

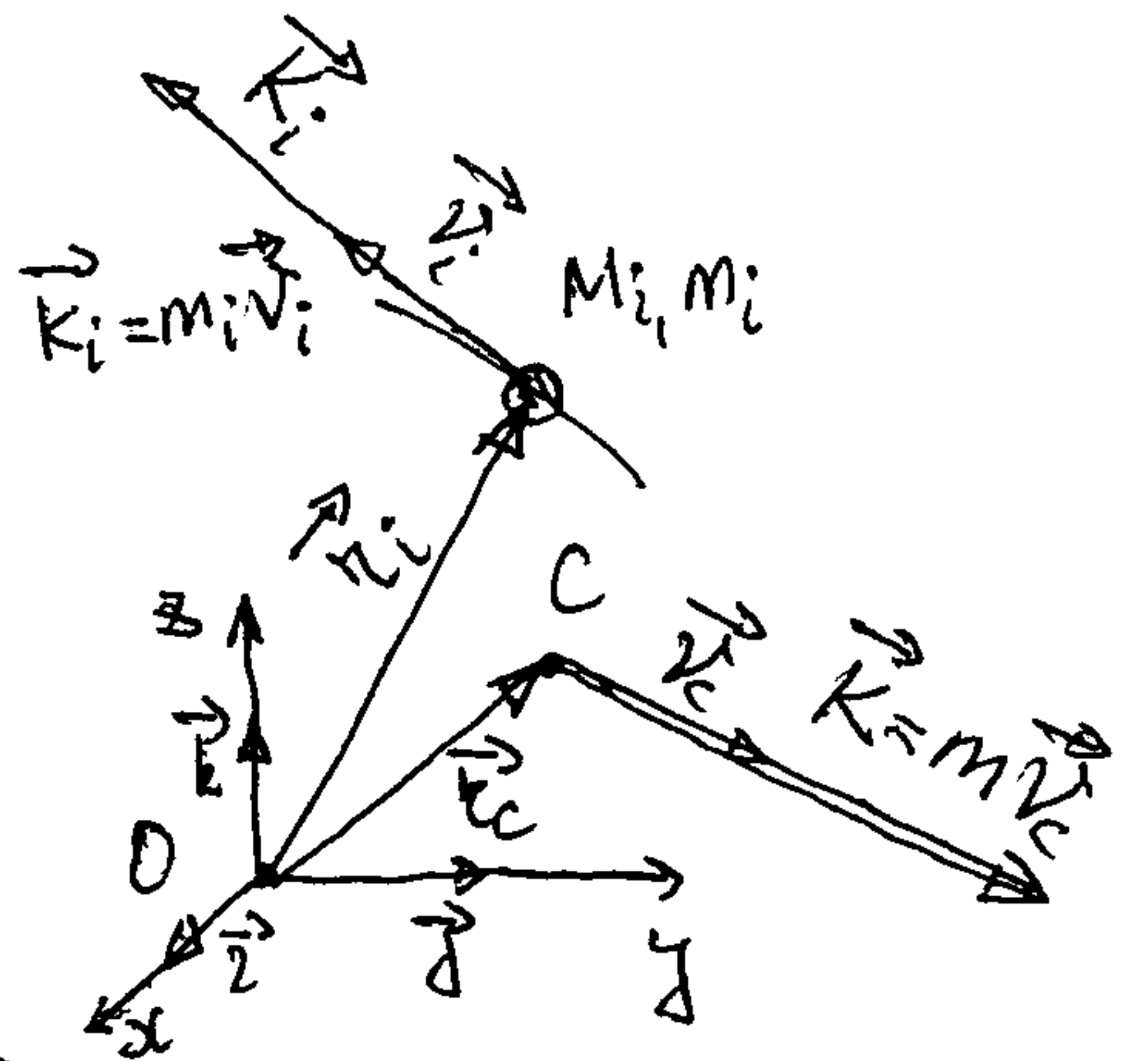
✓ sednica nastave
→ predavanja se primjerizima →

5. Zakon o promjeni količine kretanja sistema

5.1 Količina kretanja sistema

Količina kretanja sistema materijalnih tačaka je vektor \vec{K} koji je jednak vektorskom zbiru (glavnom vektoru) količina kretanja pojedinih materijalnih tačaka sistema:

$$\vec{K} = \sum \vec{K}_i = \sum m_i \vec{v}_i$$



Pošto je $\sum m_i \vec{v}_i = \frac{d}{dt} \sum m_i \vec{r}_i$, i $\sum m_i \vec{r}_i = M \vec{r}_c$ (v. 3.1), to je

$$\vec{K} = M \vec{v}_c, \quad (1)$$

odnosno

$$\vec{K} = K_x \vec{i} + K_y \vec{j} + K_z \vec{k}, \quad K_x = M \dot{x}_c, \quad K_y = M \dot{y}_c, \quad K_z = M \dot{z}_c; \quad (1')$$

tj. količina kretanja sistema jednaka je proizvodu mase sistema i brzine centra inercije.

Obrazac (1) naročito je pogodan za izračunavanje količine kretanja krutog tijela.

5.2 Diferencijalni oblik zakona o promjeni količine kretanja

Ako diferencijalne jednačine kretanja tačaka sistema (2.1) zapišemo u obliku:

$$\frac{d}{dt} (m_i \vec{v}_i) = \vec{F}_i^s + \vec{F}_i^u \quad (i=1, \dots, n)$$

i sve ih sabereću, dobijemo

$$\frac{d}{dt} \underbrace{\left(\sum m_i \vec{v}_i \right)}_{=\vec{K}} = \underbrace{\sum \vec{F}_i^s}_{=\vec{F}_e^s} + \underbrace{\sum \vec{F}_i^u}_{=\vec{F}_e^u},$$

odnosno

$$\frac{d\vec{K}}{dt} = \vec{F}_e^s \quad (1)$$

jer je glavni vektor unutrašnjih sila jednak nuli ($\vec{F}_e^u = 0$, v. odjeljak 1).

