačine na ose pokretnog koordinatnog sistema dobijamo diferencijalne jednačine relativnog kretanja u skalarnom obliku

$$\left.\begin{aligned} m\ddot{\xi} &= F_\xi^a + R_\xi + F_{p\xi}^{in} + F_{c\xi}^{in} \\ m\ddot{\eta} &= F_\eta^a + R_\eta + F_{p\eta}^{in} + F_{c\eta}^{in} \\ m\ddot{\zeta} &= F_\zeta^a + R_\zeta + F_{p\zeta}^{in} + F_{c\zeta}^{in} \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

Dakle, diferencijalne jednačine relativnog kretanja pišemo u istom obliku kao i diferencijalne jednačine u odnosu na nepokretni koordinatni sistem, ali aktivnim silama i reakcijama veza treba dodati prenosnu i Koriolisovu silu inercije. Drugim riječima: u odnosu na pokretni koordinatni sistem materijalna tačka se kreće na isti način kao kada bi ose tog sistema bile nepokretne a na tačku osim stvarnih sila (aktivnih i reakcija) djeluju još i sile $\vec{F}_p^{in}$ i $\vec{F}_c^{in}$. Dodavanjem sila $\vec{F}_p^{in}$ i $\vec{F}_c^{in}$ uzima se u obzir uticaj prenosnog kretanja na relativno kretanje.

Specijalni slučajevi:

1) Prenosno kretanje je translacija ($\vec{\omega}_p = 0$)

$$\vec{F}_c^{in} = -m\vec{a}_c = -2m\vec{\omega}_p \times \vec{v}_r = 0, \quad \vec{F}_p^{in} = -m\vec{a}_p = -m\vec{a}_A$$

$$\rightarrow \quad m\vec{a}_r = \vec{F}^a + \vec{R} + \vec{F}_p^{in}$$

2) Pokretni koordinatni sistem se kreće translatorno, pravolinijski i ravnomjerno.

U ovom slučaju je $\vec{a}_c = \vec{a}_p = 0$ pa je i $\vec{F}_p^{in} = \vec{F}_c^{in} = 0$

$$\rightarrow \quad m\vec{a}_r = \vec{F}^a + \vec{R}$$

Ova jednačina se u potpunosti poklapa sa jednačinom apsolutnog kretanja (2), pa, prema tome, u pokretnom koordinatnom sistemu koji se kreće u odnosu na nepokretni koordinatni sistem, translatorno i konstantnom brzinom, osnovna jednačina dinamike (drugi Njutnov zakon) ima isti oblik kao i u nepokretnom sistemu (tj. takav koordinatni sistem je inercijalni). Sve mehaničke pojave (i zakoni) imaju isti oblik u inercijalnim koordinatnim sistemima – Galilejev princip relativnosti klasične mehanike.

3) Relativna ravnoteža.

Ako tačka miruje u odnosu na pokretni koordinatni sistem, onda je za nju $\vec{v}_r = 0$, $\vec{a}_r = 0$ pa je i $\vec{F}_c^{in} = 0$, a jednačina (3) se svodi na oblik

$$\vec{F}^a + \vec{R} + \vec{F}_p^{in} = 0 \qquad (5)$$

koji predstavlja jednačinu relativne ravnoteže tačke.

Zakon o promjeni kinetičke energije pri relativnom kretanju

Ranije formulisani opšti zakoni dinamike (zakon o promjeni količine kretanja, momenta količine kretanja i kinetičke energije) predstavljaju posledice (tj. izvode se iz) osnovne jednačine dinamike, koja održava drugi Njutnov zakon. Imajući to u vidu, kao i oblik osnovne jednačine dinamike relativnog kretanja, slijedi da se svi opšti zakoni mogu primijeniti i na relativno kretanje, ali se moraju uzeti u obzir učešće prenosne i Koriolisove inercijalne sile.

Specijalno, prilikom rješavanja zadataka često se primjenjuje zakon o promjeni kinetičke energije pri relativnom kretanju.

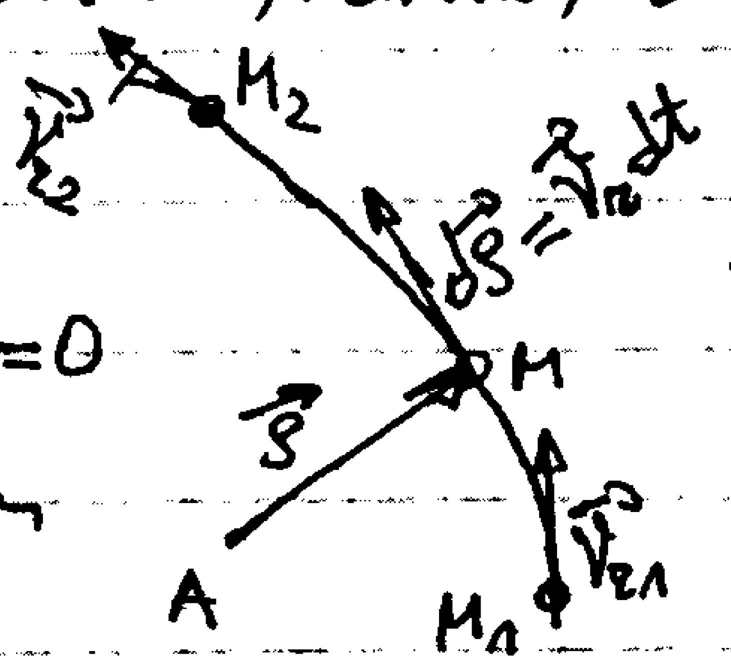
$$m\vec{a} = \vec{F}^a + \vec{R} \longrightarrow dE_k = \hat{d}A(\vec{F}^a) + \hat{d}A(\vec{R}), \quad E_k = \frac{1}{2}mv^2$$

