II

II DIO: Dinamika materijalnog sistema

1. Pojam materijalnog sistema. Klasifikacija sila.

U mehanici se pod materijalnim sistemom podrazumijeva skup materijalnih tačaka čija su kretanja međuzavisna.

mat. sistem
- diskretan – konačan broj mat. tačaka na međusobno konačnim rastojanjima
- neprekidna sredina (kontinuum) – beskonačno mnogo tačaka čija je ukupna masa konačna i neprekidno raspoređena.

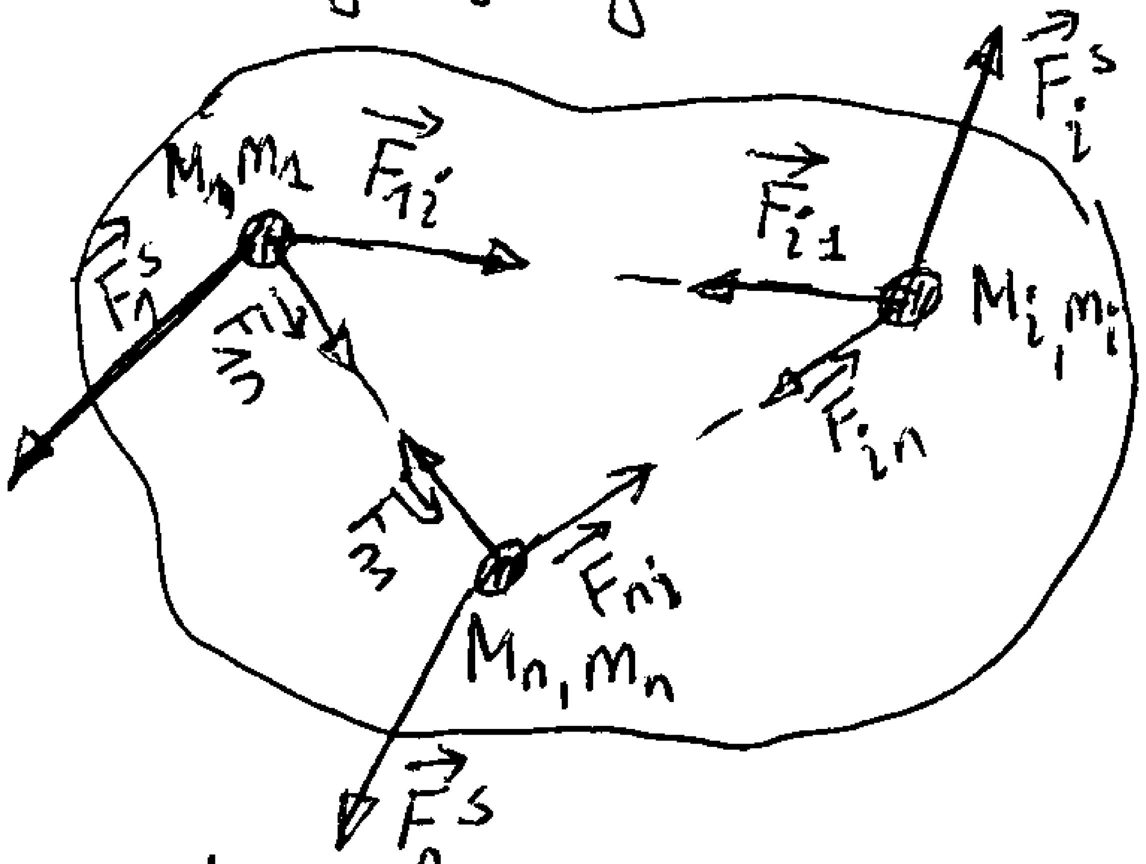
Oblast prostora ispunjena neprekidno raspoređenom masom predstavlja materijalno tijelo.

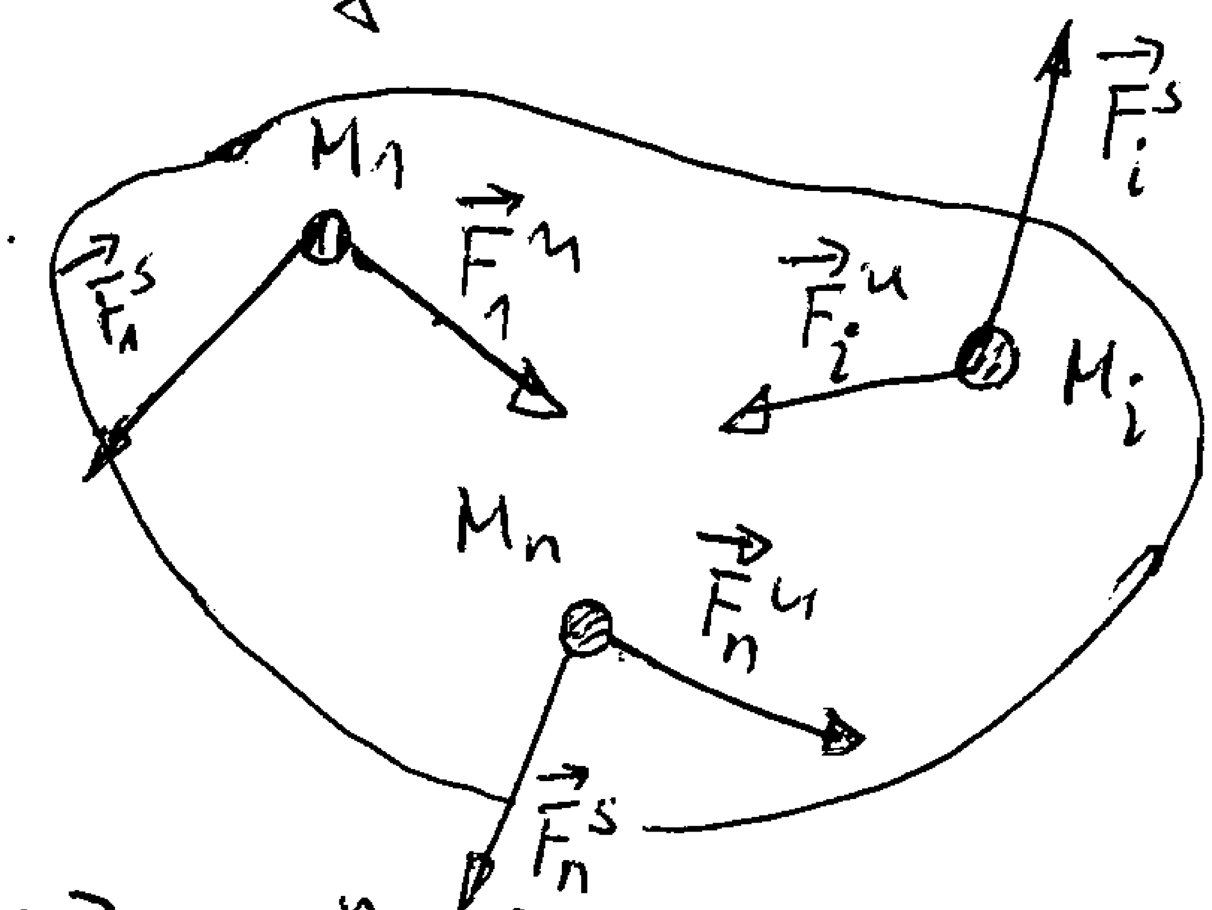
mat. tijelo
- kruto – oblik i veličina tijela se zanemarljivo malo mijenjaju pod dejstvom sila;
- deformabilno
  - čvrsto – ima stalan oblik koji se donekle mijenja pod dejstvom sila;
  - fluidno – zauzima oblik suda u kojem se nalazi.

Diskretan sistem je neizmenljiv (krut) ukoliko se međusobni položaji tačaka ne mijenjaju pod dejstvom sila.

mat. sistem
- slobodan – kretanje tačaka (položaji i brzine) ne podliježu nikakvim ograničenjima;
- neslobodan (vezan) – položaj i brzine tačaka ograničavaju izvjesni uslovi (veze).

sile koje dejstvuju na tačke sistema
- spoljašnje – potiču od materijalnih tačaka (tijela) koja ne ulaze u dati sistem;
- unutrašnje – one su rezultat međusobnog dejstva tačaka datog sistema.

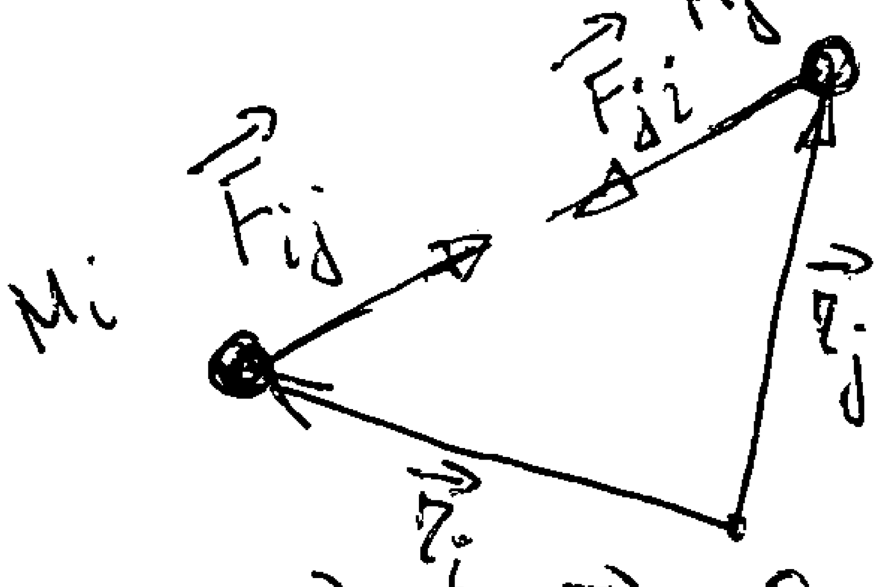




sistem n tačaka M_i masa m_i $(i=1,\dots,n)$

$\vec F_i^s$ – rezultanta svih spoljašnjih sila koje djeluju na tačku M_i.

$$\vec F_i^u = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \vec F_{ij}$$ – rezultanta svih unutrašnjih sila koje djeluju na tačku M_i



Saglasno trećem Njutnovom zakonu (akcije i reakcije) je

$$\vec F_{ij} + \vec F_{ji} = 0 \Longrightarrow \vec F_R^u = \sum_{i=1}^{n} \vec F_i^u = 0$$

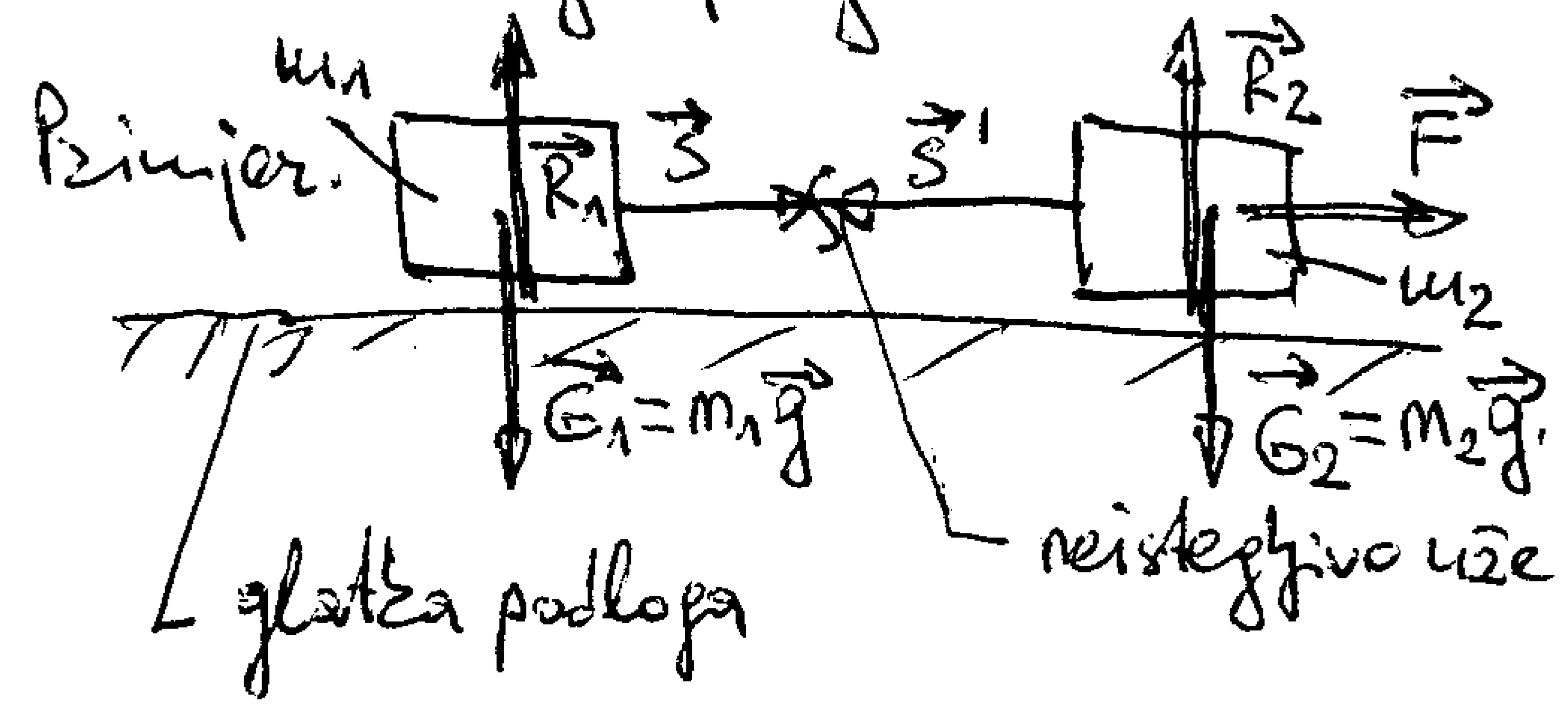
$$\vec M_O^{\vec F_{ij}} + \vec M_O^{\vec F_{ji}} = \vec r_i \times \vec F_{ij} + \vec r_j \times \vec F_{ji} = \overbrace{(\vec r_i - \vec r_j)}^{=\overrightarrow{M_jM_i} \parallel \vec F_{ij}} \times \vec F_{ij} = 0 \Longrightarrow \vec M_O^u = \sum_{i=1}^{n} \vec M_O^{\vec F_i^u} = 0$$

Dakle, unutrašnje sile imaju sljedeće osobine:

1) Glavni vektor unutrašnjih sila materijalnog sistema jednak je nuli;
2) Glavni moment u odnosu na bilo koju tačku jednak je nuli.