Relacija (1) izražava zakon o promjeni količine kretanja sistema u diferencijalnom obliku: Izvod po vremenu količine kretanja sistema jednak je vektorskom zbiru (glavnom vektoru) svih spoljašnjih sila koje djeluju na sistem.

Ako poznju relaciju projiciramo na koordinatne ose dobicemo tri skalarne relacije:

$$\frac{dK_x}{dt} = \sum F_{ix}^s = F_{ex}^s, \quad \frac{dK_y}{dt} = \sum F_{iy}^s = F_{ey}^s, \quad \frac{dK_z}{dt} = \sum F_{iz}^s = F_{ez}^s, \quad (1')$$

koje izražavaju zakone o promjeni projekcija količine kretanja na ose datog koordinatnog sistema.

Iz (1), odnosno (1'), dobijemo sljedeće važne posljedice:

- 1) Unutrašnje sile direktno ne utiču na promjenu količine kretanja.
- 2) Ako je glavni vektor spoljašnjih sila jednak nuli, $\vec{F}_z^s = 0$, onda je količina kretanja sistema konstantan vektor, tj.

$$\vec{K} = \text{const},$$

što predstavlja zakon o održanju (konzervaciji) količine kretanja.

- 3) Ako je zbir projekcija spoljašnjih sila na neku os jednak nuli (npr. $F_{zx}^s = 0$), onda je projekcija količine kretanja sistema na tu os konstantna veličina, tj.

$$K_x = \text{const}$$

Ovaj rezultat izražava zakon o održanju projekcije količine kretanja.

5.3 Integralni oblik zakona o promjeni količine kretanja (zakon impulsa)

Ako se obje strane jednačine (5.2.1) pomnože sa dt , a zatim integriše u vremenskom intervalu $t_0 - t$, dobija se

$$\int_{t_0}^t d\vec{K} = \int_{t_0}^t \vec{F}_z^s dt,$$

ili

$$\vec{K}(t) - \vec{K}(t_0) = \int_{t_0}^t \vec{F}_z^s dt$$

Označavajući sa \vec{K} količinu kretanja u trenutku t , a sa \vec{K}_0 u trenutku t_0 , i koristeći definiciju impulsa sile, konačno dobijamo

$$\vec{K} - \vec{K}_0 = \vec{I}_z^s \quad (1)$$

gdje je $\vec{I}_z^s = \int_{t_0}^t \vec{F}_z^s dt = \sum \int_{t_0}^t \vec{F}_i^s dt = \sum \vec{I}_i^s$ - glavni vektor impulsa spoljašnjih sila.

Dakle, promjena količine kretanja sistema za neki konačni interval vremena jednaka je glavnom vektoru impulsa spoljašnjih sila u tom vremenskom intervalu.

U obliku projekcija na koordinatne ose bide:

$$K_x - K_{0x} = I_{zx}^s = \sum I_{ix}^s$$

$$K_y - K_{0y} = I_{zy}^s = \sum I_{iy}^s$$

$$K_z - K_{0z} = I_{zz}^s = \sum I_{iz}^s$$

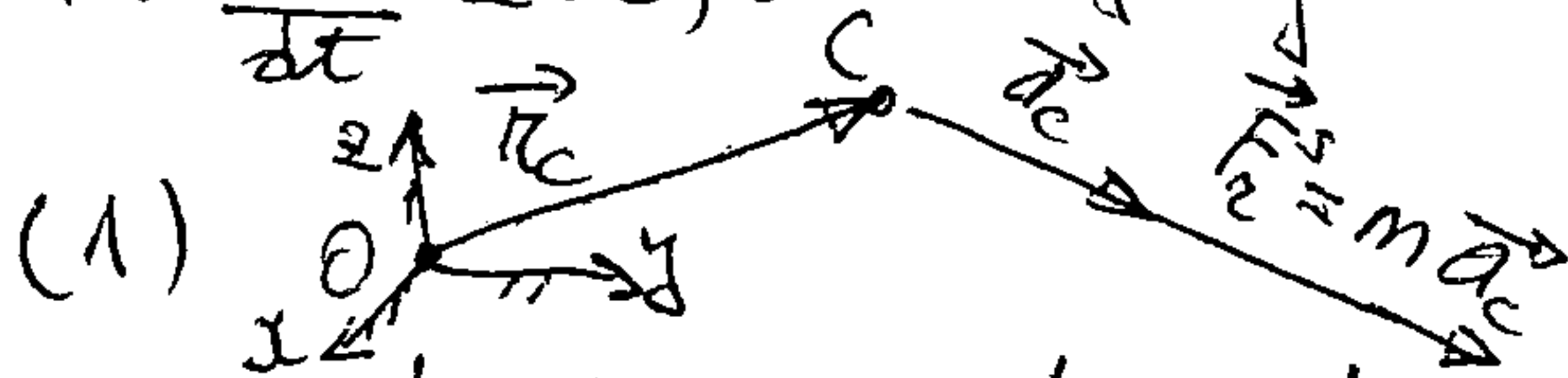
} (1')

gdje je npr. I_{zx}^s zbir projekcija impulsa spoljašnjih sila na osu x .