Analogno,

$$m\vec{a}_r = \vec{F}^a + \vec{R} + \vec{F}_p^{in} + \vec{F}_c^{in} \longrightarrow dE_{kr} = \hat{d}A(\vec{F}^a) + \hat{d}A(\vec{R}) + \hat{d}A(\vec{F}_p^{in}) + \hat{d}A(\vec{F}_c^{in})$$

$$E_{kr} = \frac{1}{2}mv_r^2,$$

$$\hat{d}A(\vec{F}_c^{in}) = \vec{F}_c^{in}\cdot d\vec{s} = -2m\overbrace{(\vec{\omega}_p \times \vec{v}_r)}^{\perp \vec{v}_r}\cdot \vec{v}_r\,dt = 0$$



$\vec{F}_c^{in} \perp d\vec{s}$

→ Rad Koriolisove inercijalne sile na relativnom pomjeranju je jednak nuli

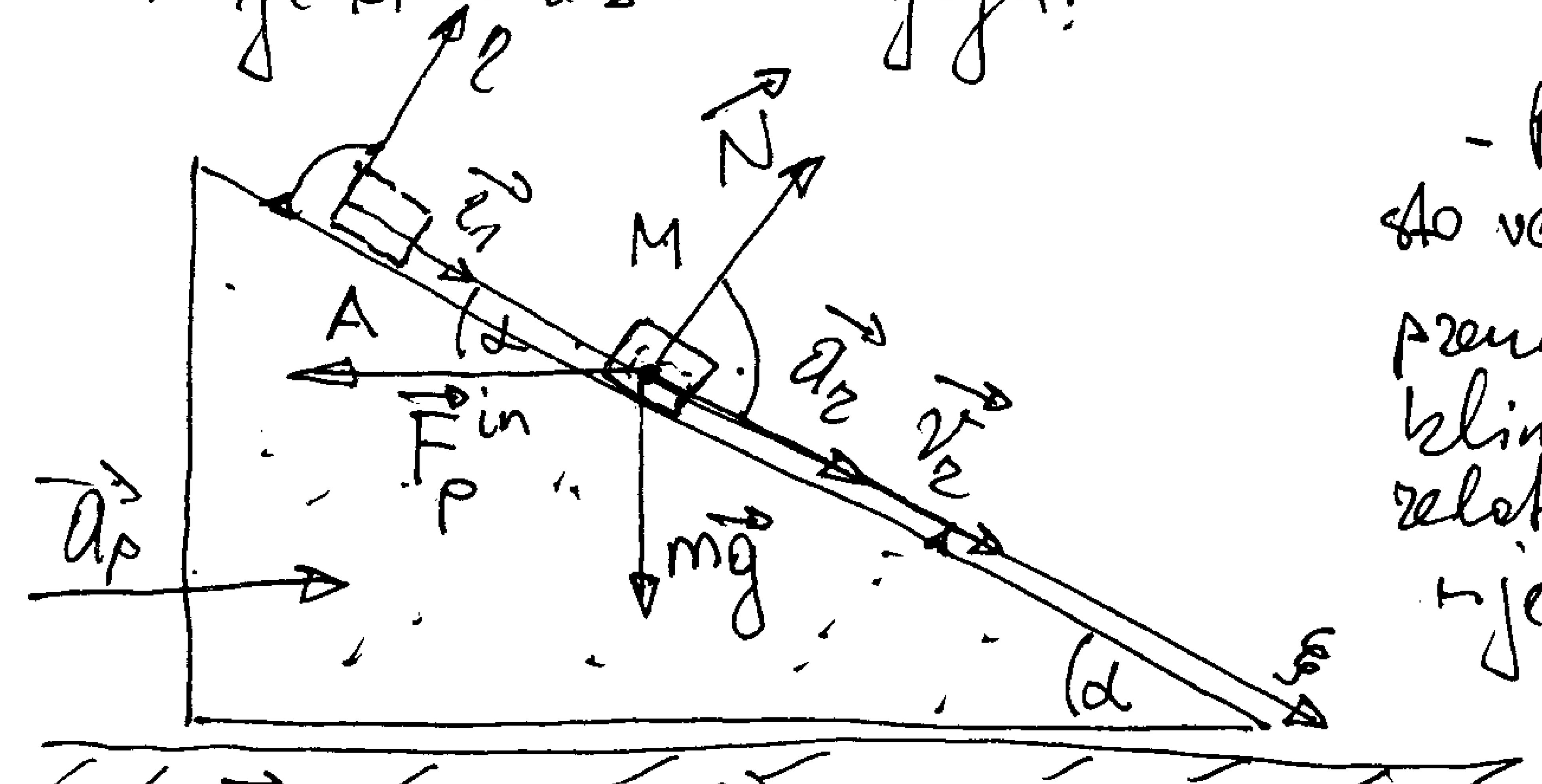
→ $dE_{kr} = \hat{d}A(\vec{F}^a) + \hat{d}A(\vec{F}_p^{in}) + \hat{d}A(\vec{R})$ – diferencijalni oblik zakona o promjeni kinetičke energije relativnog kretanja.

$\frac{1}{2}mv_{r2}^2 - \frac{1}{2}mv_{r1}^2 = A_{(1,2)}(\vec{F}^a) + A_{(1,2)}(\vec{F}_p^{in}) + A_{(1,2)}(\vec{R})$ – integralni oblik zakona

N: Rad reakcije $\vec{R}$ biće jednak nuli ako je veza idealna i nepokretna (stacionarna) u odnosu na pokretni koordinatni sistem ($\vec{R} \perp d\vec{s}$).