Sile koje djeluju na tačke neslobodnog sistema:
- aktivne – spoljašnje / unutrašnje
- reakcije veza – spoljašnje / unutrašnje

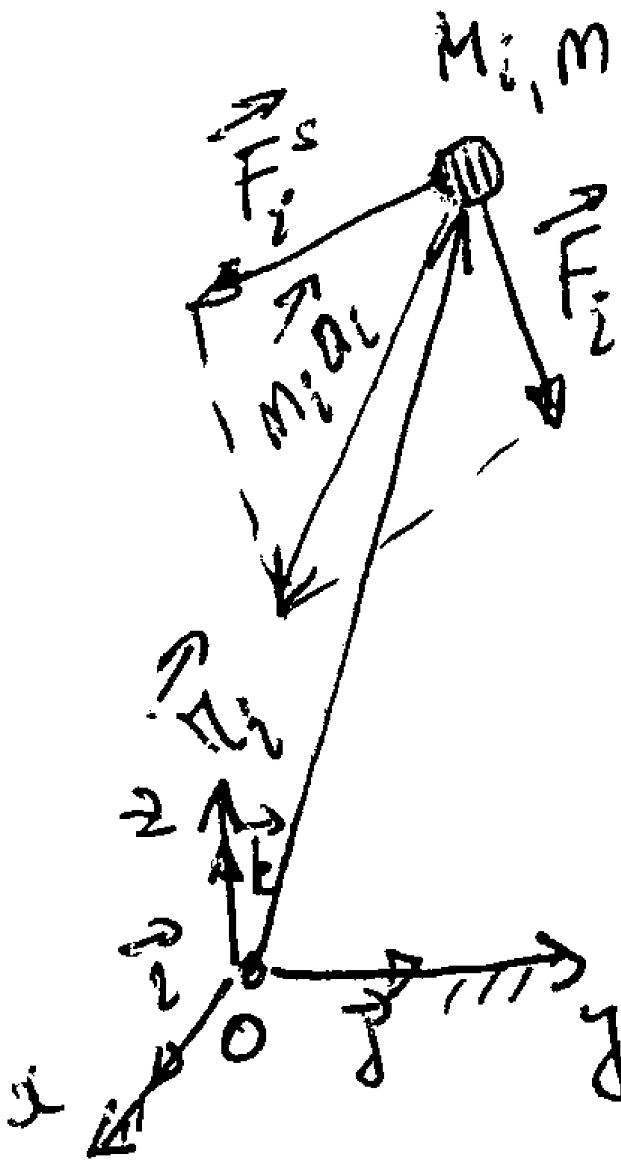
Primjer:



spoljašnje sile: $\vec{F}, \vec{G}_1, \vec{G}_2, \vec{R}_1, \vec{R}_2$
unutrašnje -||- : $\vec{S}, \vec{S}'$
aktivne -||- : $\vec{F}, \vec{G}_1, \vec{G}_2$
reakcije veza: $\vec{R}_1, \vec{R}_2, \vec{S}, \vec{S}'$

2. Diferencijalne jednačine kretanja tačaka sistema

$\vec{a}_i = \ddot{\vec{r}}_i = \ddot{x}_i\vec{i} + \ddot{y}_i\vec{j} + \ddot{z}_i\vec{k}$ – ubrzanje tačke M_i u odnosu na inercijalni koordinatni sistem $Oxyz$



Na osnovu osnovne jednačine dinamike materijalne tačke ($m\vec{a} = \vec{F}$), dobijemo

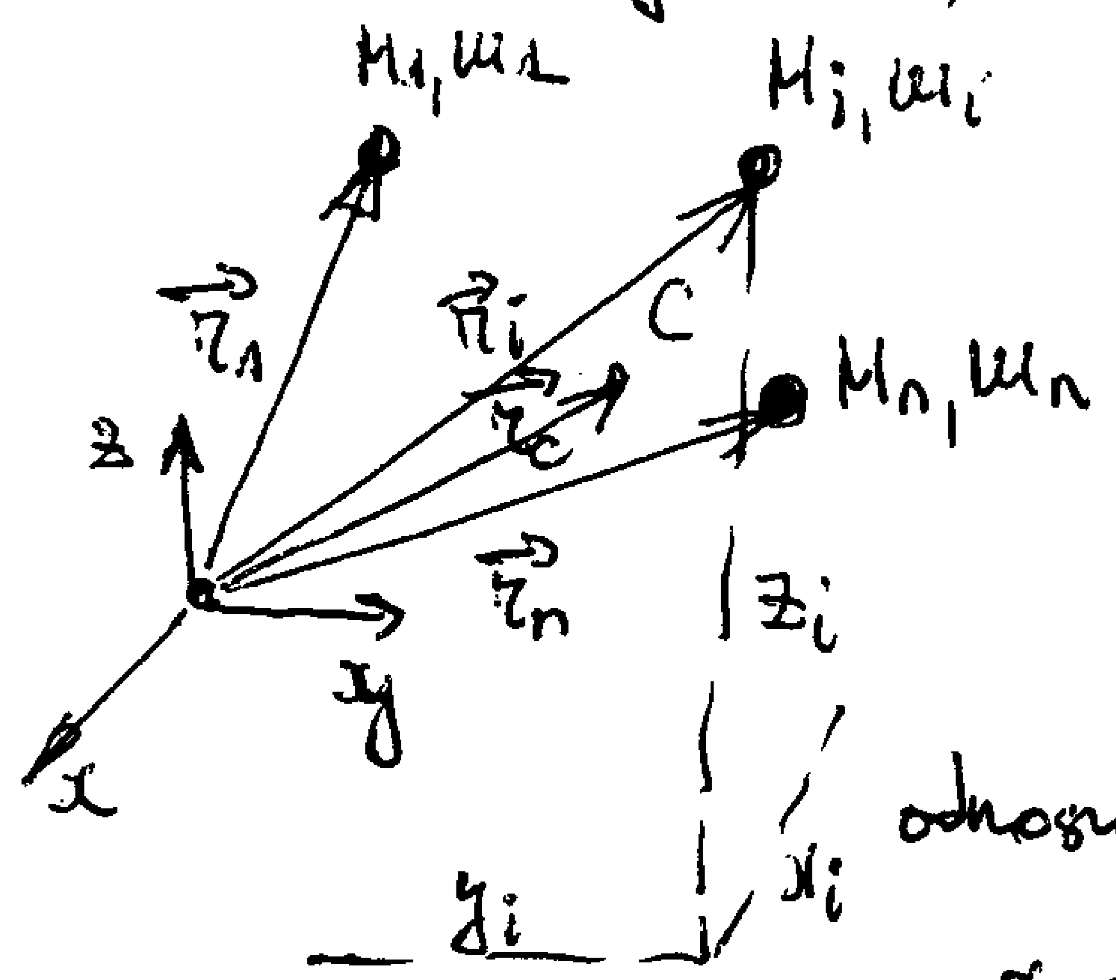
$$m_i\ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i^s + \vec{F}_i^u \quad (i=1,\dots,n) \tag{1}$$

odnosno

$$\left.\begin{aligned} m_i\ddot{x}_i &= F_{ix}^s + F_{ix}^u, \\ m_i\ddot{y}_i &= F_{iy}^s + F_{iy}^u, \quad (i=1,\dots,n) \\ m_i\ddot{z}_i &= F_{iz}^s + F_{iz}^u, \end{aligned}\right\} \tag{1'}$$

n vektorskih jednačina (1), odnosno $3n$ ekvivalentnih skalarnih jednačina (1'), predstavljaju diferencijalne jednačine kretanja materijalnih tačaka sistema. Dakle, u principu govoreći, proučavanje kretanja sistema svodi se na formiranje, analizu i rješavanje diferencijalnih jednačina (1), odnosno (1'). Međutim, to je praktično ostvarljivo samo za sisteme koji sadrže mali broj materijalnih tačaka i koji, ukoliko je sistem neslobodan, imaju relativno jednostavne veze. U cilju prevazilaženja ovog problema uvode se vektorske i skalarne veličine koje u izvjesnom stepenu karakterišu kretanje čitavog sistema. U te sumarne karakteristike, tzv. mjere kretanja, spadaju količina kretanja, moment količine kretanja i kinetička energija. Poznavanje karaktera promjene mjera kretanja daje djelimičnu, ali često dovoljnu, a ponekad i potpunu predstavu o kretanju sistema.

3. Centar inercije (masa) sistema



$m = \sum m_i$ – masa sistema

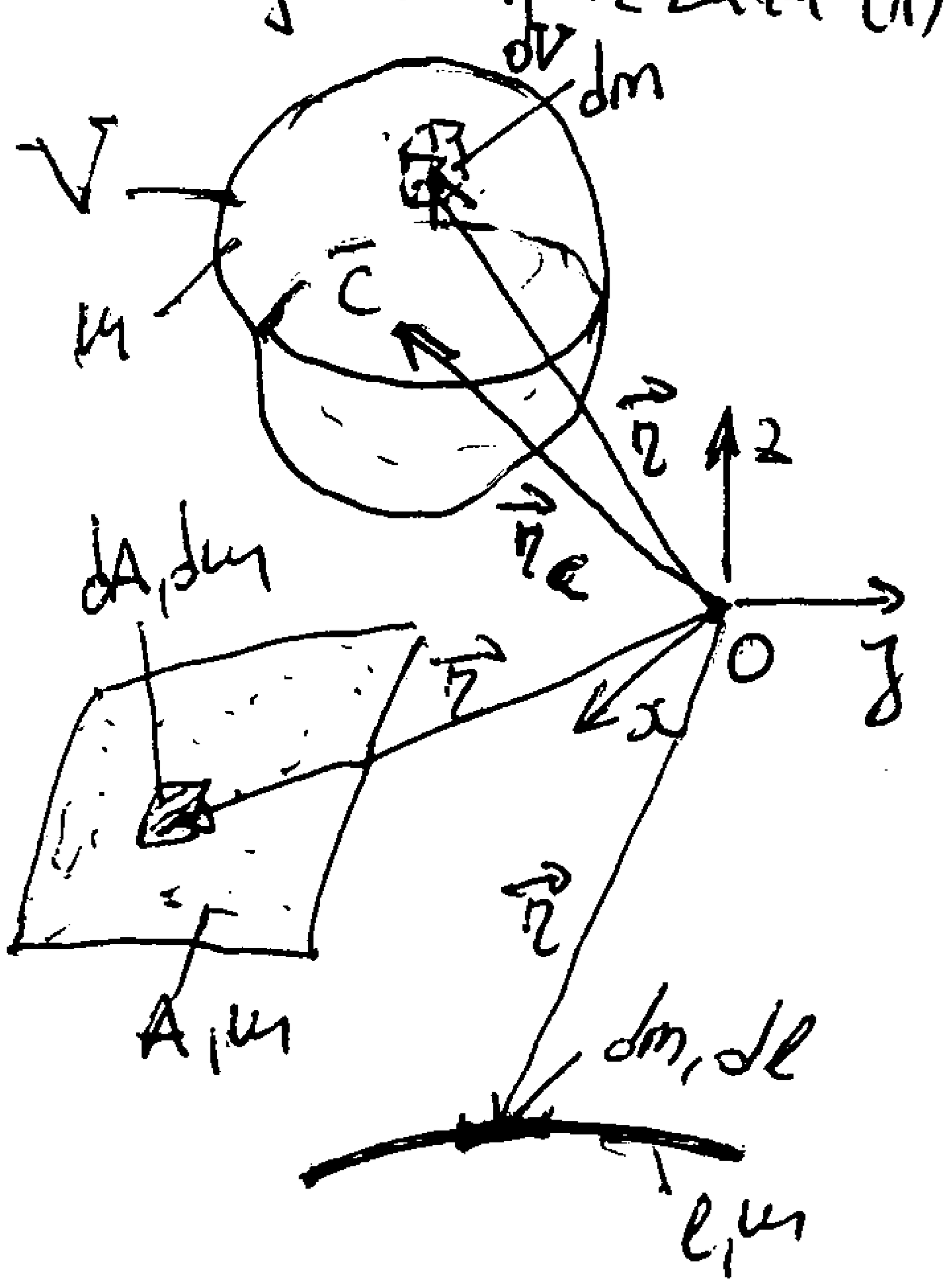
Centar inercije (masa) diskretnog sistema je tačka C čiji je vektor položaja određen formulom:

$$\vec r_C = \frac{\sum m_i \vec r_i}{m}, \qquad (1)$$

odnosno koordinate te tačke su:

$$x_C = \frac{\sum m_i x_i}{m}, \; y_C = \frac{\sum m_i y_i}{m}, \; z_C = \frac{\sum m_i z_i}{m} \qquad (2)$$

U slučaju tijela čija je masa neprekidno raspoređena u prostoru, suma na desnoj strani izraza (1) prelazi u integral, tj.



$$\vec r_C = \frac{\int_{(m)} \vec r \, dm}{m}, \qquad (3)$$

$$\text{odnosno } x_C = \frac{\int_{(m)} x \, dm}{m}, \; y_C = \frac{\int_{(m)} y \, dm}{m}, \; z_C = \frac{\int_{(m)} z \, dm}{m}. \qquad (4)$$

U formulama (3) i (4), zavisno kako je raspoređena masa (zapremini, površini ili po liniji) imamo:

$$dm = \begin{cases} \rho \, dV, & \rho \text{ - gustina (zapreminska)}, \; [\rho] = kg/m^3 \\ \rho' \, dA, & \rho' \text{ - površinska gustina}, \; [\rho'] = kg/m^2 \\ \rho'' \, dl, & \rho'' \text{ - linijska gustina}, \; [\rho''] = kg/m \end{cases}$$

i $m = \int_{(V)} \rho \, dV$, $m = \int_{(A)} \rho' \, dA$ ili $m = \int_{(l)} \rho'' \, dl$.

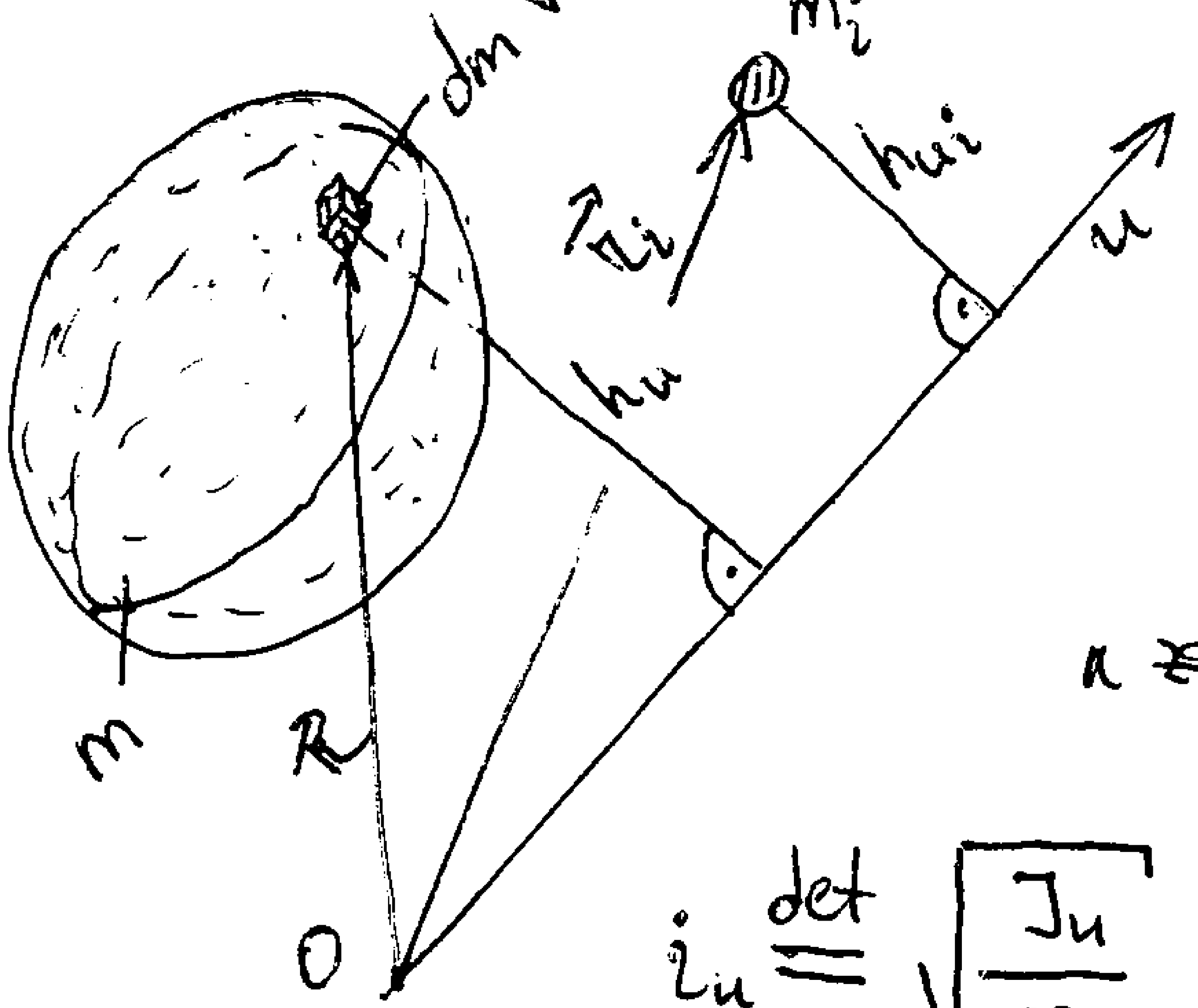
Gustina je u opštem slučaju funkcija položaja, a ako je ona konstantna kaže se da je tijelo homogeno. Za homogena tijela je $m = \rho V$, V - zapremina tijela ili $m = \rho' A$, A - površina materijalne površi, ili $m = \rho'' L$, L - dužina materijalne linije.