5.4 Zakon o kretanju centra inercije sistema

Ako se uzme u obzir da je $\vec{K} = m\vec{v}_c$, zakon o promjeni količine kretanja (5.2.1), imajući u vidu da je masa sistema konstantna i $\frac{d\vec{K}}{dt} = \vec{a}_c$, se modifikuje na oblik

$$m\vec{a}_c = \vec{F}_z^s \quad (1)$$



Gornja jednačina izražava zakon o kretanju centra inercije sistema koji se može formulirati na sledeći način: Centar inercije sistema kreće se kao materijalna tačka, čija je masa jednaka masi sistema i na koju deluje sila koja je jednaka glavnom vektoru svih spoljašnjih sila koje deluju na sistem.

Projicirajući vektorsku jednačinu (1) na koordinatne ose, pošto je $\vec{a}_c = \ddot{r}_c = \ddot{x}_c \vec{e}_1 + \ddot{y}_c \vec{e}_2 + \ddot{z}_c \vec{e}_3$, dobijamo:

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{x}_c &= F_{zx}^s \\ m\ddot{y}_c &= F_{zy}^s \\ m\ddot{z}_c &= F_{z3}^s \end{aligned} \right\} \quad (1')$$

Ove jednačine predstavljaju diferencijalne jednačine kretanja centra inercije sistema izražene u obliku projekcija na koordinatne ose.

Specijalno, translatorno kretanje krutog tijela određeno je u potpunosti kretanjem njegovog centra inercije. Prema tome, tijelo koje se kreće translatorno može se uvijek smatrati materijalnom tačkom, čija je masa jednaka masi celog tijela. U ostalim slučajevima, zamjena krutog tijela materijalnom tačkom doprskiva je samo tada, kada je, praktično, za određivanje položaja tijela, dovoljno da se zna samo položaj njegovog centra inercije.

Posledice:

1) Unutrašnje sile direktno ne utiču na kretanje centra inercije sistema. One mogu posredno preko spoljašnjih sila uticati na kretanje centra inercije.

2) Zakon o održanju kretanja centra inercije

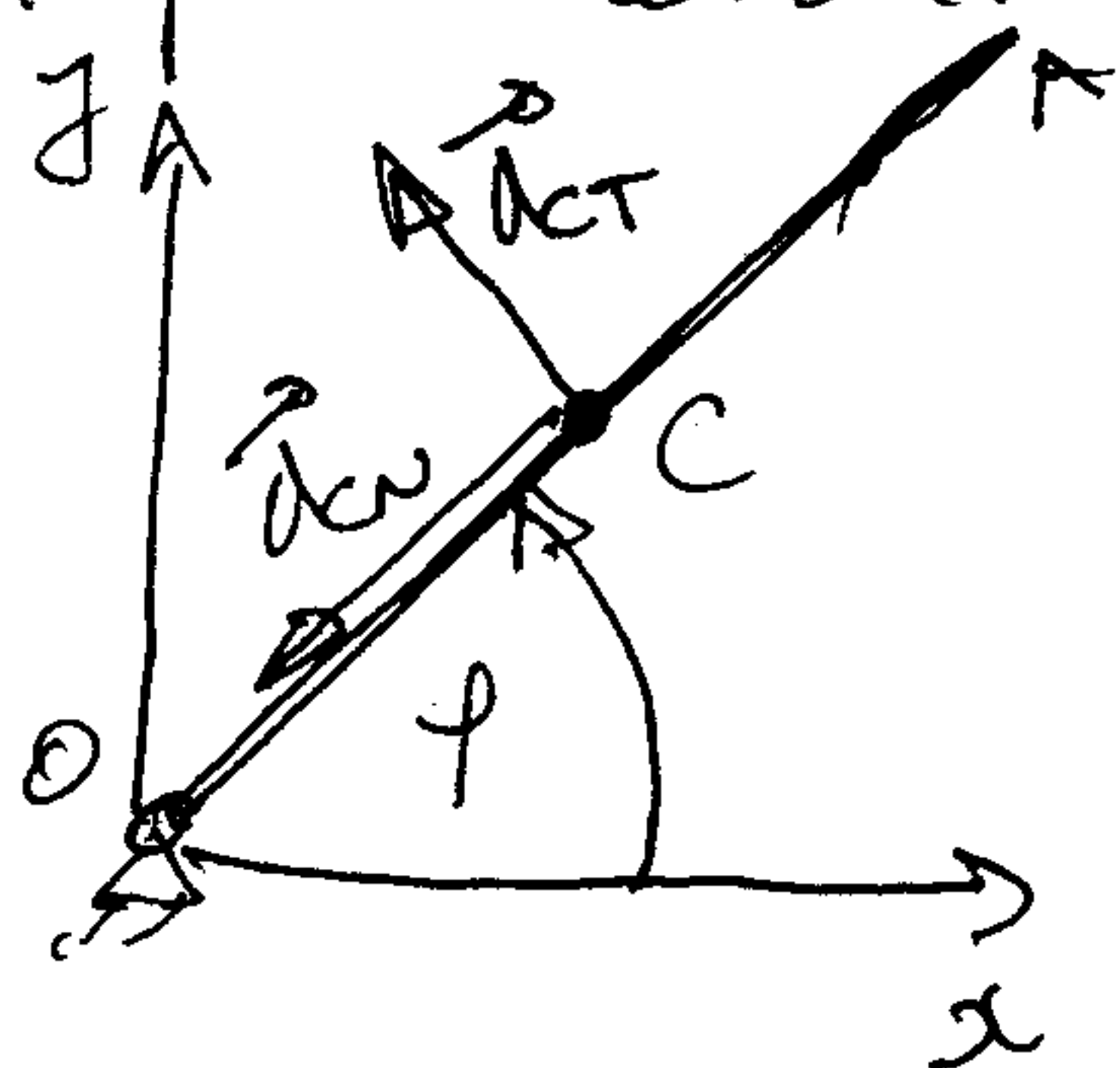
$$a) \vec{F}_z^s = 0 \xrightarrow{(1)} \vec{a}_c = \ddot{r}_c = 0 \rightarrow \dot{r}_c = \text{const} = \vec{v}_{c0} \rightarrow r_c = \vec{v}_{c0} t + r_{c0}$$