- Primjeri

1. Tijelo (materijalna tačka) M, mase m, nalazi se na glatkoj strmoj ravni nagiba α klina koji se kreće konstantnim ubrzanjem a_p po horizontalnoj ravni. U početnom trenutku tijelo se nalazilo u položaju A i relativna brzina mu je bila jednaka nuli. Odrediti: a) zakon kretanja tijela u odnosu na klin, kao i pritisak tijela na strmu ravan klina, b) koliko treba da bude ubrzanje a_p klina pa da tijelo miruje u odnosu na njega?



- Postavimo koordin. sistem $A\xi\eta$ čvrsto vezan za klin.
prenosno kretanje: translatorno kretanje klina ubrzanjem $\vec{a}_p = const$
relativno kretanje: pravolinijsko kretanje tijela M duž ose ξ.
Aktivnoj sili $m\vec{g}$ i reakciji $\vec{N}$ pridružimo prenosnu inercijalnu silu $\vec{F}_p^{in} = -m\vec{a}_p$ ($\vec{F}_c^{in} \equiv 0$ jer je $\vec{\omega}_p \equiv 0$) i dalje postupamo na isti način kao da su ose pokretnog sistema nepokretne.

$$m\vec{a}_r = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_p^{in}, \quad \vec{v}_r = \dot{\xi}\vec{i}_1, \; \vec{a}_r = a_r\vec{i}_1 = \ddot{\xi}\vec{i}_1, \; F_p^{in} = ma_p$$

$$\Rightarrow \quad m\ddot{\xi} = mg\sin\alpha - F_p^{in}\cos\alpha \Rightarrow \underline{\ddot{\xi} = (g\sin\alpha - a_p\cos\alpha)} \quad (1)$$

$$m\underset{\equiv 0}{\ddot{\eta}} = -mg\cos\alpha + N - F_p^{in}\sin\alpha \Rightarrow \underline{N = m(g\cos\alpha + a_p\sin\alpha)}$$ - intenzitet pritiska tereta na klin

(1) $\Rightarrow$ relativno kretanje je jednako promjenljivo ($\ddot{\xi} = const$) pravolinijsko kretanje. Početni uslovi: $t_0 = 0$, $\xi_0 = 0$, $\dot{\xi}_0 = 0$, pa je

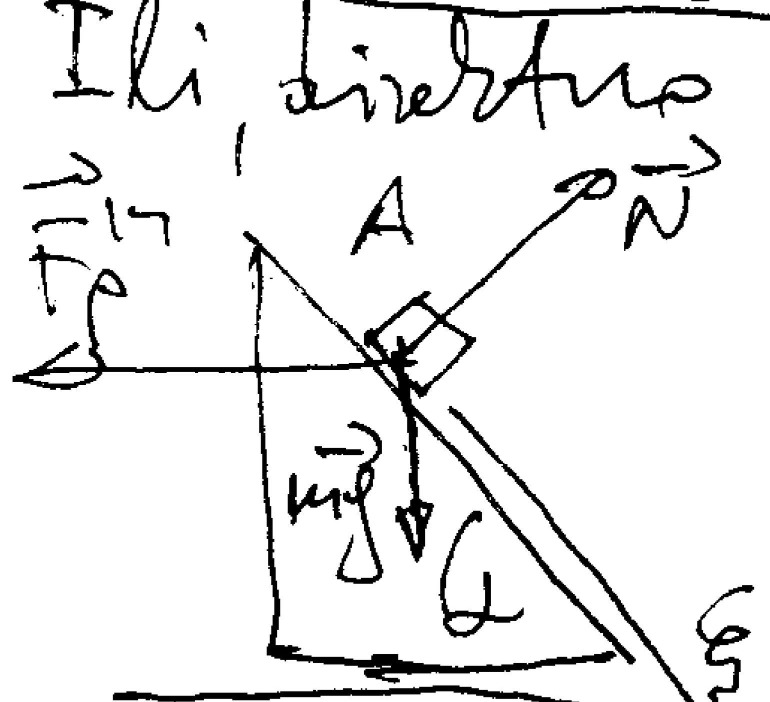
$$\boxed{\xi = (g\sin\alpha - a_p\cos\alpha)\frac{t^2}{2}}$$ - jed. relativnog kretanja

NB: Ako je $g\sin\alpha > a_p\cos\alpha$ tijelo se kreće niz strmu ravan, a ako je $g\sin\alpha < a_p\cos\alpha$ uz strmu ravan.

b) Tijelo će mirovati u odnosu na klin ako je $\xi(t) \equiv const \Rightarrow g\sin\alpha - a_p\cos\alpha = 0$