Napomena!

$$\vec r_C = \frac{\sum m_i \vec r_i}{m} \cdot \frac{g}{g} = \frac{\sum G_i \vec r_i}{G} \rightarrow$$ položaj centra inercije sistema u homogenom polju sile teže poklapa se sa težištem definisanim u statici.

4. Momenti inercije

4.1. Definicije momenata inercije



Moment inercije materijalnog sistema za neku osu definiše se zbirom proizvoda masa tačaka sistema i kvadrata rastojanja ovih tačaka od ose, tj. za diskretni sistem je

$$J_u = \sum m_i h_{ui}^2 \text{ – moment inercije za osu } u,$$

a za tijelo

$$J_u = \int_{(m)} h_u^2 \, dm. \qquad [J_u] = kg\, m^2$$

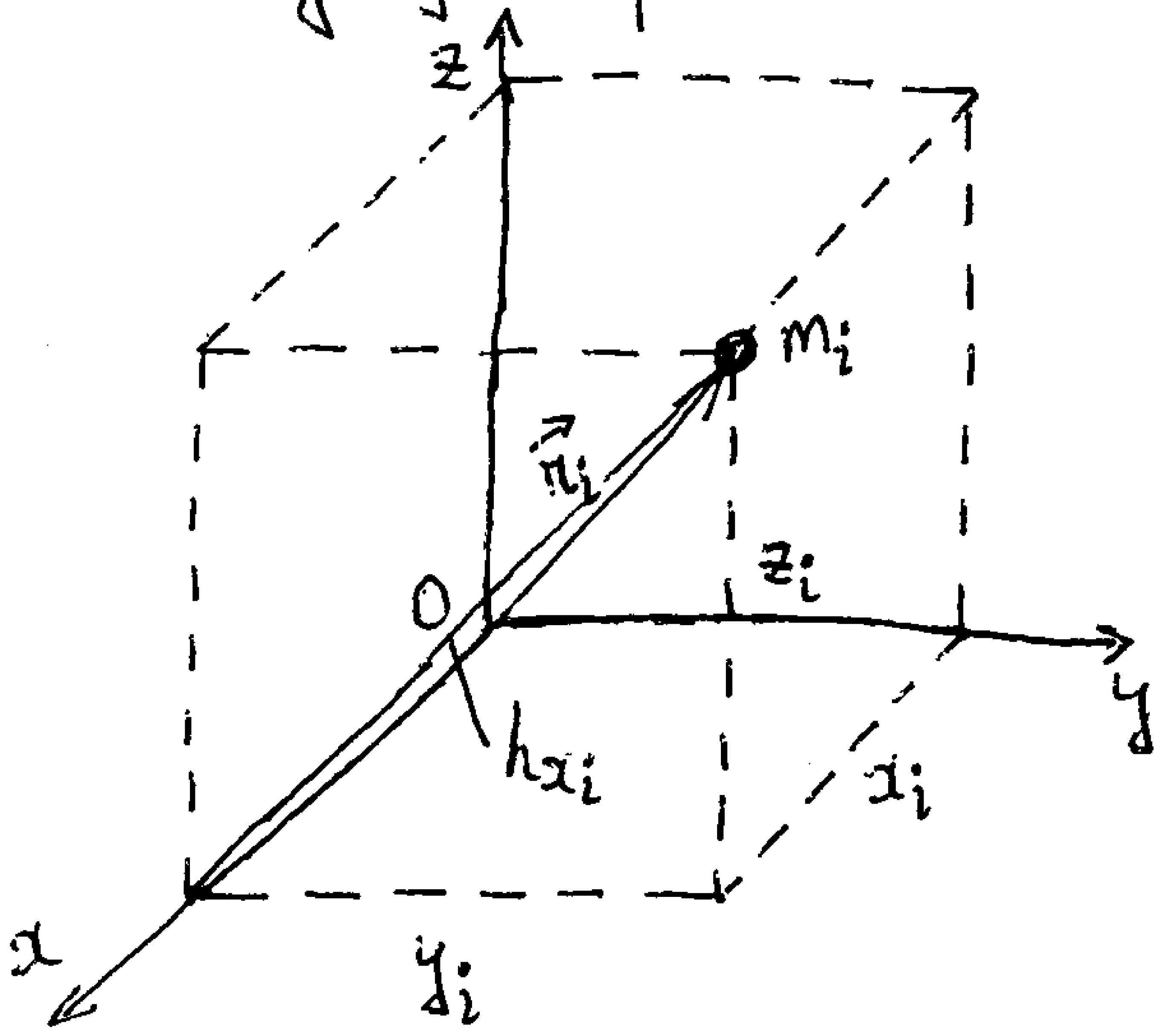
$$i_u \overset{\text{def}}{=} \sqrt{\frac{J_u}{m}} \text{ – poluprečnik inercije sistema za osu } u \; (J_u = m\, i_u^2)$$

Analogno aksijalnom, definiše se polarni moment inercije, tj.

$J_O = \sum m_i r_i^2$ – moment inercije diskretnog sistema za pol O;

$J_O = \int_{(m)} r^2 dm$ – " – materijalnog tijela za pol O.

Očigledno je $J_O \geq 0$ i $J_u \geq 0$, pri čemu je $J_O = 0$, odnosno $J_u = 0$, samo onda kada je cjelokupna masa sistema smještena u tački O, odnosno na osi u.



Za Dekartov koordinatni sistem Oxyz, saglasno prethodnim definicijama, biće

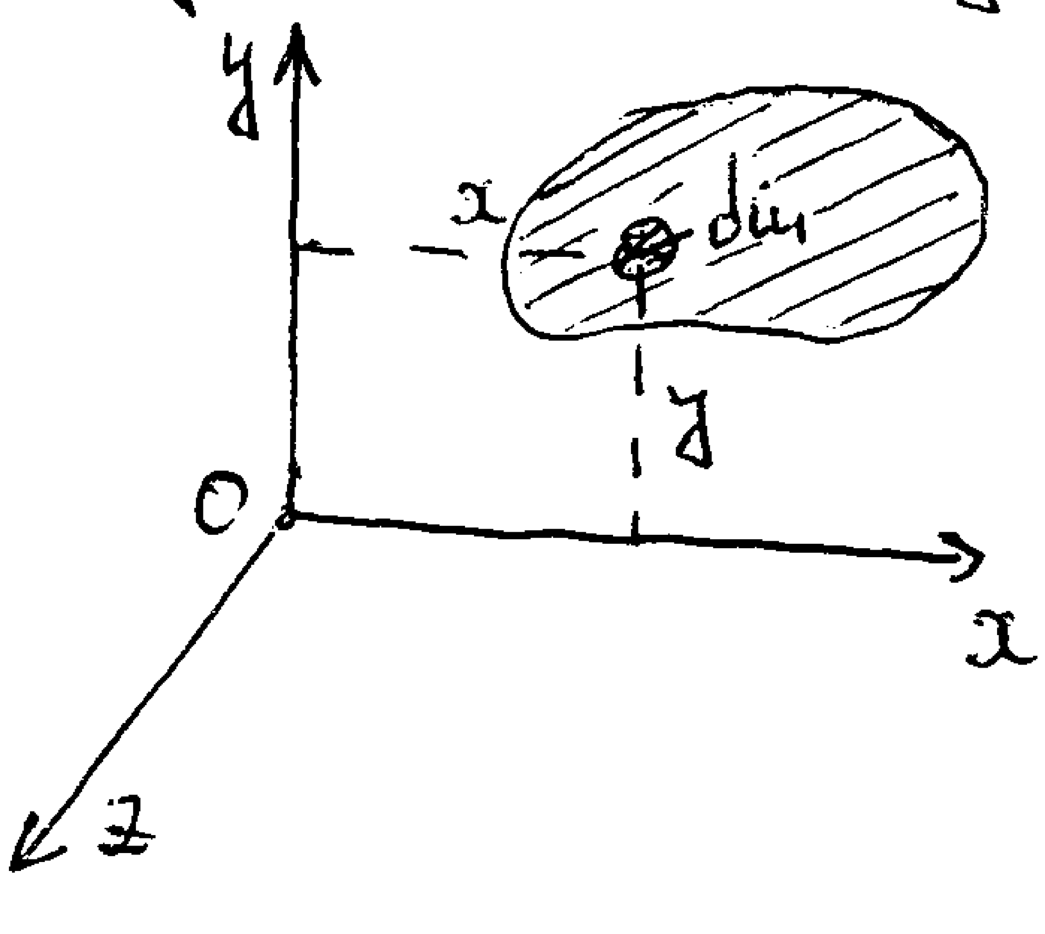
za diskretan sistem:

$$J_x = \sum m_i h_{xi}^2 = \sum m_i (y_i^2 + z_i^2)$$
$$J_y = \sum m_i (x_i^2 + z_i^2)$$
$$J_z = \sum m_i (x_i^2 + y_i^2)$$
$$J_O = \sum m_i (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2)$$

za tijelo:

$$J_x = \int_{(m)} (y^2 + z^2) dm$$
$$J_y = \int_{(m)} (x^2 + z^2) dm$$
$$J_z = \int_{(m)} (x^2 + y^2) dm$$
$$J_O = \int_{(m)} (x^2 + y^2 + z^2) dm$$

Iz prethodnih formula slijedi da je $2 J_O = J_x + J_y + J_z$, tj. dvostruki polarni moment inercije je jednak zbiru tri aksijalna momenta inercije za tri upravne ose kroz taj pol.



Ako je masa raspoređena u ravni, recimo Oxy, tada je

$$J_x = \int_{(m)} y^2 dm, \quad J_y = \int_{(m)} x^2 dm \quad i \quad J_O = J_z = \int_{(m)} (x^2 + y^2) dm,$$

tj. $\quad J_O = J_z = J_x + J_y$

Centrifugalni moment inercije za dvije međusobno upravne ose definiše se kao zbir proizvoda masa tačaka sistema i projekcija njihovih vektora položaja na te ose. U odnosu na koordinatni sistem $Oxyz$, za diskretni sistem, odnosno materijalno tijelo, centrifugalni momenti inercije su dati sljedećim izrazima:

diskretni sistem tačaka	materijalno tijelo
$J_{xy}=\sum m_i x_i y_i$	$J_{xy}=\int_{(m)} xy\,dm$
$J_{xz}=\sum m_i x_i z_i$	$J_{xz}=\int_{(m)} xz\,dm$
$J_{yz}=\sum m_i y_i z_i$	$J_{yz}=\int_{(m)} yz\,dm$

centrifugalni momenti inercije mogu biti pozitivni, negativni ili jednaki nuli, a takođe

S obzirom na definiciju, biće $J_{yx}=J_{xy}$, $J_{zx}=J_{xz}$ i $J_{zy}=J_{yz}$.

Za jedan određeni sistem, centrifugalni momenti inercije zavise od pravca (orijentacije) koordinatnih osa i od izbora koordinatnog početka. Zato, kada se govori o centrifugalnim momentima inercije u datoj tački, podrazumijeva se da se koordinatni početak nalazi u toj tački.

4.2. Glavne ose inercije

Neka je $J_{xz}=0$ i $J_{yz}=0$. Tada se osa Oz zove <u>glavna osa inercije</u> (tj. osa z je glavna osa inercije za tačku O). Drugačije rečeno, ako su dva centrifugalna momenta inercije jednaka nuli, onda se zajednička osa naznačena u indeksima tih momenata inercije naziva glavna osa inercije.

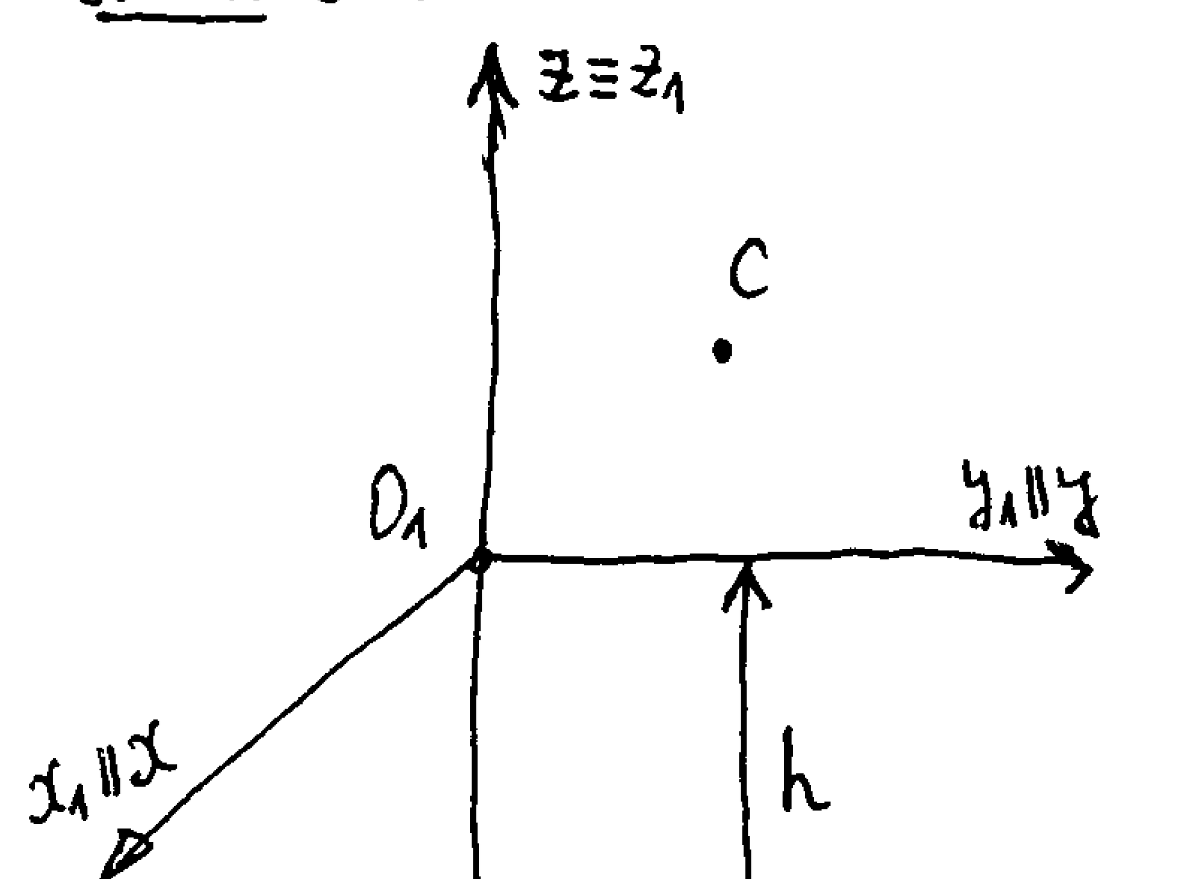
Ako glavna osa inercije prolazi kroz centar inercije sistema, ona se zove <u>glavna centralna osa inercije</u>.