Dakle, ako je glavni vektor spoljašnjih sila jednak nuli, onda se, zavisno od početnih uslova, centar inercije kreće jednoliko i pravolinijski (početna brzina $v_{c0} \neq 0$) ili miruje ($v_{c0} = 0$).

$$b) F_z^s \neq 0, F_{zx}^s = 0 \xrightarrow{(1)'} \ddot{x}_c = 0 \rightarrow \dot{x}_c = \text{const} = \dot{x}_{c0} \rightarrow x_c = \dot{x}_{c0} t + x_{c0}$$

Ako je zbir projekcija spoljašnjih sila, koje deluju na sistem, na neku osu jednak nuli, onda je projekcija centra inercije na tu osu nepočetna (pri $\dot{x}_{c0} = 0$) ili se kreće ravnomjerno.

1. Homogeni štap OA dužine l i mase m nepobornice se okreće oko tačke O štapu i njegova npravnica p rotirani $\varphi = \pi t^2/2$. Odrediti pravac glavnog vektora spoljašnjih sila koje djeluju na štap u trenutku $t_0 = 0$.



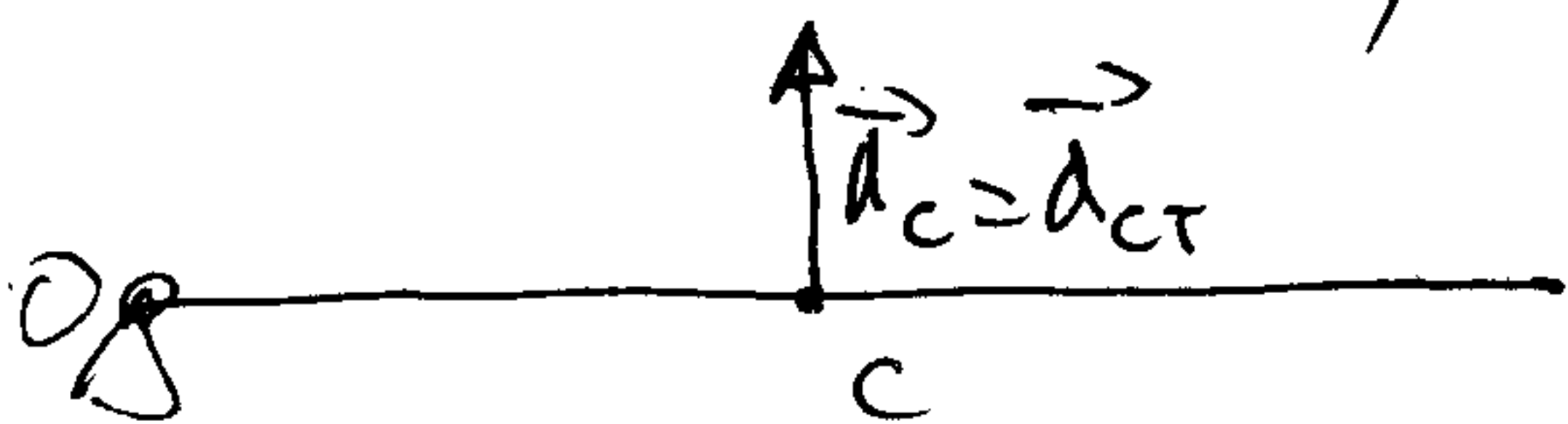
$$m \vec{a}_C = \vec{F}_z$$

$$\vec{a}_C = \vec{a}_{CN} + \vec{a}_{CT}, \quad a_{CN} = \overline{OC} \omega^2, \quad a_{CT} = \overline{OC} \epsilon$$

$$\omega = \dot{\varphi} = \pi t, \quad \epsilon = \dot{\omega} = \dot{\dot{\varphi}} = \pi$$