$$\rightarrow \boxed{a_p = g\,tg\alpha}$$

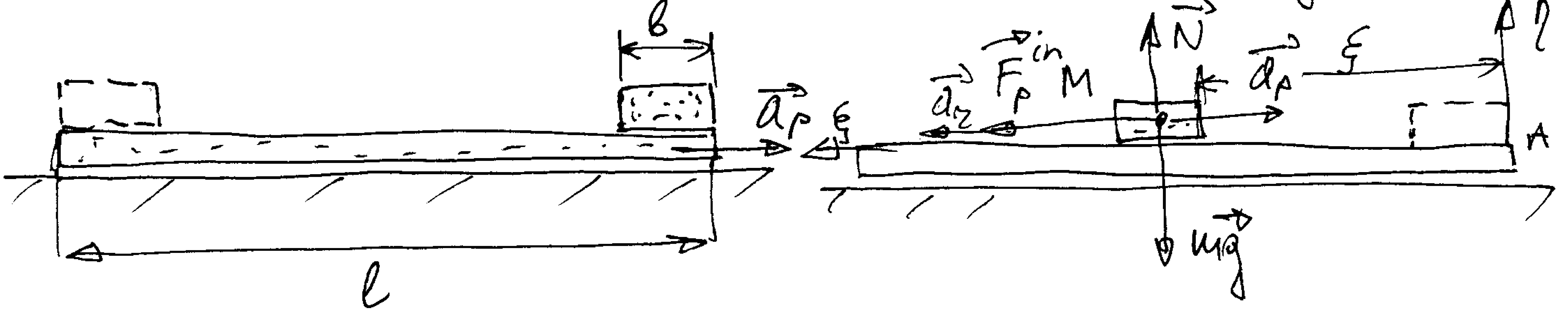
Ili, direktno jednačina relativne ravnoteže je $m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_p^{in} = 0$,



čija je projekcija na osu ξ: $mg\sin\alpha - \underbrace{F_p^{in}}_{= ma_p}\cos\alpha = 0$

$$\Rightarrow a_p = g\,tg\alpha$$

2. Ploča dužine l kreće se horizontalno konstantnim ubrzanjem $\vec{a}_p$. Na desnom kraju ploče nalazi se paket M dužine b. Ako je relativna brzina paketa M u početnom trenutku bila jednaka nuli, odrediti vrijeme potrebno da se on nađe na drugom kraju ploče.



$\xi(t) = ?\quad \xi(t_1) = l - b \Rightarrow t_1$

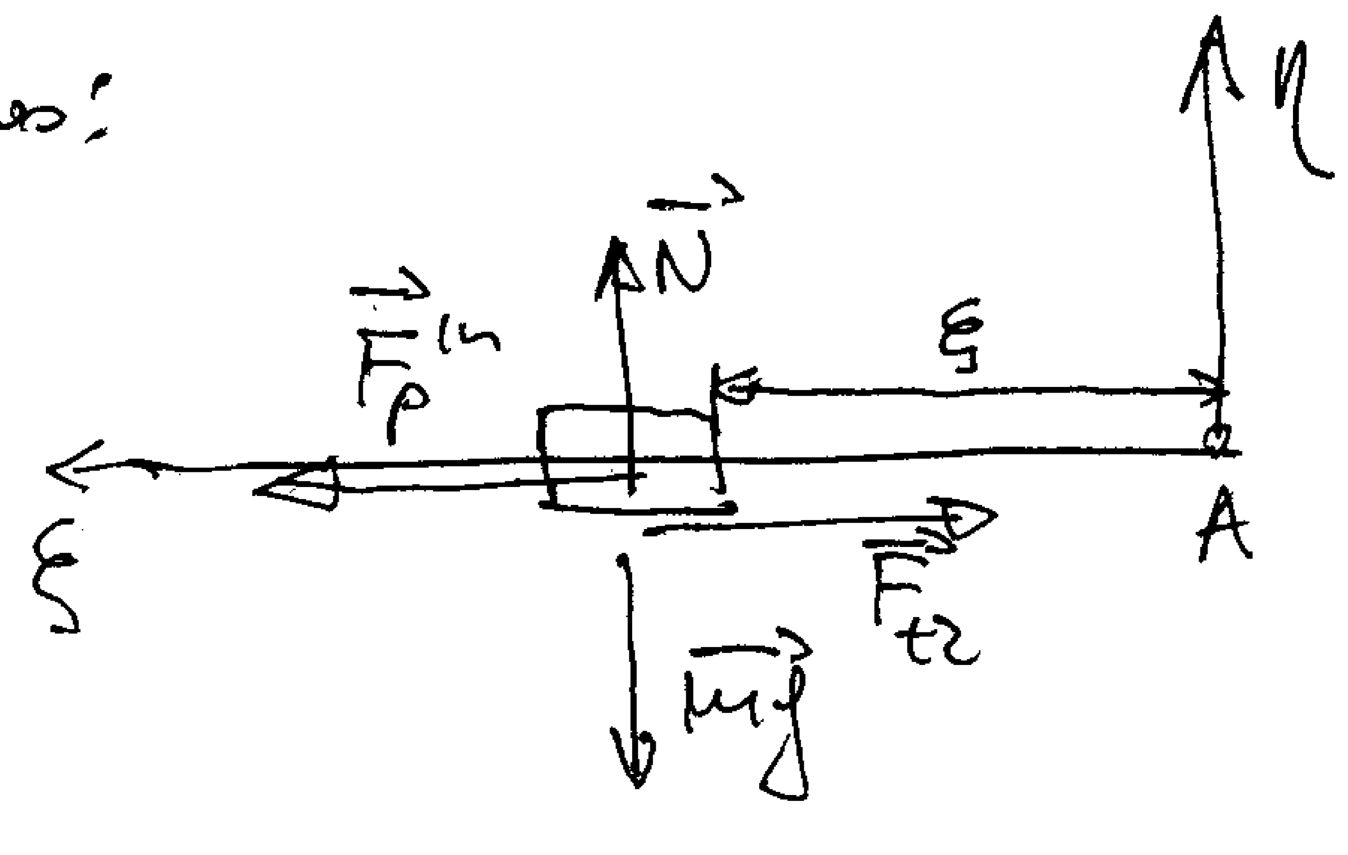
$m\vec{a}_r = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_p^{in} \longrightarrow m\ddot{\xi} = F_p^{in},\ F_p^{in} = m a_p$

$\ddot{\xi} = a_p = const,\ t_0 = 0;\ \xi_0 = 0,\ \dot{\xi}_0 = 0 \rightarrow \xi = a_p \frac{t^2}{2}$