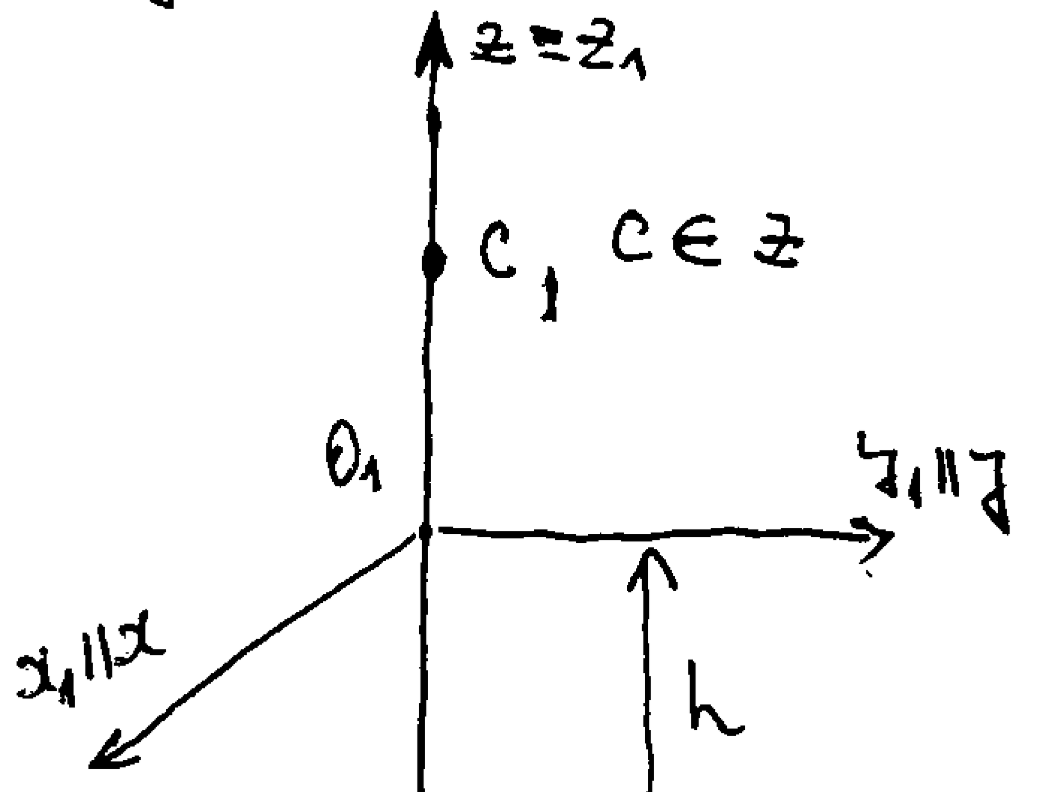
Ako su $J_{xy}=J_{xz}=J_{yz}=0$, sve tri ose (x, y i z) su glavne ose, a koordinatni sistem $Oxyz$ se zove sistem glavnih osa inercije. Može se pokazati da se u proizvoljnoj tački O može postaviti koordinatni sistem tako da sve tri ose budu glavne ose inercije.

Navedimo, bez dokaza, neke karakteristične osobine glavnih osa inercije.

1) Glavna osa inercije Oz koja ne prolazi kroz centar inercije je glavna osa inercije <u>samo</u> za tačku O.

2) Glavna centralna osa inercije Oz je glavna osa inercije za sve tačke sa te ose.





$J_{xz}=J_{yz}=0 \Leftrightarrow Oz$ – glavna osa inercije,

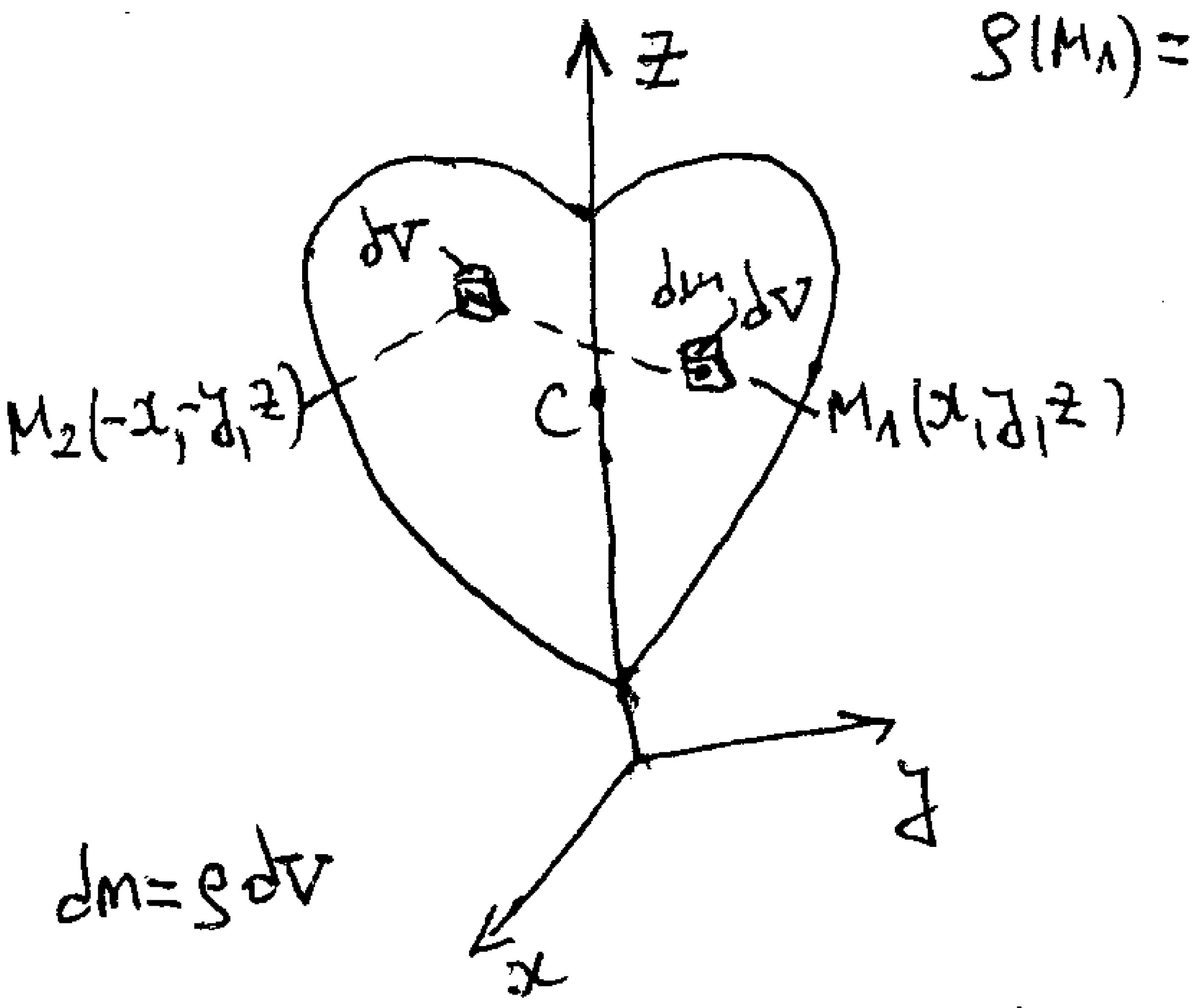
$C\notin z \Rightarrow J_{x_1z}\neq 0,\ J_{y_1z}\neq 0 \Rightarrow O_1z$ nije –"–

$J_{xz}=J_{yz}=0$

$C\in z \Rightarrow J_{x_1z}=J_{y_1z}=0 \Rightarrow O_1z$ – glavna osa inercije

3) Ako tijelo ima osu materijalne simetrije, tada je ona njegova glavna centralna osa inercije.

$\rho(M_1)=\rho(M_2)$



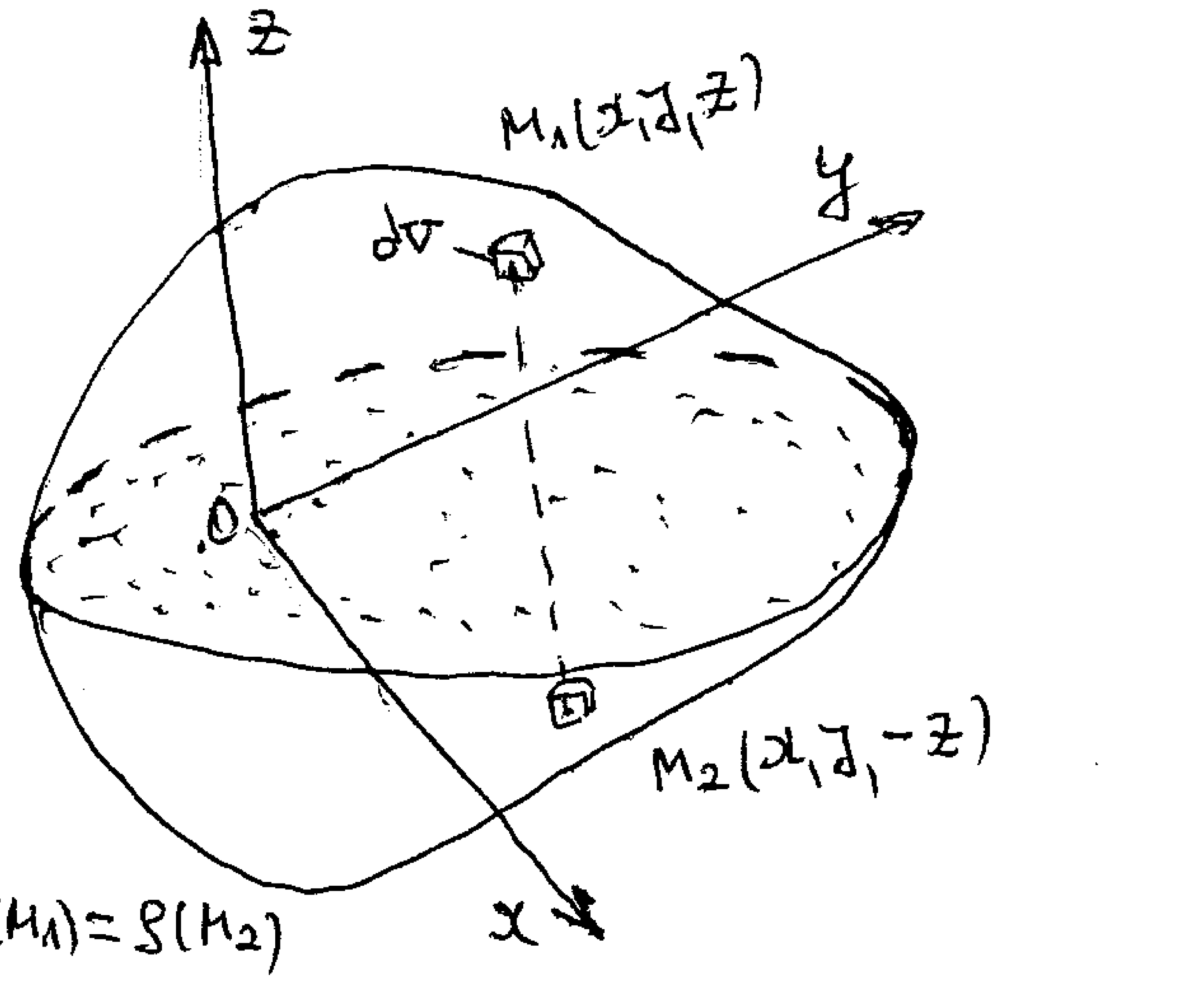
$dm=\rho\, dV$

$$x z \rho(M_1)dV + (-x) z \rho(M_2) dV \equiv 0 \Rightarrow J_{xz}=0$$

$$y z \rho(M_1)dV + (-y) z \rho(M_2) dV \equiv 0 \Rightarrow J_{yz}=0$$

$$\left.\begin{array}{l} x \rho(M_1)dV + (-x) \rho(M_2) dV \equiv 0 \Rightarrow x_C=0 \\ y \rho(M_1)dV + (-y) \rho(M_2) dV \equiv 0 \Rightarrow y_C=0 \end{array}\right\} \Rightarrow C\in z$$

4) Ako tijelo ima ravan materijalne simetrije, tada je svaka prava upravna na nju glavna osa inercije za tačku prodora prave kroz ravan materijalne simetrije.