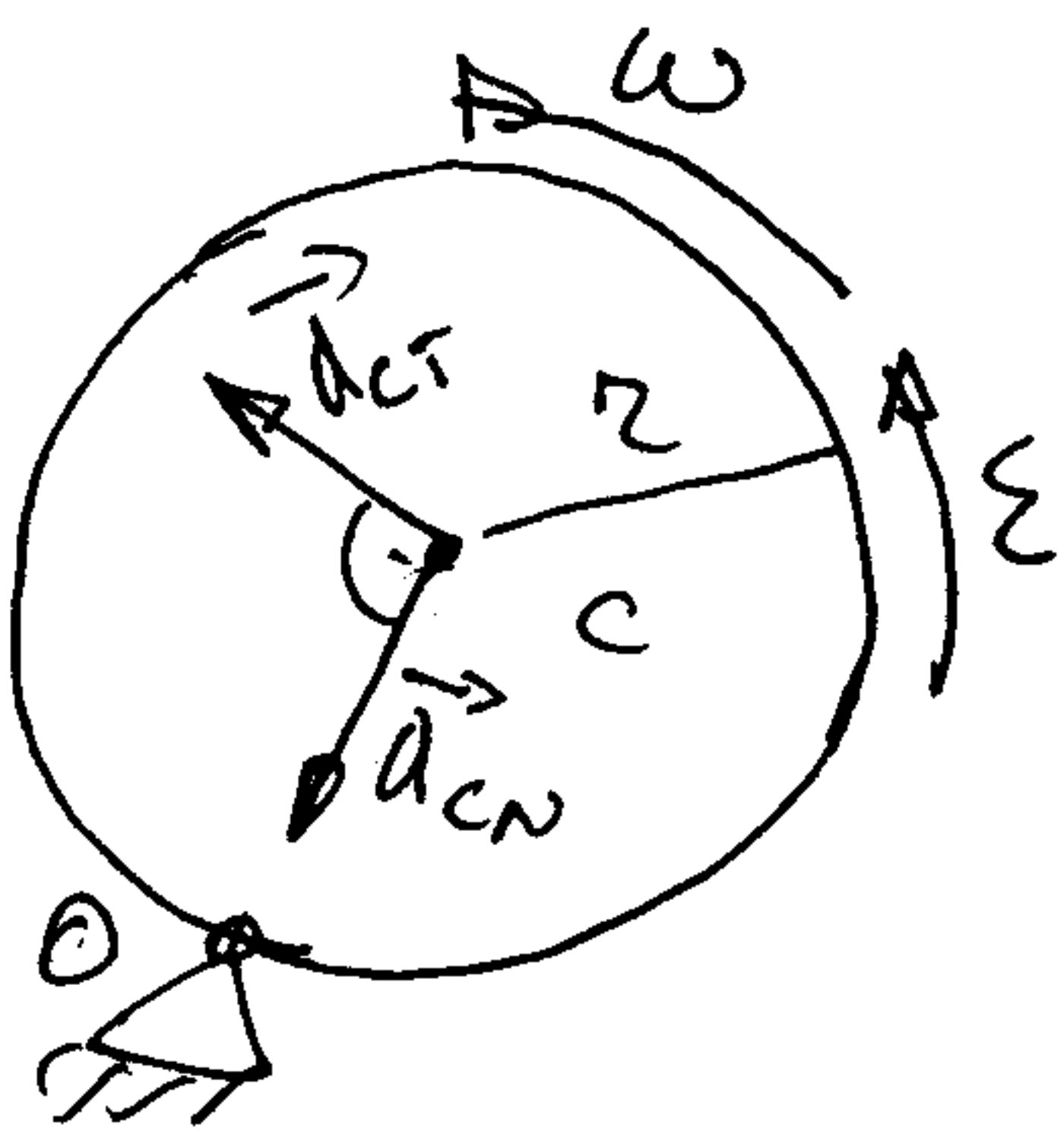
$$a_{CN} = \overline{OC} \pi^2 t^2, \quad a_{CT} = \overline{OC} \pi$$

Za $t = t_0 = 0$ je $a_{CN} = 0, a_{CT} = \overline{OC} \pi$



$\vec{F}_z = m \vec{a}_C \Rightarrow$ Glavni vektor spoljnjih sila je usmjeren naviše paralno sa y osom.

2. Homogeni disk poluprečnika $r = 0,2 \text{ m}$ i mase $m = 30 \text{ kg}$ obzice se oko nepobornice O u pravcu na ravan diska koje se nalazi na rastojanju R od njegovog centra C . Odrediti intenzitet glavnog vektora spoljašnjih sila $\vec{F}_z^{(s)}$ koje djeluju na disk u trenutku kada je ugaona brzina diska $\omega = 1 \text{ rad/s}$, a njegovo ugaono ubrzanje je $\epsilon = 4\sqrt{5} \text{ rad/s}^2$.