$a_p \frac{t_1^2}{2} = l - b \rightarrow t_1 = \sqrt{\frac{2(l-b)}{a_p}}$

3. Riješiti prethodni zadatak ako je koeficijent trenja između paketa i ploče μ i ako je $a_p > \mu g$

uputstvo:



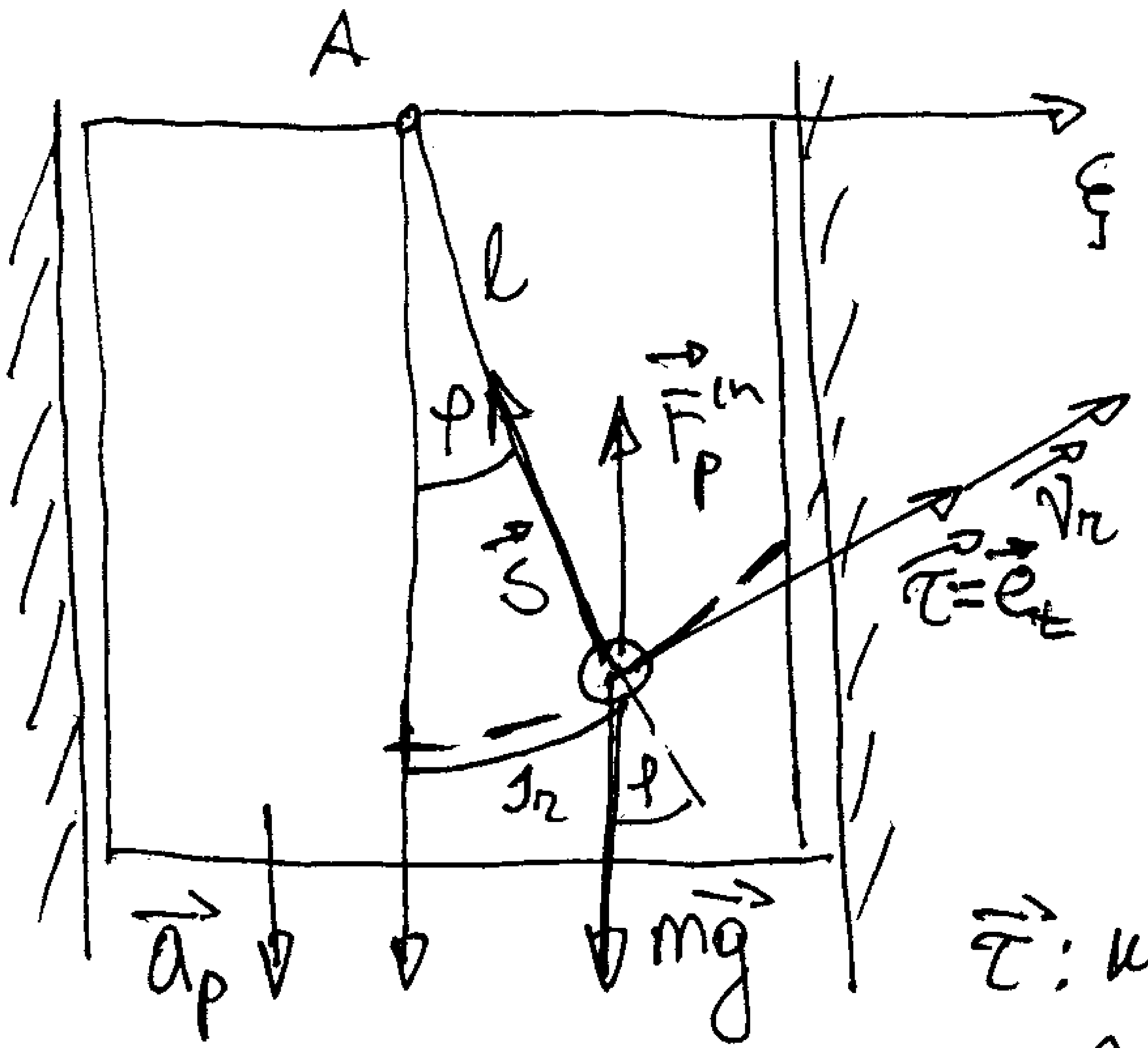
$m\vec{a}_r = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_p^{in} + \vec{F}_{tr}$

$\xi:\ m\ddot{\xi} = m a_p - F_{tr},\ F_{tr} = \mu N$

$\eta:\ 0 = -mg + N$

R: $t_1 = \sqrt{\frac{2(l-b)}{a - \mu g}}$

4. U kabini lifta koji se spušta konstantnim ubrzanjem $a_p < g$, obješeno je matematičko klatno dužine l. Odrediti period malih oscilacija klatna oko vertikalnog položaja.



- prenosno kretanje je translatorno kretanje kabine lifta ubrzanjem $\vec{a}_p$
- relativno kretanje je kretanje po kružnici poluprečnika l i centrom u tački A.

$$\vec{F}_p^{in} = -m\vec{a}_p, \quad \vec{F}_c^{in} \equiv 0$$

$$m\vec{a}_r = m\vec{g} + \vec{S} + \vec{F}_p^{in}$$

$$\vec{\tau}: \; ma_{rt} = -mg\sin\varphi + F_p^{in}\sin\varphi, \quad F_p^{in} = ma_p$$

$$a_{rt} = \frac{dv_r}{dt}, \quad v_r = \dot{s}_r, \quad s_r = l\varphi \to a_{rt} = l\ddot{\varphi}$$

$\Rightarrow \ddot{\varphi} + \frac{g-a_p}{l}\sin\varphi = 0$ – dif. jed. relativnog kretanja