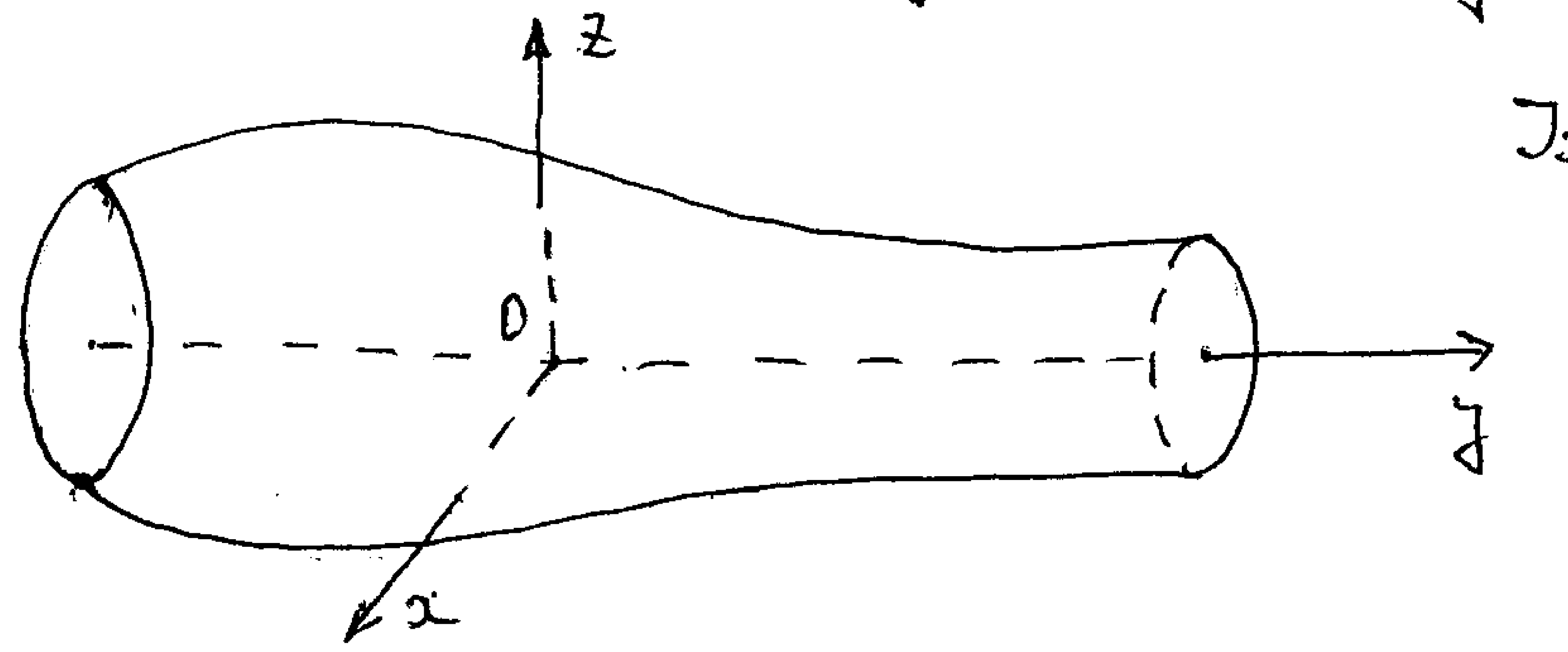


$\rho(M_1)=\rho(M_2)$

$$x z \rho(M_1)dV + x(-z) \rho(M_2) dV \equiv 0 \Rightarrow J_{xz}=0$$

$$y z \rho(M_1)dV + y(-z) \rho(M_2) dV \equiv 0 \Rightarrow J_{yz}=0$$

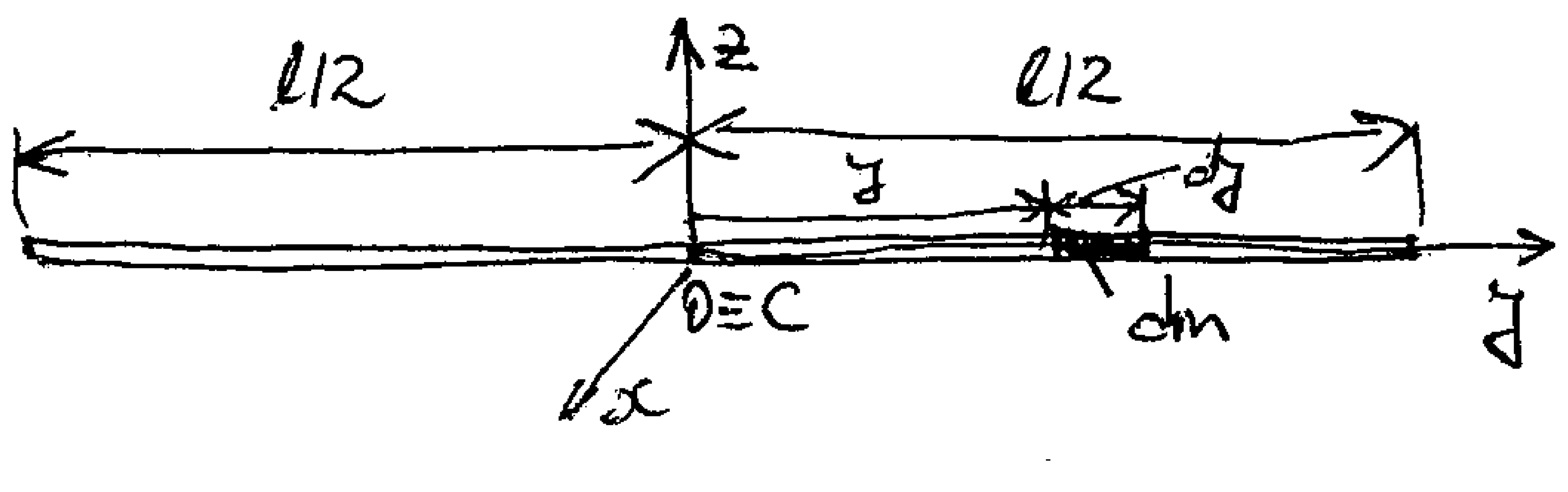
5) Za obrtno homogeno tijelo osa obrtanja i druge dvije ose međusobno upravne i upravne na osu obrtanja čine sistem glavnih osa inercije.



$$J_{xy}=J_{xz}=J_{yz}=0$$

4.3. Osnovni primjeri

1) Homogeni tanki štap dužine l i mase m



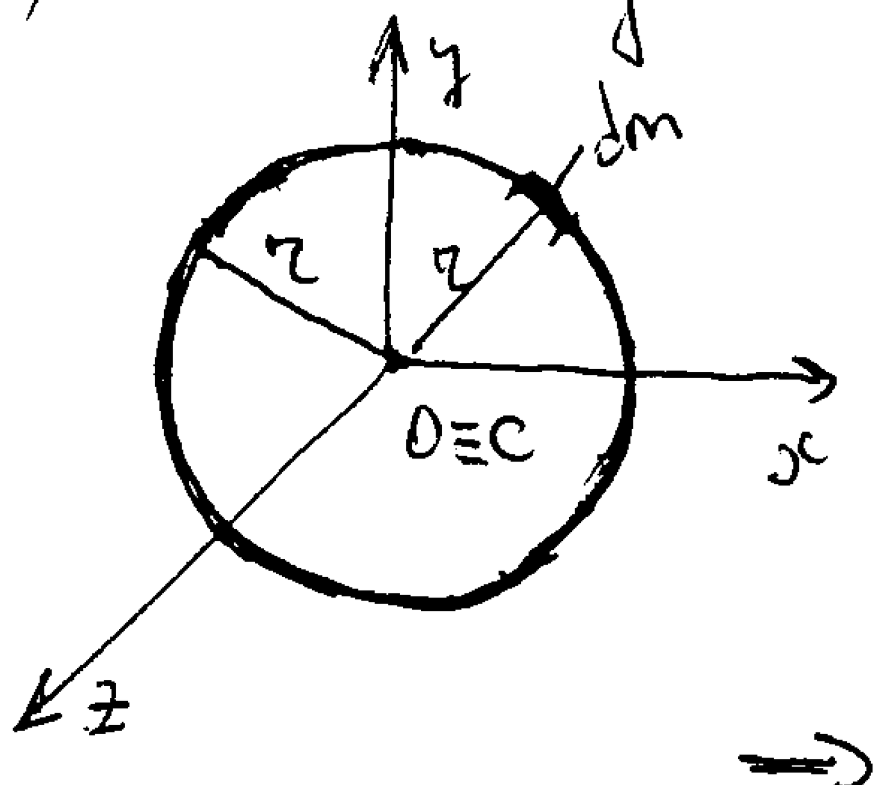
$$dm=\rho'' dy,\quad \rho''=\frac{m}{l}$$

$$J_x=J_z=\int_{(m)} y^2 dm = \frac{m}{l}\int_{-l/2}^{l/2} y^2 dy = \frac{ml^2}{12}$$

$$J_y=\int_{(m)} 0\cdot dm = 0$$

$$J_{xy}=J_{xz}=J_{yz}=\int_{(m)} 0\cdot dm = 0$$

2) Momenti inercije tanke kružne homogene žice mase m i poluprečnika r.



Žica leži u ravni Oxy, pa je $J_x + J_y = J_z$

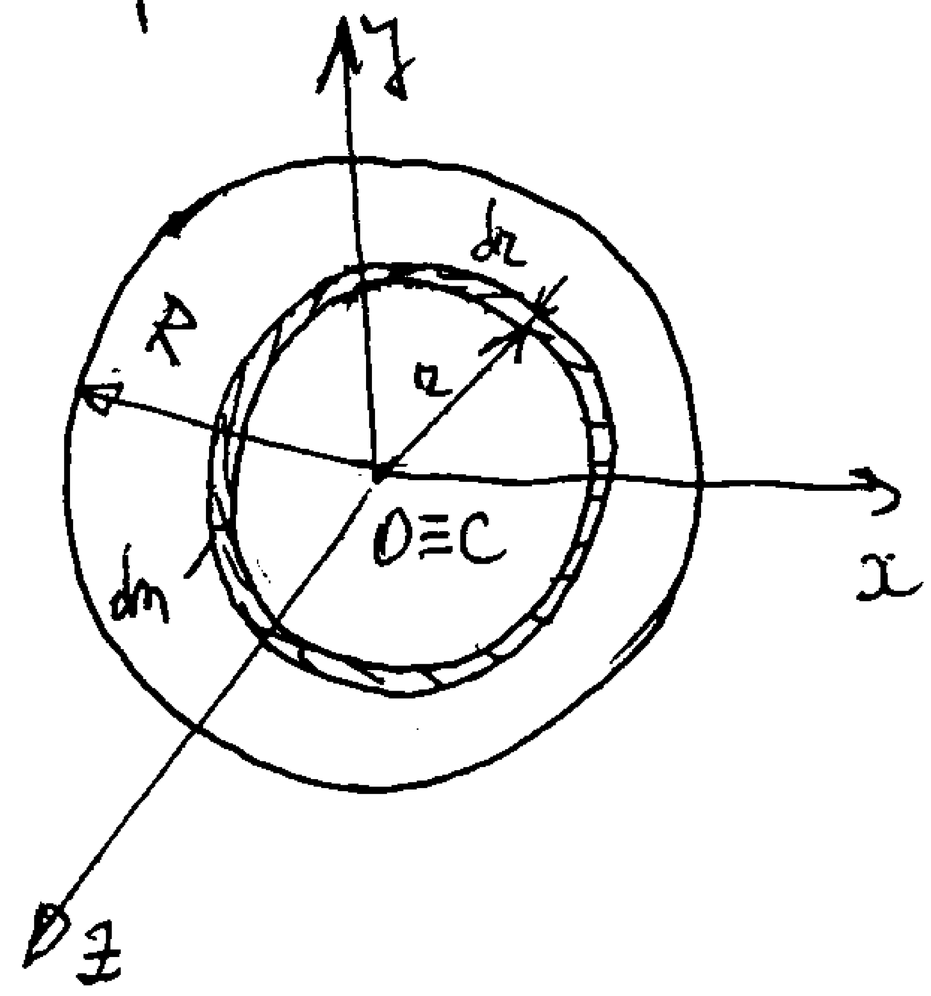
Zbog istovjetnog rasporeda mase u odnosu na ose x i y, očigledno je $J_x = J_y$

$$J_z = \int_{(m)} r^2 dm = r^2 \int_{(m)} dm = r^2 m$$

$$\Rightarrow J_x = J_y = \frac{J_z}{2} = \frac{mr^2}{2},$$

Zbog mat. simetrije je $J_{xz} = J_{yz} = J_{xy} = 0$

3) Momenti inercije homogenog kružnog diska (kružne ploče male debljine) mase m i poluprečnika R.



$$J_x + J_y = J_z\,, \quad J_x = J_y = \frac{1}{2} J_z$$

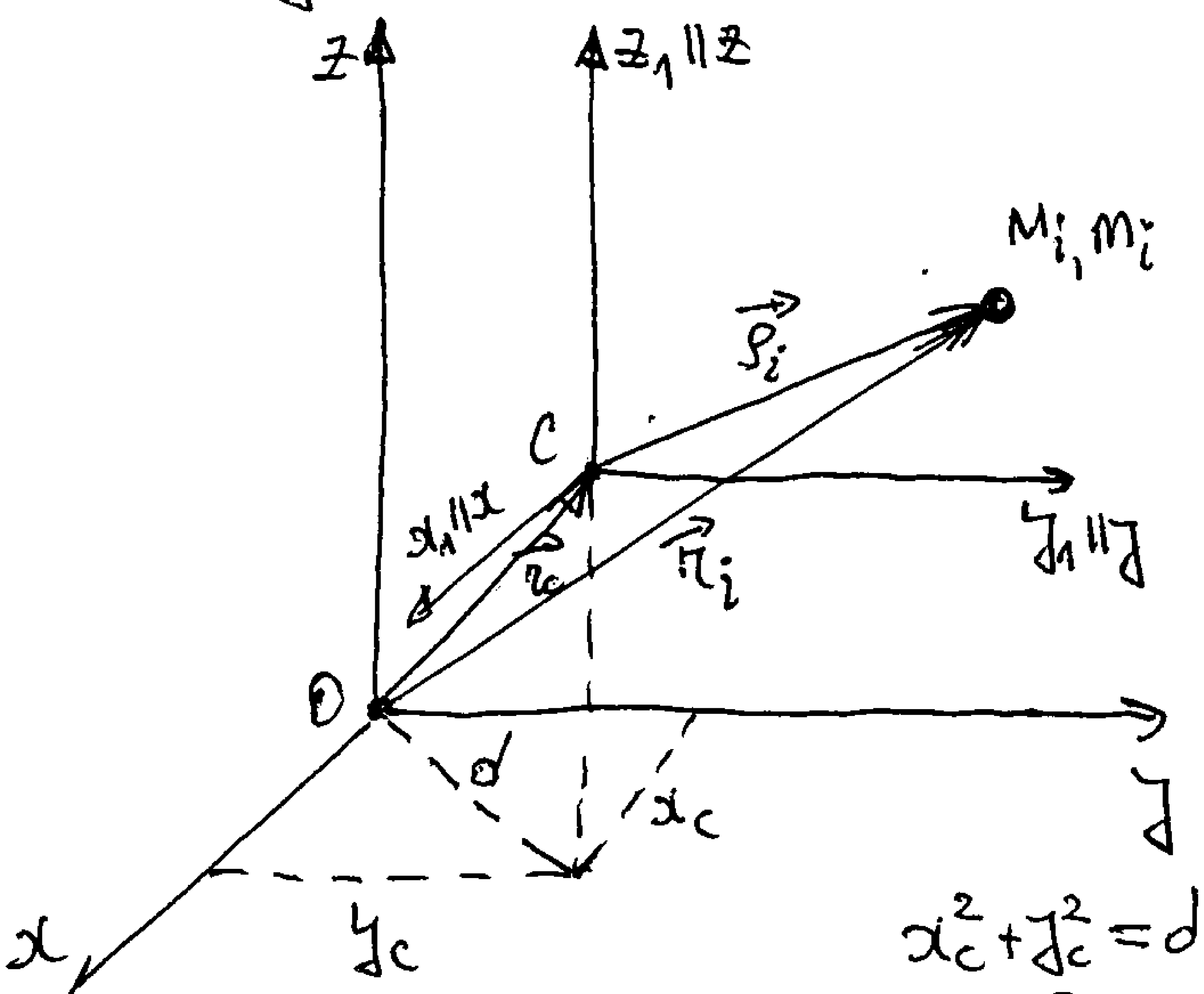
$$J_{xy} = J_{xz} = J_{yz} = 0$$

$$dJ_z = J_z(dm) = r^2 dm\,; \quad dm = \rho' 2r\pi\, dr\,, \quad \rho' = \frac{m}{R^2 \pi}$$

$$J_z = \int_{(m)} r^2 dm = \frac{2m}{R^2} \int_0^R r^3 dr = \boxed{\frac{1}{2} m R^2}$$

4.4. Momenti inercije za paralelne ose (Hajgens-Štajnerova teorema)

Uočimo dva koordinatna sistema $Oxyz$ i $Cx_1y_1z_1$, pri čemu je početak drugog sistema u centru inercije materijalnog sistema C, a ose su mu paralelne sa odgovarajućim osama prvog sistema.



$$\vec{r}_i = \vec{r}_c + \vec{\rho}_i \Leftrightarrow \begin{cases} x_i = x_c + x_{1i} \\ y_i = y_c + y_{1i} \\ z_i = z_c + z_{1i} \end{cases}$$

$$J_z = \sum m_i (x_i^2 + y_i^2) = \sum m_i \left[(x_c + x_{1i})^2 + (y_c + y_{1i})^2 \right]$$

$$\Rightarrow J_z = \sum m_i (x_{1i}^2 + y_{1i}^2) + (x_c^2 + y_c^2) \sum m_i + 2x_c \sum m_i x_{1i} + 2y_c \sum m_i y_{1i}$$

Kako je $\sum m_i (x_{1i}^2 + y_{1i}^2) = J_{z_1}$, $\sum m_i = M$ – masa sist., $x_c^2 + y_c^2 = d^2$ – kvadrat rastojanja između osa z i z_1, $\sum m_i x_{1i} = M \cancelto{0}{x_{1C}} = 0$ i $\sum m_i y_{1i} = M \cancelto{0}{y_{1C}} = 0$ (v. 3.2), to je $\boxed{J_z = J_{z_1} + Md^2}$

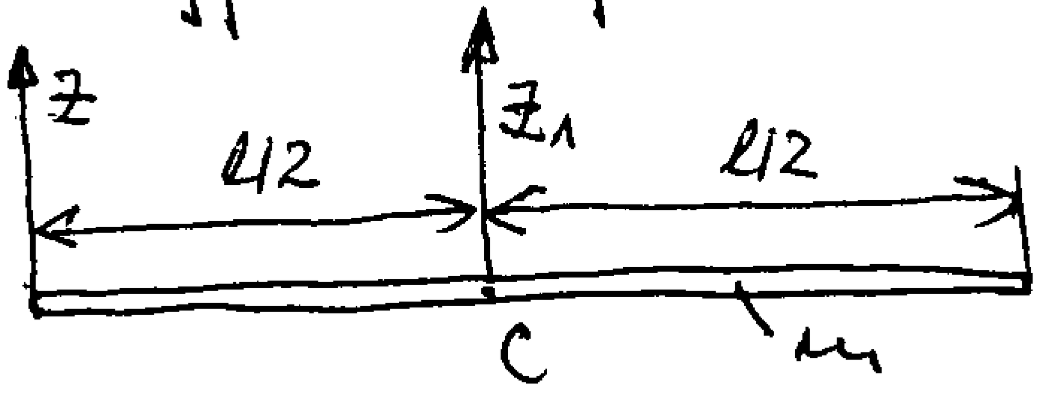
Ovim je dokazana Hajgens-Štajnerova teorema za aksijalne momente inercije: Moment inercije sistema za neku osu jednak je zbiru momenta inercije za paralelnu centralnu osu i proizvoda mase sistema i kvadrata rastojanja između tih osa.