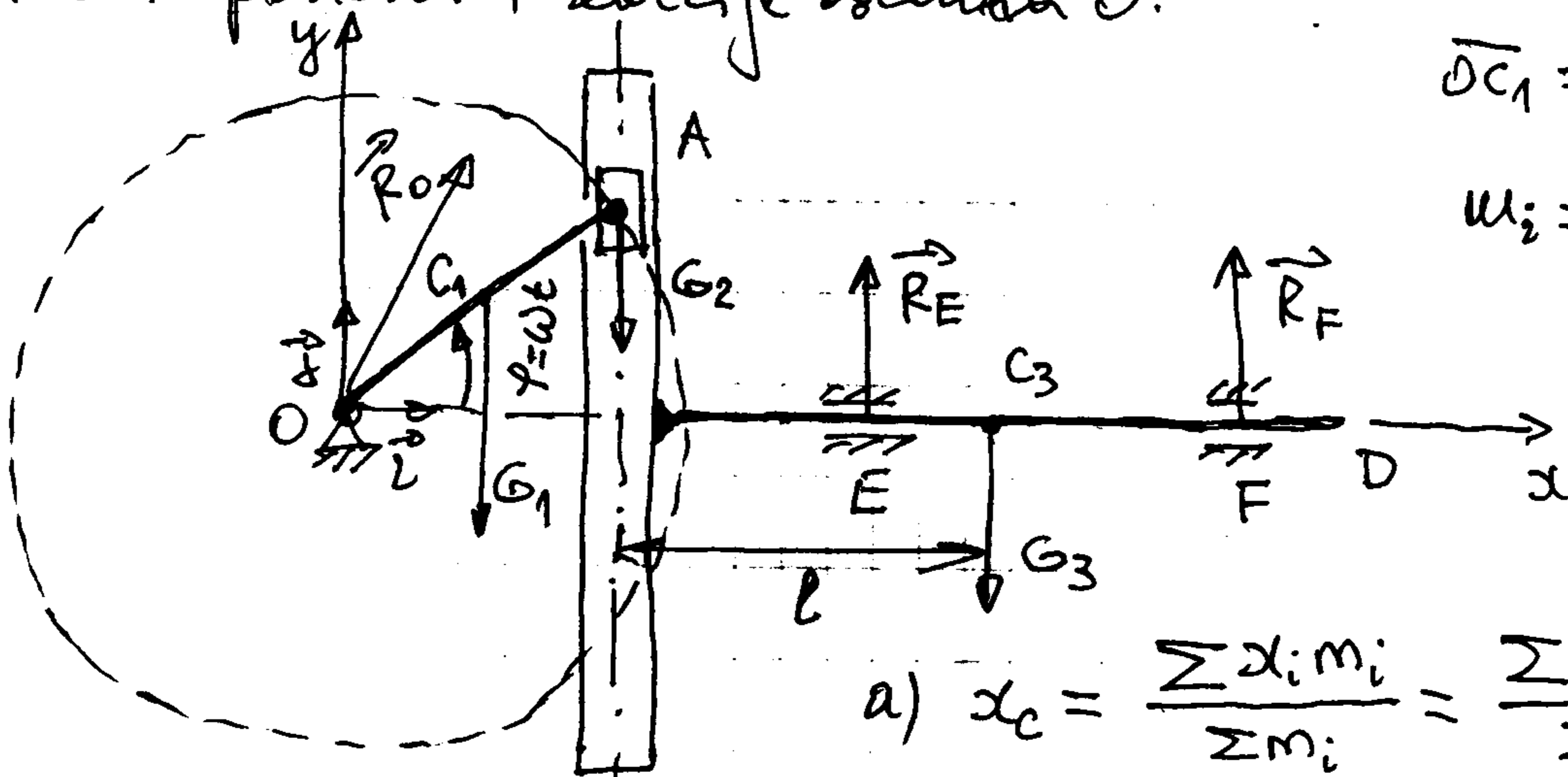


$$\vec{F}_z^{(s)} = m \vec{a}_C, \quad \vec{a}_C = \vec{a}_{CN} + \vec{a}_{CT}$$

$$F_z^{(s)} = m a_C, \quad a_{CN} = R \omega^2, \quad a_{CT} = R \epsilon$$

$$F_z^{(s)} = m R \sqrt{\omega^4 + \epsilon^2} = 30 \cdot 0,2 \sqrt{1 + 80} = 54 \text{ N}$$

③ Kulisni mehanizam koji leži u vertikalnoj ravni sastoji se od krivajae OA (homogeni štap dužine l) težine G_1 , klizača A težine G_2 i translatorsno pokretna u horizontalnom pravcu kulise kruto vezane za štap BD ukupne težine G_3 . Težište kulise i štapa nalazi se u tački C_3 pri čemu je $\overline{BC_3} = l$. Krivaja se dođe konstantnom ugaonom brzinom ω , a u početnom trenutku klizač A se nalazio u krajnjem desnom položaju. a) Odrediti jednadžim putanje centra inercije datog mehanizma. b) Odrediti količinu kretanja i proizvođašim trenutak. c) Odrediti glavni vektor spoljašnjih sila. d) Odrediti horizontalnu komponentu reakcije oslonca O.



$$\overline{OC_1} = \frac{l}{2}, \overline{OA} = l$$

$$\omega_i = \frac{G_i}{g}$$

$$a) x_c = \frac{\sum x_i m_i}{\sum m_i} = \frac{\sum x_i G_i}{\sum G_i}, y_c = \frac{\sum y_i G_i}{\sum G_i}$$

$$x_1 = x_{c1} = \frac{l}{2} \cos \omega t, x_2 = x_A = l \cos \omega t, x_3 = x_{c3} = l + l \cos \omega t$$

$$y_1 = \frac{l}{2} \sin \omega t, y_2 = l \sin \omega t, y_3 = 0$$

$$\Rightarrow \left. \begin{aligned} x_c &= A + B \cos \omega t \\ y_c &= C \sin \omega t \end{aligned} \right\} (1), \text{ gdje su: } A = \frac{G_3 l}{G_1 + G_2 + G_3}, B = \frac{G_1 + 2G_2 + 2G_3}{2(G_1 + G_2 + G_3)} l, C = \frac{G_1 + 2G_2}{2(G_1 + G_2 + G_3)} l$$

$$(1) \Rightarrow \left(\frac{x_c - A}{B} \right)^2 + \left(\frac{y_c}{C} \right)^2 = 1 - \text{elipsa}$$

$$b) \vec{K} = m \vec{v}_c, m = \sum m_i = \frac{G_1 + G_2 + G_3}{g}, \vec{v}_c = \dot{x}_c \vec{i} + \dot{y}_c \vec{j}$$

$$(1) \Rightarrow \vec{K} = \frac{G_1 + G_2 + G_3}{g} (-\vec{i} B \omega \sin \omega t + \vec{j} l \omega \cos \omega t) \quad (2)$$