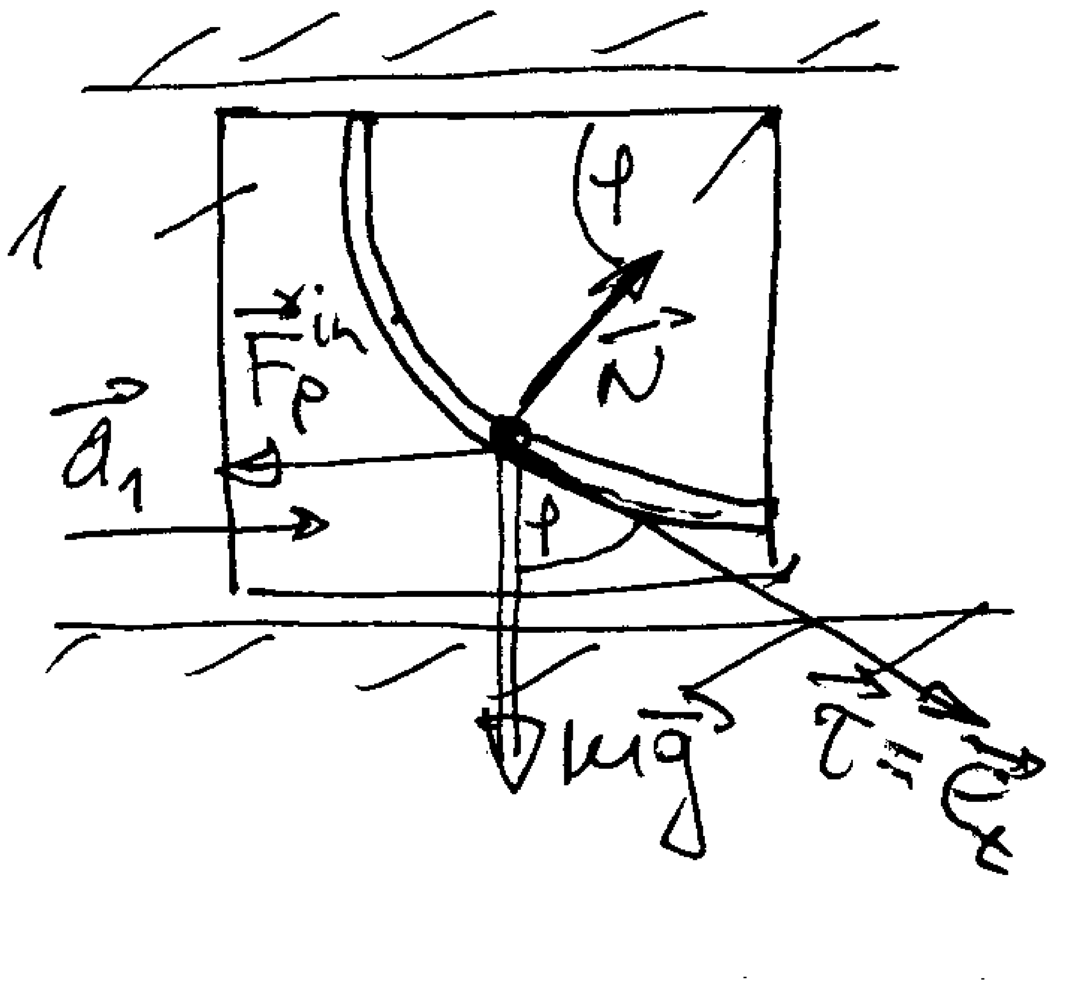
male oscilacije $\Rightarrow \sin\varphi \approx \varphi \Rightarrow \ddot{\varphi} + \underbrace{\frac{g-a_p}{l}}_{=\omega^2}\varphi = 0$ $=\omega^2$ – kvadrat kružne frekvencije malih oscilacija

$$T_\omega = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g-a_p}}$$ – period oscilovanja

5. Riješiti prethodni zadatak ako se lift podiže konstantnim ubrzanjem a_p

R: $T_\omega = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g+a_p}}$

6. U tijelu 1, koje se kreće horizontalno ubrzanjem $\vec{a}_1$, urezan je kružni žlijeb u kojem se nalazi kuglica mase m. Koliko treba da bude ubrzanje a_1 da bi kuglica bila u relativnom mirovanju u položaju ~~[illegible]~~ $\varphi = 60°$