Analogno se izvodi da je

$$J_{xy} = J_{x_1 y_1} + m x_c y_c ,$$

što predstavlja Hajgens-Štajnerovu teoremu za centrifugalne momente inercije.

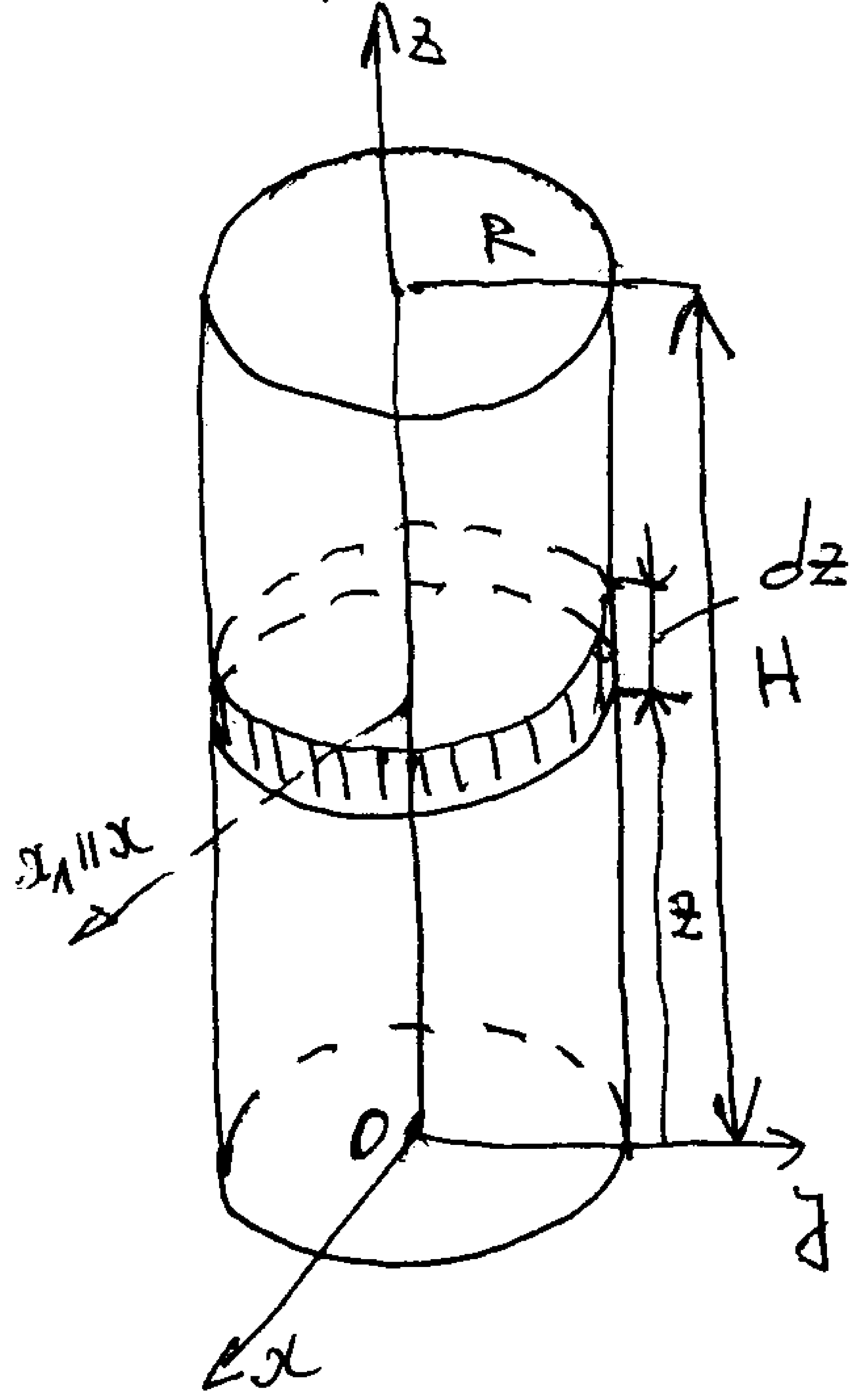
Pr. 1.



$$J_{z_1} = \frac{ml^2}{12}, \quad J_z = ?$$

$$J_z = J_{z_1} + m\cdot\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{ml^2}{3}$$

Pr. 2. Izračunati moment inercije homogenog pravog kružnog valjka, poluprečnika osnove R, visine H i mase m, za koordinatni sistem Oxyz.



Izdijelimo valjak na tanke diskove debljine dz. Masa jednog diska je $dm = \rho\, dV = \rho R^2 \pi\, dz$, gdje je $\rho = \frac{m}{V} = \frac{m}{R^2 \pi H}$, pa je $dm = \frac{m}{H} dz$

$$dJ_z = J_z(dm) = \frac{dm\, R^2}{2} = \frac{m}{H}\frac{R^2}{2} dz$$

$$J_z = \int_0^H \frac{mR^2}{2H} dz = \frac{mR^2}{2}$$

$$dJ_x = J_x(dm) \overset{H.Š.T}{=\!=} \underbrace{J_{x_1}(dm)}_{= \frac{dm\cdot R^2}{4}} + dm\cdot z^2$$

$$dJ_x = \left(\frac{R^2}{4} + z^2\right)\frac{m}{H} dz,$$

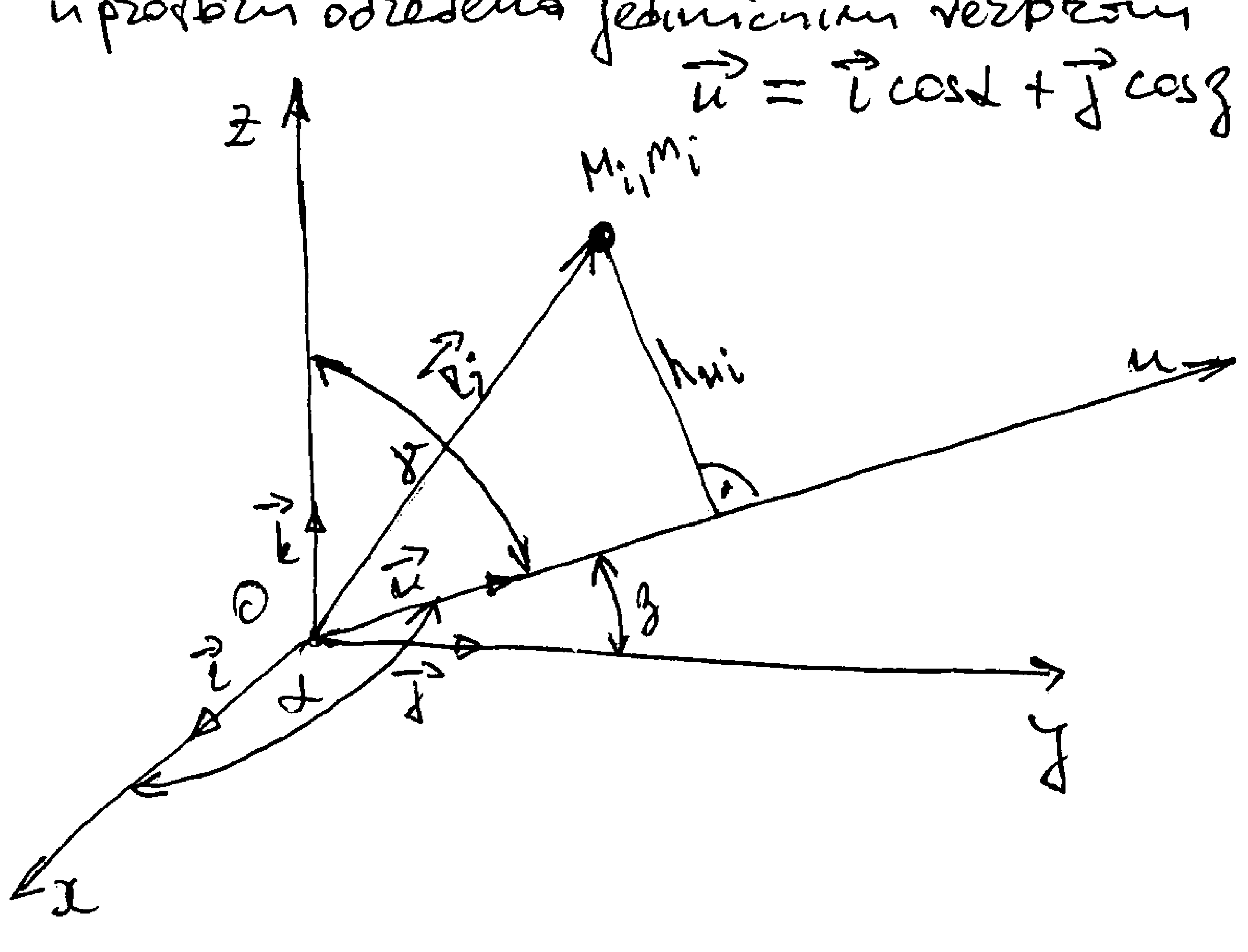
$$J_x = \frac{m}{H}\int_0^H \left(\frac{R^2}{4} + z^2\right) dz = m\left(\frac{R^2}{4} + \frac{H^2}{3}\right)$$

Zbog simetrije je $J_y = J_x$ i $J_{xy} = J_{xz} = J_{yz} = 0$

4.5. Moment inercije u odnosu na proizvoljnu osu kroz datu tačku.

Neka je u koordinatnom sistemu Oxyz data osa Ou čija je orijentacija u prostoru određena jediničnim vektorom

$$\vec{u} = \vec{i}\cos\alpha + \vec{j}\cos\beta + \vec{k}\cos\gamma$$



$$J_u = \sum m_i h_{ui}^2$$

$$h_{ui} = r_i \sin\sphericalangle(\vec{u}, \vec{r}_i) = |\vec{u} \times \vec{r}_i|$$

Pošto je

$$\vec{u} \times \vec{r}_i = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ x_i & y_i & z_i \end{vmatrix} = (z_i\cos\beta - y_i\cos\gamma)\vec{i} + (x_i\cos\gamma - z_i\cos\alpha)\vec{j} + (y_i\cos\alpha - x_i\cos\beta)\vec{k},$$

te je

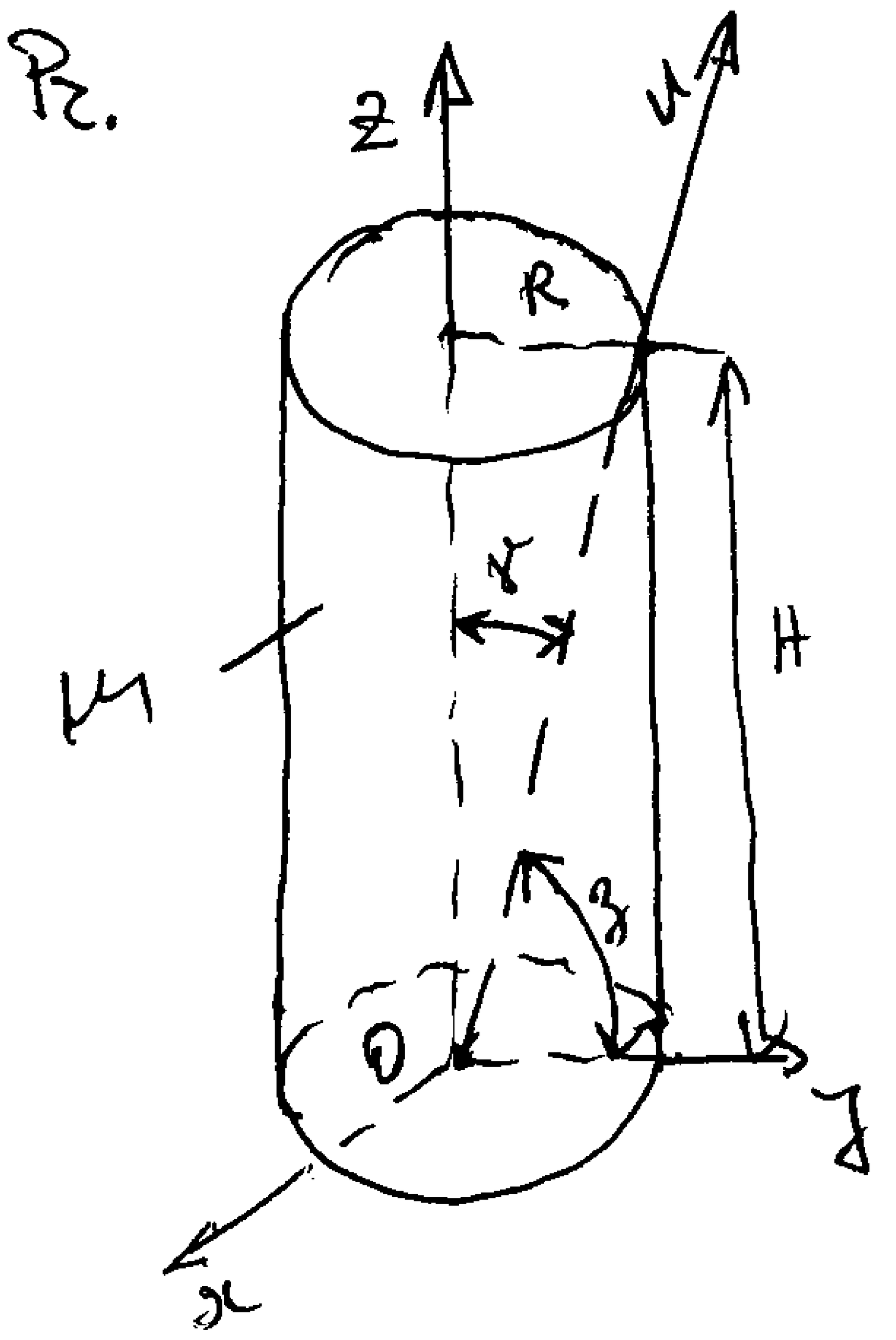
$$h_{u_i}^2 = (z_i\cos\beta - y_i\cos\gamma)^2 + (x_i\cos\gamma - z_i\cos\alpha)^2 + (y_i\cos\alpha - x_i\cos\beta)^2,$$

pa poslije elementarnih sređivanja, imajući u vidu definicije momenata inercije za ose Dekartovog koordinatnog sistema, dobijamo

$$J_u = J_x\cos^2\alpha + J_y\cos^2\beta + J_z\cos^2\gamma - 2J_{xy}\cos\alpha\cos\beta - 2J_{xz}\cos\alpha\cos\gamma - 2J_{yz}\cos\beta\cos\gamma$$

Na ovaj način, znajući momente inercije za koordinatni sistem $Oxyz$ i položaj proizvoljne ose Ou $(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$, možemo za nju odrediti moment inercije.