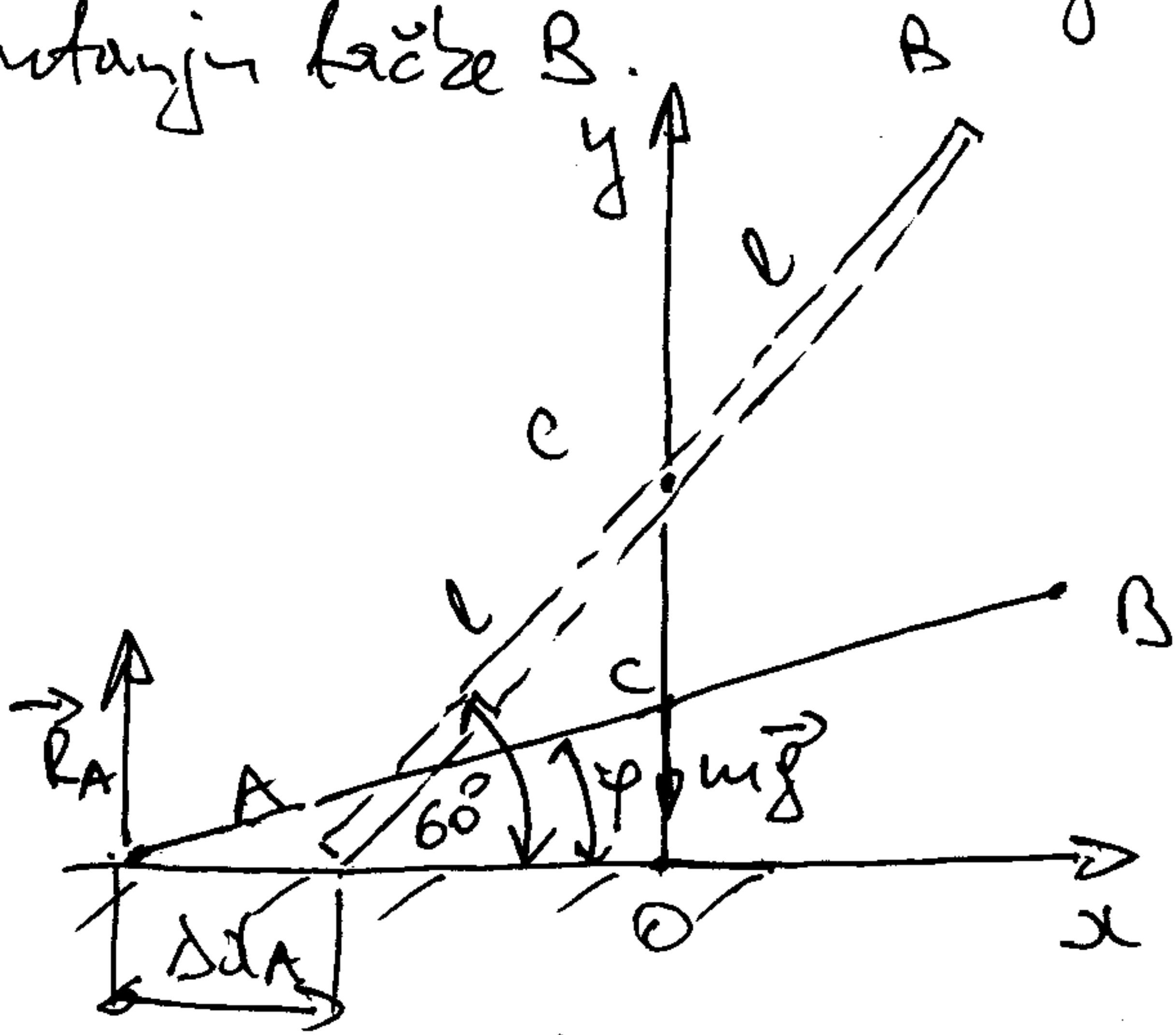
$$c) \frac{d\vec{K}}{dt} = \vec{F}_z^s \stackrel{(2)}{\Rightarrow} \vec{F}_z^s = -\frac{G_1 + G_2 + G_3}{g} \omega^2 (\vec{i} B \cos \omega t + \vec{j} l \sin \omega t) \quad (3)$$

$$d) \vec{F}_z^s = \sum \vec{F}_i^s = \vec{G}_1 + \vec{G}_2 + \vec{G}_3 + \vec{R}_O + \vec{R}_E + \vec{R}_F, F_{zx} = R_{Ox}$$

$$(3) \Rightarrow \frac{dK_x}{dt} = R_{Ox} \Rightarrow R_{Ox} = -\frac{G_1 + G_2 + G_3}{g} B \omega^2 \cos \omega t$$

N. Pretpostavka se pretpostavlja da su ležišta E i F glatke (bez trenja).

4. Homogeni štap AB dužine $2l$ oslanja se krajem A na glatku horizontalnu zavan. U početnom trenutku štap je uizvođen sa horizontalnom ravni gradio ugao od 60° . Odrediti: a) pomjeranje kraja A štapa duž horizontale u zavisnosti od ugla φ koji štap gradi sa horizontalom; b) putanju tačke B.