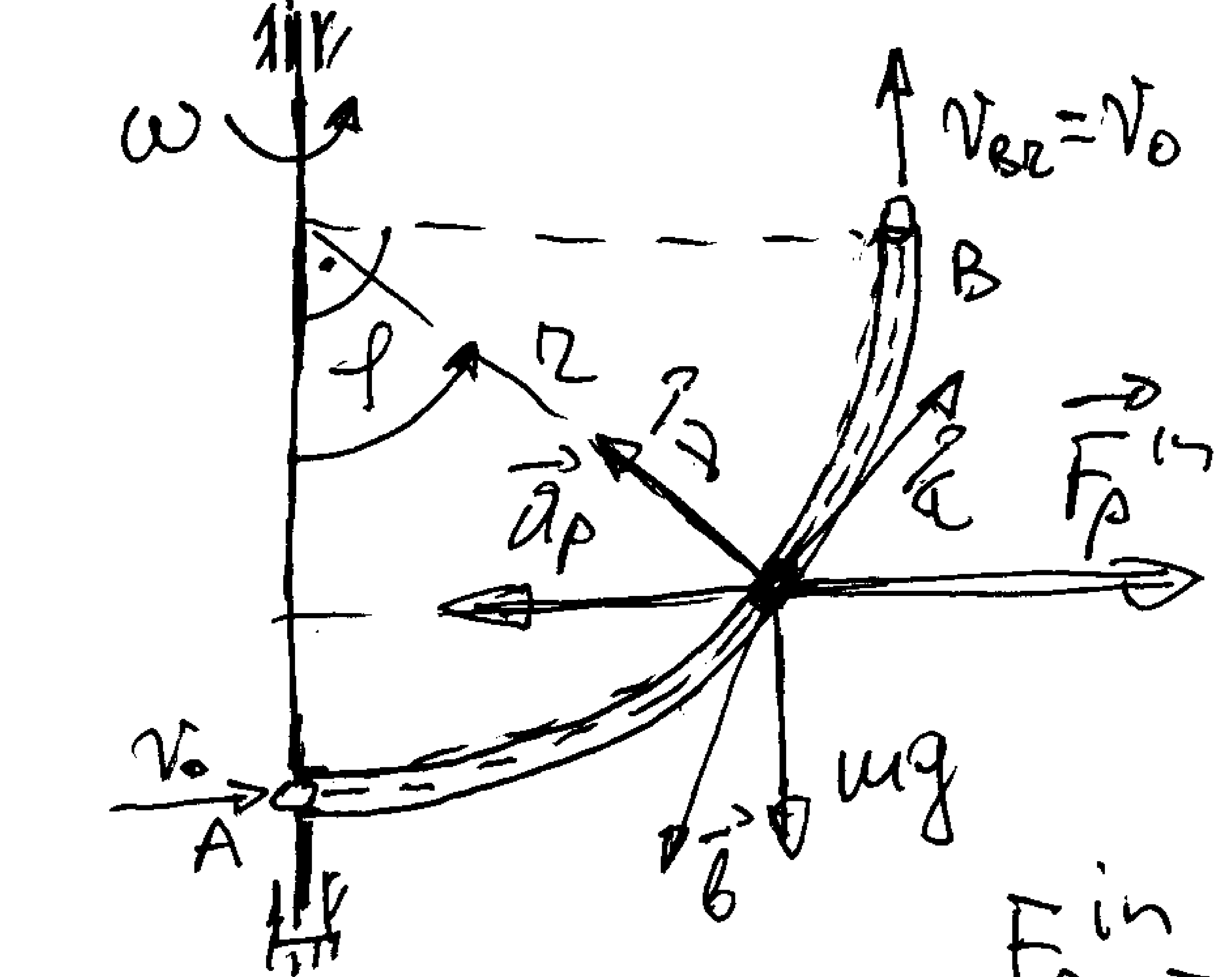
$$\vec{a}_1 = \vec{a}_p$$

$m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_p^{in} = 0$ – jed. relativne ravnoteže

$$\vec{\tau}: \; mg\sin\varphi - F_p^{in}\cos\varphi = 0, \quad F_p^{in} = ma_1$$

$$g\sin\varphi - a_1\cos\varphi = 0 \to a_1 = g\,tg\varphi =$$

7. Glatka cijev u obliku četvrtine kružnog luka poluprečnika r obrće se oko vertikalne ose konstantnom ugaonom brzinom ω. U cijev u tački A ubaci se kuglica početnom brzinom v_0. Kolika treba da bude ugaona brzina ω da bi kuglica napustila cijev relativnom brzinom koja je po intenzitetu jednaka v_0.

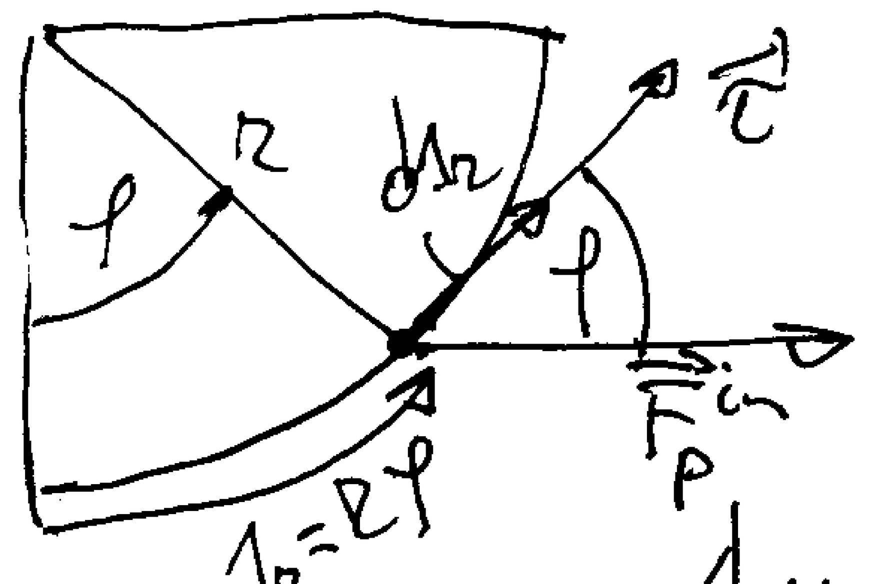


$$\frac{m v_{Br}^2}{2} - \frac{m v_{Ar}^2}{2} = A_{(A,B)}(m\vec g) + A_{(A,B)}(\vec F_p^{in})$$