Pr.



$J_u = ?$

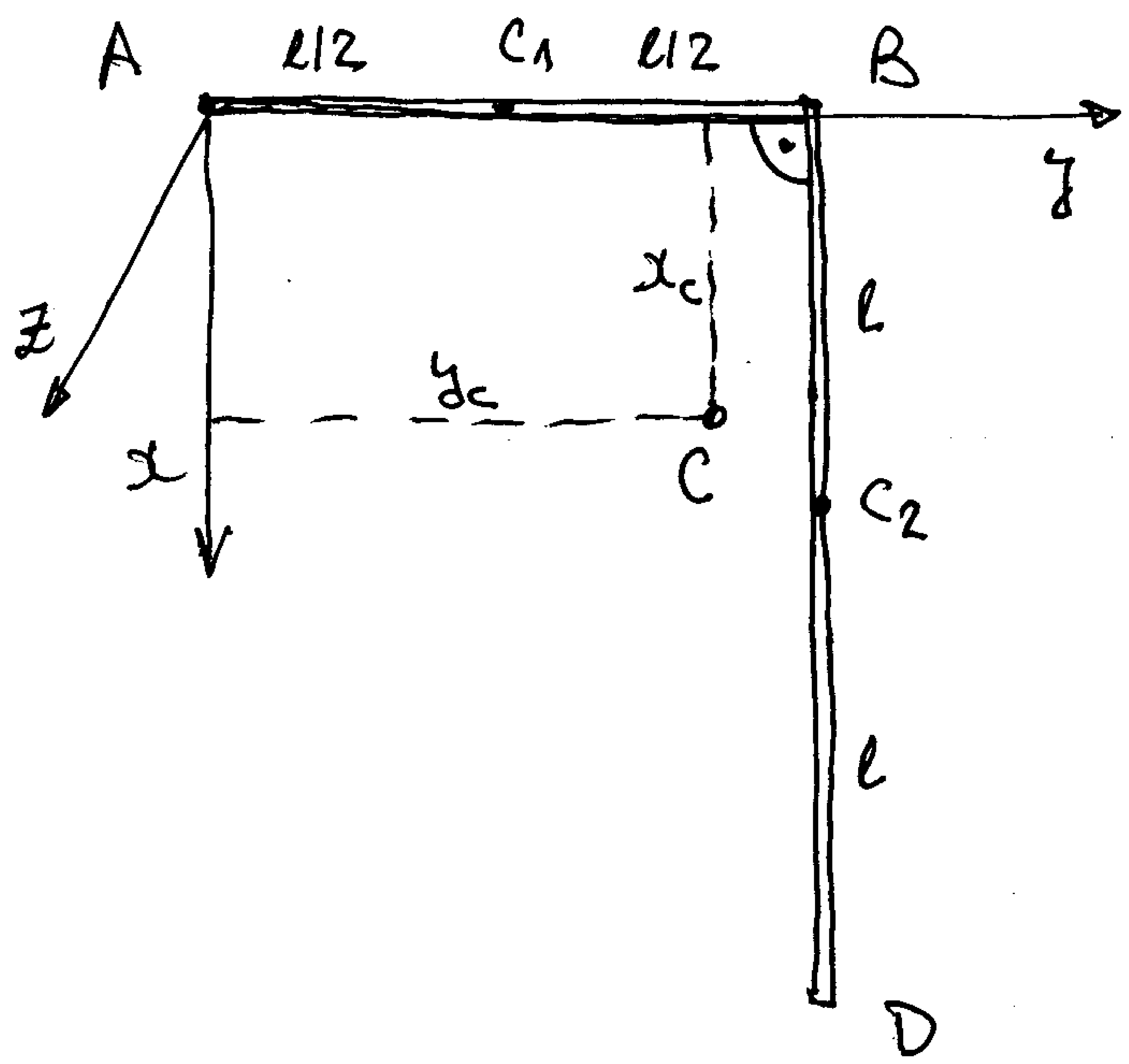
$$\cos\alpha = 0, \quad \cos\beta = \frac{R}{\sqrt{R^2+H^2}}, \quad \cos\gamma = \frac{H}{\sqrt{R^2+H^2}}$$

Na osnovu gornje formule i pr. 2 iz prethodnog odjeljka, biće

$$J_u = m\left(\frac{R^2}{4} + \frac{H^2}{3}\right)\frac{R^2}{R^2+H^2} + \frac{mR^2}{2}\cdot\frac{H^2}{R^2+H^2}$$

$$J_u = m\frac{R^2}{R^2+H^2}\left(\frac{R^2}{4} + \frac{5}{6}H^2\right)$$

1. Ugaonik ABD se sastoji od homogenog štapa AB, mase m i dužine l, i homogenog štapa BD, mase $2m$ i dužine $2l$, koji leže u horizontalnoj ravni. a) Odrediti položaj centra inercije ugaonika. b) Odrediti moment inercije ugaonika za osu koja prolazi kroz tačku A a upravna je na njegovu ravan. Koliki je poluprečnik inercije ugaonika za tu osu? c) Koliki je moment inercije ugaonika za centralnu osu upravnu na njegovu ravan?



a) $$x_c = \frac{m_{AB} x_{C_1} + m_{BD} x_{C_2}}{m_{AB} + m_{BD}}$$

$$y_c = \frac{m_{AB} y_{C_1} + m_{BD} y_{C_2}}{m_{AB} + m_{BD}}$$

$$z_c = 0$$

$m_{AB} = m$, $m_{BD} = 2m$; $x_{C_1} = 0$, $x_{C_2} = l$, $y_{C_1} = \frac{l}{2}$, $y_{C_2} = l$

$$\Rightarrow \boxed{x_c = \frac{2}{3} l, \; y_c = \frac{5}{6} l}$$

b) $J_{Az} = J_{Az}^{(AB)} + J_{Az}^{(BD)}$

Na osnovu Hajgens-Štajnerove teoreme je $J_{Az}^{(AB)} = J_{C_1 z}^{(AB)} + m_{AB} \cdot \overline{AC_1}^2$ i $J_{Az}^{(BD)} = J_{C_2 z}^{(BD)} + m_{BD} \cdot \overline{AC_2}^2$.

$J_{C_1 z}^{(AB)} = m_{AB} \frac{l^2}{12}$, $J_{C_2 z}^{(BD)} = m_{BD} \frac{(2l)^2}{12}$ (~~poznato sa~~ viši predavanja)

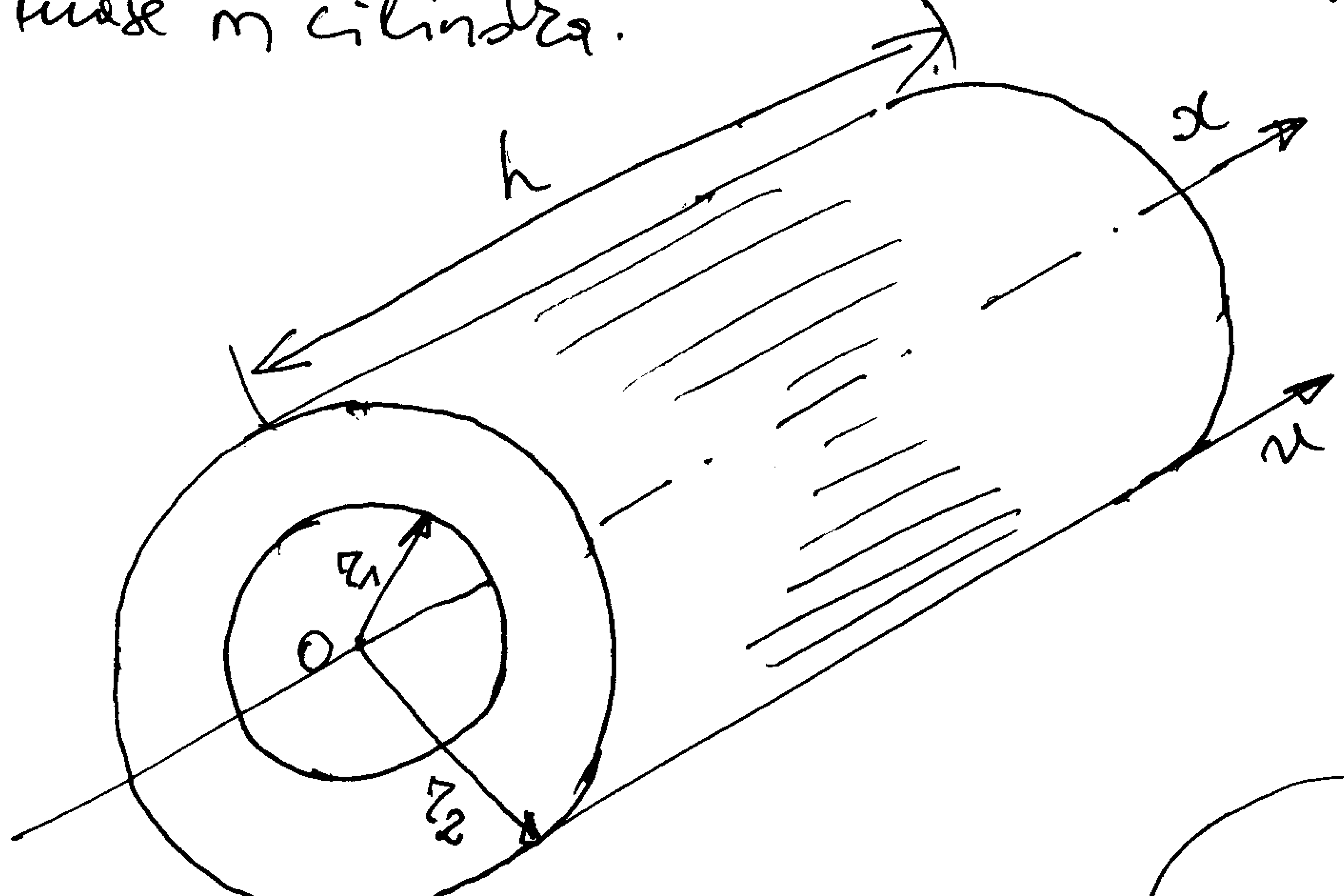
$\overline{AC_1} = \frac{l}{2}$, $\overline{AC_2}^2 = l^2 + l^2$

$$\Rightarrow \boxed{J_{Az} = 5ml^2}, \quad \boxed{i_{Az} = \sqrt{\frac{J_{Az}}{m_{ABD}}} = l\sqrt{\frac{5}{3}}}$$

c) Hajgens-Štajnerova teor. $\Rightarrow J_{Az} = J_{Cz} + m_{ABD} \overline{AC}^2$, $m_{ABD} = 3m$

$$\overline{AC}^2 = x_c^2 + y_c^2 = \frac{41}{36} l^2, \Rightarrow \boxed{J_{Cz} = \frac{19}{12} ml^2}$$

1. Izračunati momente inercije homogenog šupljeg cilindra za ose prikazane na slici i izraziti ih kako preko gustine ρ, tako i preko mase m cilindra.



(vidi predavanja)

– Moment inercije homogenog punog cilindra, mase m i poluprečnika osnove R, za uzdužnu osu simetrije je $J_x = \frac{mR^2}{2}$, a kako je $m = \rho V = \rho R^2 \pi h$, h - visina cilindra, biće

$$J_x = \rho \frac{R^4 \pi h}{2}$$

Možemo smatrati da je šuplji cilindar nastao iz punog cilindra poluprečnika osnove r_2, "vađenjem" punog koaksijalnog cilindra poluprečnika osnove r_1.

$$\Rightarrow \quad J_x^{š.c.} = J_x^{(2)} - J_x^{(1)}, \quad J_x^{(1)} = \rho \frac{r_1^4 \pi h}{2}, \quad J_x^{(2)} = \rho \frac{r_2^4 \pi h}{2}$$

$$\boxed{J_x^{š.c.} = \frac{\pi \rho h}{2}(r_2^4 - r_1^4)}$$

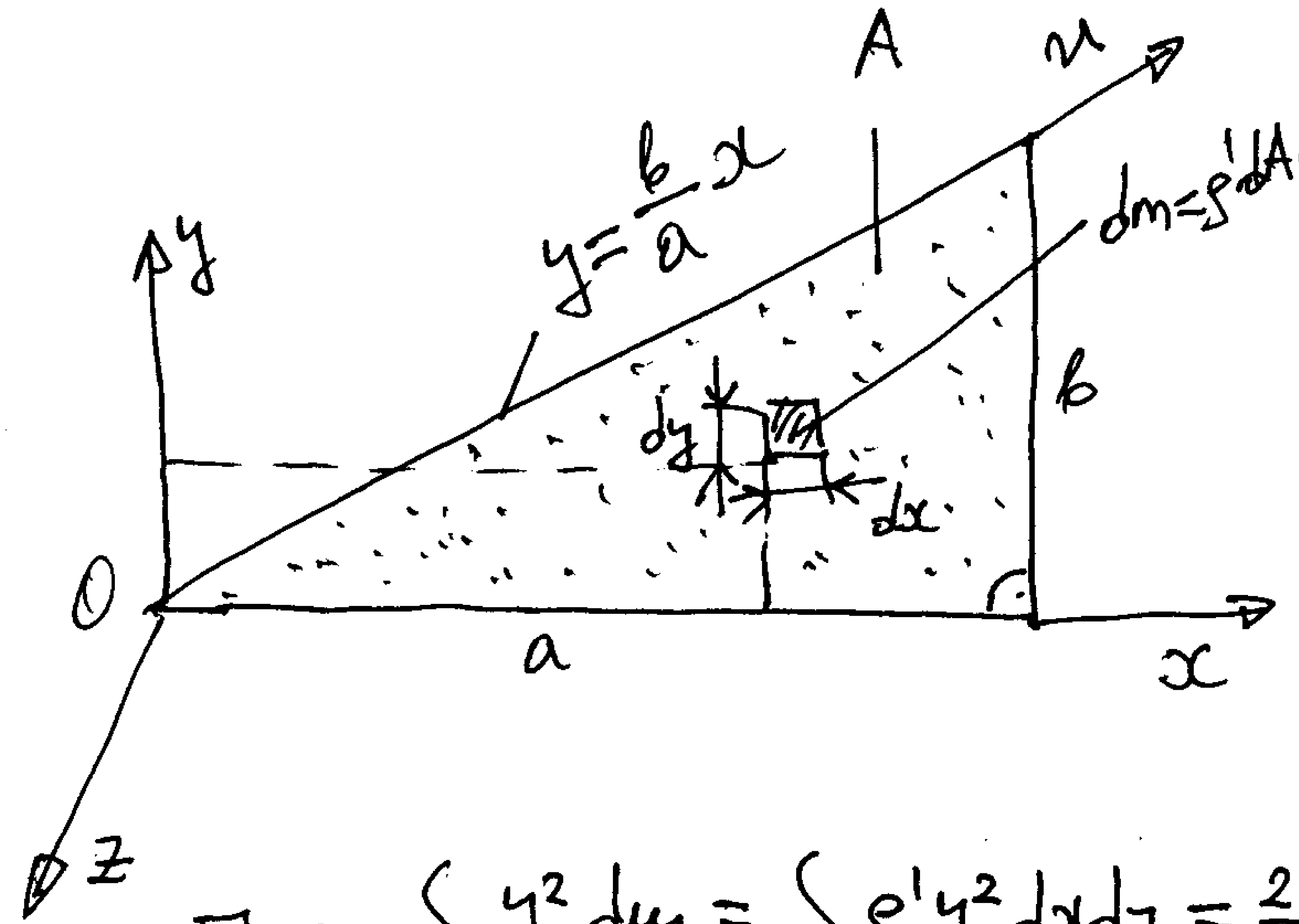
$$\rho = \frac{m}{V^{š.c.}} = \frac{m}{(r_2^2 - r_1^2)\pi h}, \qquad r_2^4 - r_1^4 = (r_2^2 - r_1^2)(r_2^2 + r_1^2)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{J_x^{š.c.} = \frac{m}{2}(r_1^2 + r_2^2)}$$

$$J_u^{š.c.} = J_x^{š.c.} + m r_2^2 = \boxed{\frac{m}{2}(r_1^2 + 3r_2^2)}$$

Hajgens-Štajnerova teorema

3. Odrediti momente inercije homogene tanke pločice (mase m) oblika pravouglog trougla kateta a i b za ose koordinatnog sistema $Oxyz$. Koliki je moment inercije ploče za osu u koja prolazi kroz hipotenuzu trougla.