$$v_{Ar} = v_{Br} = v_0$$

$$A_{(A,B)}(m\vec g) = -mgr$$

$$A_{(A,B)}(\vec F_p^{in}) = ?$$



$$F_p^{in} = m a_p, \quad a_p = r\sin\varphi\,\omega^2$$

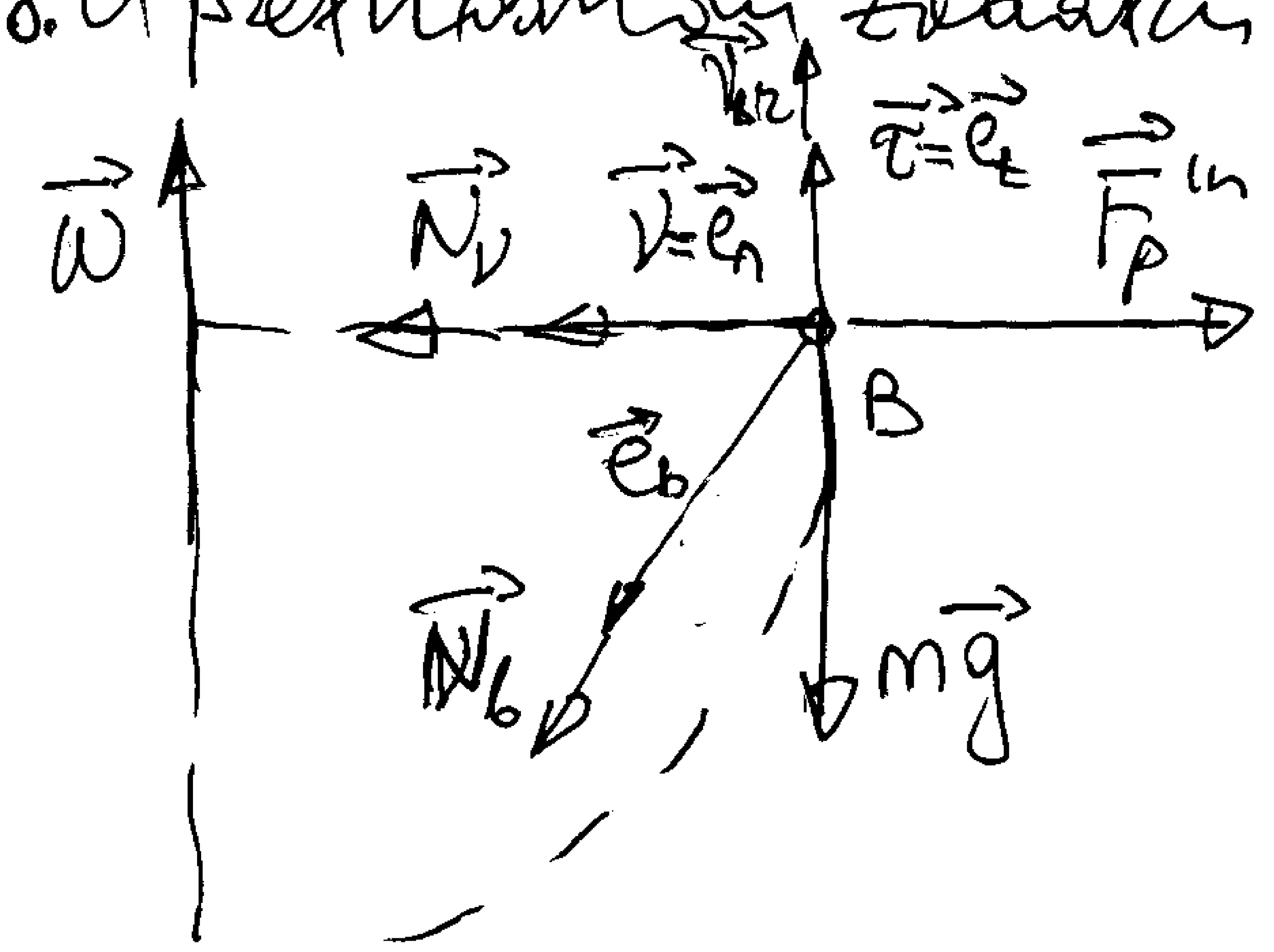
$$dA(\vec F_p^{in}) = F_p^{in}\cos\varphi\, ds_r, \quad ds_r = r\,d\varphi$$

$$dA(\vec F_p^{in}) = m r^2 \omega^2 \sin\varphi\cos\varphi\, d\varphi$$

$$A_{(A,B)}(\vec F_p^{in}) = m r^2 \omega^2 \int_0^{\pi/2} \sin\varphi \underbrace{\cos\varphi\, d\varphi}_{d(\sin\varphi)} = m r^2 \omega^2 \frac{\sin^2\varphi}{2}\Big|_0^{\pi/2} = \frac{m r^2 \omega^2}{2}$$

$$\Rightarrow \quad 0 = -mgr + \frac{m r^2 \omega^2}{2} \to \boxed{\omega = \sqrt{\frac{2g}{r}}}$$

8. U prethodnom zadatku odrediti intenzitet reakcije veze u položaju B, ako je $\omega = \sqrt{2g/r}$.



$$m\vec a_{Br} = m\vec g + \vec N_\nu + \vec N_b + \vec F_{pB}^{in} + \vec F_{cB}^{in} \quad (*)$$

$$F_{pB}^{in} = m r \omega^2 = 2mg$$

$$\vec F_{cB}^{in} = -2m\,\cancel{\vec\omega \times \vec v_{Br}} = 0$$

jer su u položaju B ova dva vektora paralelna

$$(*) \Rightarrow \quad m a_{Br\nu} = N_\nu - F_{pB}^{in} \to N_\nu = m\cdot\frac{v_{Br}^2}{r} + 2mg = \boxed{2mg + \frac{m v_0^2}{r}}$$

$$m \underbrace{\cancel{a_{Brb}}}_{0} = N_b \qquad N_b = 0$$

$$\Rightarrow \quad N = 2mg + \frac{m v_0^2}{r}$$