– elementarna masa (dm) smještena na elementarnoj površini ploče

$dA = dx\,dy$ je

$dm = \rho' dx\,dy$, ρ' – površinska gustina

$\rho' = \frac{m}{A}$, A – površina ploče $= ab/2$

$\rho' = \frac{2m}{ab}$

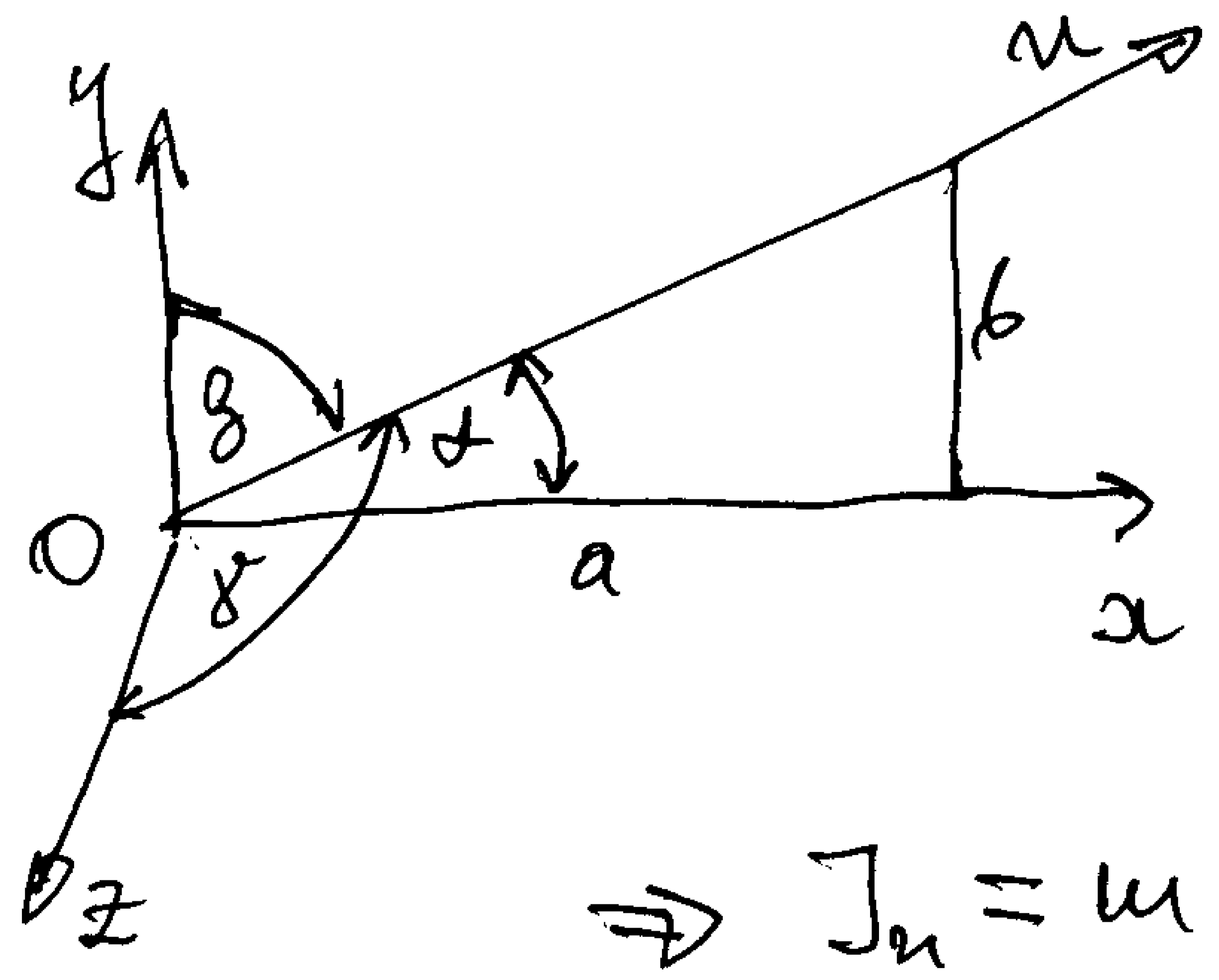
$$J_x = \int_{(m)} y^2 dm = \int_{(A)} \rho' y^2 dx\,dy = \frac{2m}{a\cdot b}\int_0^a \int_0^{\frac{b}{a}x} y^2 dy = \boxed{\frac{mb^2}{6}}$$

$$J_y = \int_{(m)} x^2 dm = \frac{2m}{a\cdot b}\int_0^a \int_0^{\frac{b}{a}x} x^2 dx\,dy = \frac{ma^2}{2}$$

Masa raspoređena u ravni $Oxy \Rightarrow J_z = J_x + J_y = m\left(\frac{a^2}{2}+\frac{b^2}{6}\right)$

$$J_{xz} = \int_{(m)} x\cancel{z}\,dm = 0, \quad J_{yz} = \int_{(m)} y\cancel{z}\,dm = 0$$

$$J_{xy} = \int_{(m)} xy\,dm = \frac{2m}{ab}\int_0^a \int_0^{\frac{b}{a}x} xy\,dx\,dy = \boxed{\frac{m}{4}ab}$$

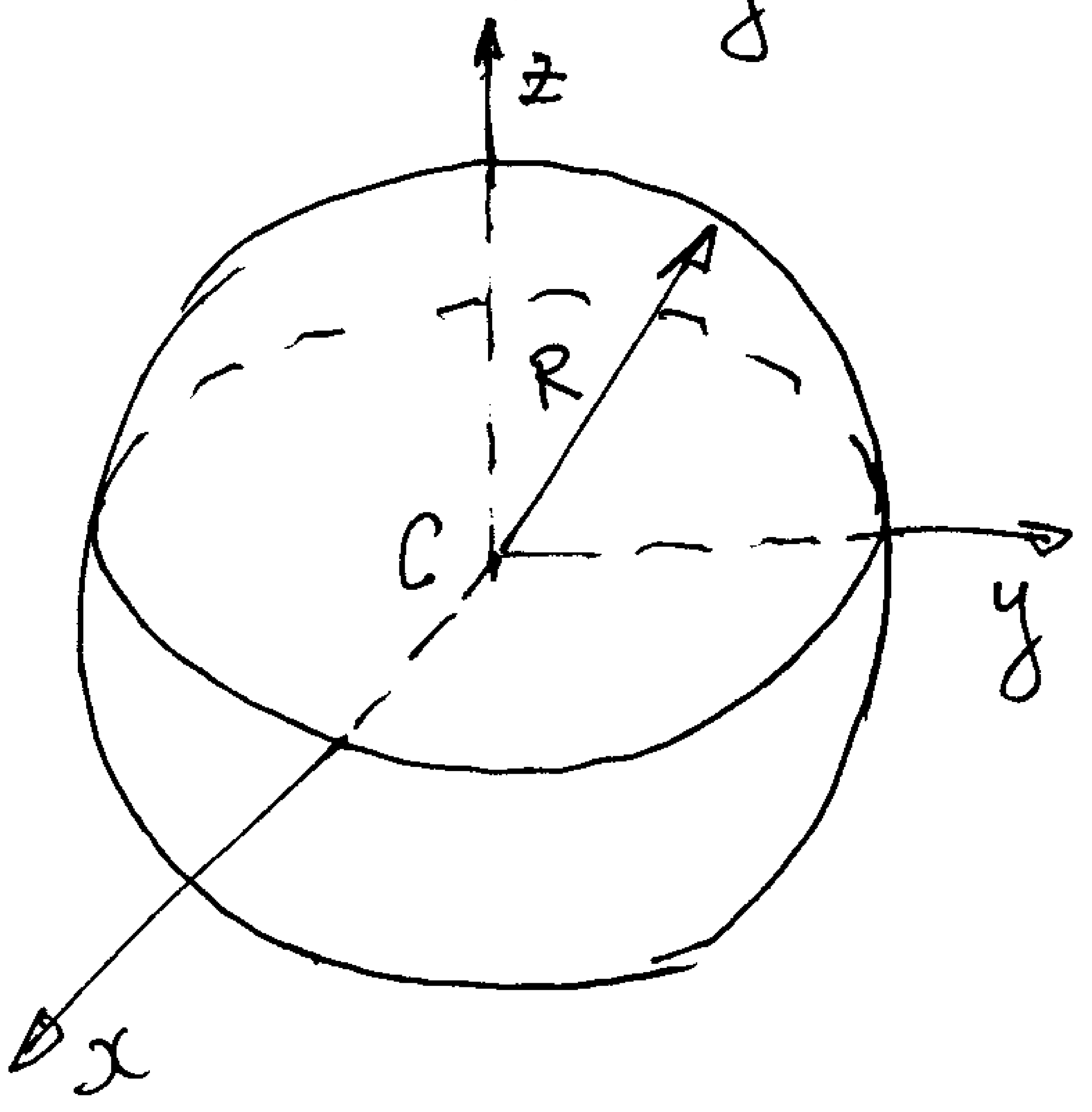


$$J_u = J_x\cos^2\alpha + J_y\cos^2\beta + J_z\cos^2\gamma - 2J_{xy}\cos\alpha\cos\beta - 2J_{xz}\cos\alpha\cos\gamma - 2J_{yz}\cos\beta\cos\gamma$$ (v. predavanja)

$$\cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad \cos\beta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad \gamma = \frac{\pi}{2} \to \cos\gamma = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{J_u = m\frac{3a^4+b^4+5a^2b^2}{3(a^2+b^2)}}$$

4. Odrediti momente inercije homogene lopte, mase m i poluprečnika R, za ose centralnog koordinatnog sistema $Cxyz$.

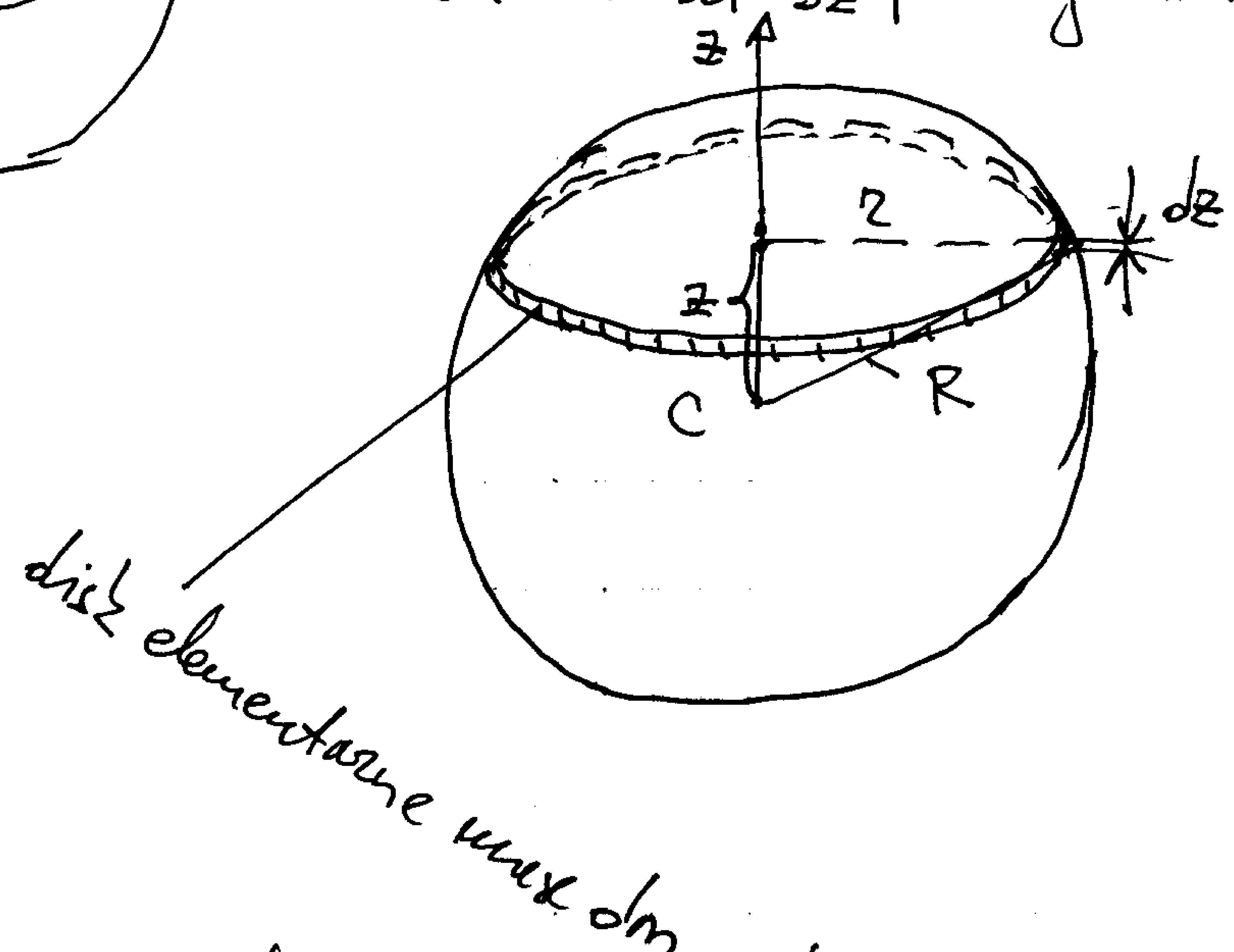


Zbog materijalne simetrije je

$J_{xy} = J_{xz} = J_{yz} = 0$ (tj. $Cxyz$ je sistem centralnih glavnih osa), a također i

$J_x = J_y = J_z$

Da bi našli J_z primijenimo metod presjeka.



Primjenjujući na disk elementarne mase dm izraz za moment inercije diska za centralnu osu upravnu na njegovu ravan (v. predavanja) imamo da je

$$dJ_z = J_z(dm) = \frac{dm\, r^2}{2}$$

$dm = \rho\, dV$, $dV = r^2 \pi\, dz$ – zapremina elementarnog diska

$\rho = \frac{m}{V}$, $V = \frac{4}{3} R^3 \pi$ – zapremina lopte

$$dJ_z = \frac{3m}{8R^3} r^4 dz, \quad r^2 = R^2 - z^2$$

$$J_z = \int_{-R}^{R} \frac{3m}{8R^3}(R^2 - z^2)dz = \frac{3m}{8R^3}\int_{-R}^{R}(R^2 - z^2)dz = \boxed{\frac{2}{5} mR^2}$$