$$m \vec{a}_c = \sum \vec{F}_i$$

$$m \vec{a}_c = m \vec{g} + \vec{R}_A$$

$$\ddot{x}_c = 0 \Rightarrow \dot{x}_c = \text{const} = \dot{x}_c(t_0) = 0$$

$$\dot{x}_c = 0 \Rightarrow x_c = \text{const} = x_c(t_0) = 0$$

$$x_c \equiv 0 \Rightarrow \text{centar inercije štapa}$$

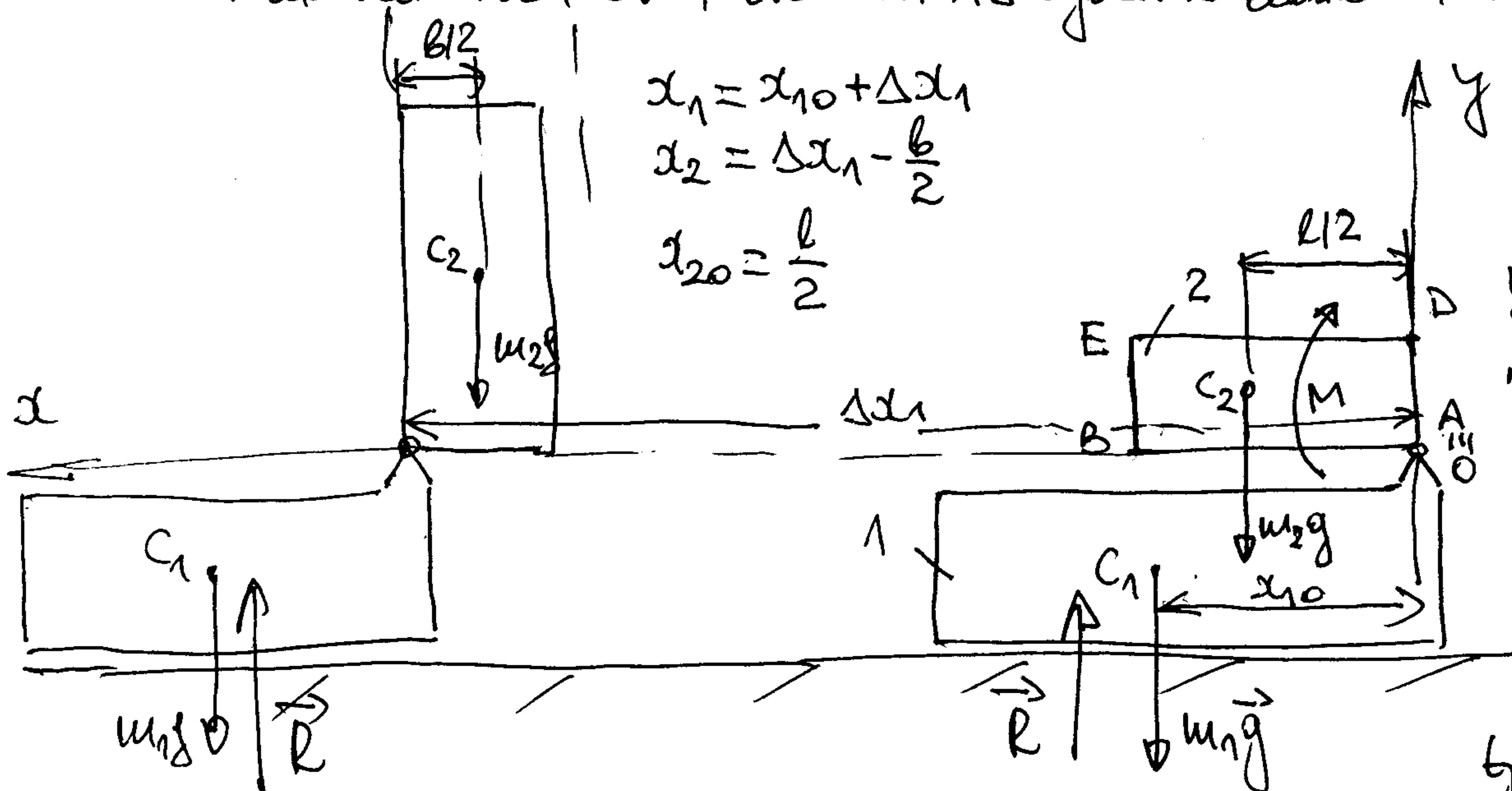
pada vertikalno (po osi y).

N: Koordinatni sistem, kao pokazano da osa y prolazi kroz početni položaj centra inercije štapa.

$$a) \Delta x_A = \cancel{l \cos \varphi} = x_A(\varphi) - x_A(60^\circ) = -l \cos \varphi + l \cos 60^\circ = \frac{l}{2} (1 - 2 \cos \varphi)$$

$$b) x_B = l \cos \varphi, y_B = 2l \sin \varphi \Rightarrow \left(\frac{x_B}{l}\right)^2 + \left(\frac{y_B}{2l}\right)^2 = 1 - \text{elipsa}$$

5. Za tijelo 1 mase m_1 koje se nalazi na glatkoj horizontalnoj ravni vertikalno je cilindričnim zglobom A prizmatično homogeno tijelo 2 mase m_2 , dužine $AB = l$ i širine $AD = b$. Na tijelo 2 djeluje spreg momenta M . Na početku bratanje sistema je uizvođen a strana AB tijela 2 je zauzimala horizontalni položaj. Odrediti pomjeranje tijela 1 po horizontalnoj ravni do trenutka kada strana AB tijela 2 dođe u vertikalni položaj.



$$x_1 = x_{10} + \Delta x_1$$

$$x_2 = \Delta x_1 - \frac{b}{2}$$

$$x_{20} = \frac{l}{2}$$

$$\sum \vec{F}_i = 0$$

Posto je izbor projekcija spojnijih sila na horizontalnu os x da jednak nuli, a sistem uizvođen u početnom trenutku bide

$$x_c = \text{const},$$

$$\text{tj } x_c = x_c(t_0),$$

$$\text{odnosno } m_1 x_{10} + m_2 x_{20} = m_1 x_1 + m_2 x_2 \Rightarrow \Delta x_2 = \frac{m_2 (l+b)}{2(m_1 + m_2)}$$

6. Sanduček A težine G_A nalazi se na strmoj ravni nagiba α klina B težine G_B . U početnom trenutku sistem je bio u miru. Odrediti brzinu klina u trenutku kada je relativna brzina sandučeta u odnosu na klin v_2 . Trenje između klina i horizontalne ravni zanemariti.

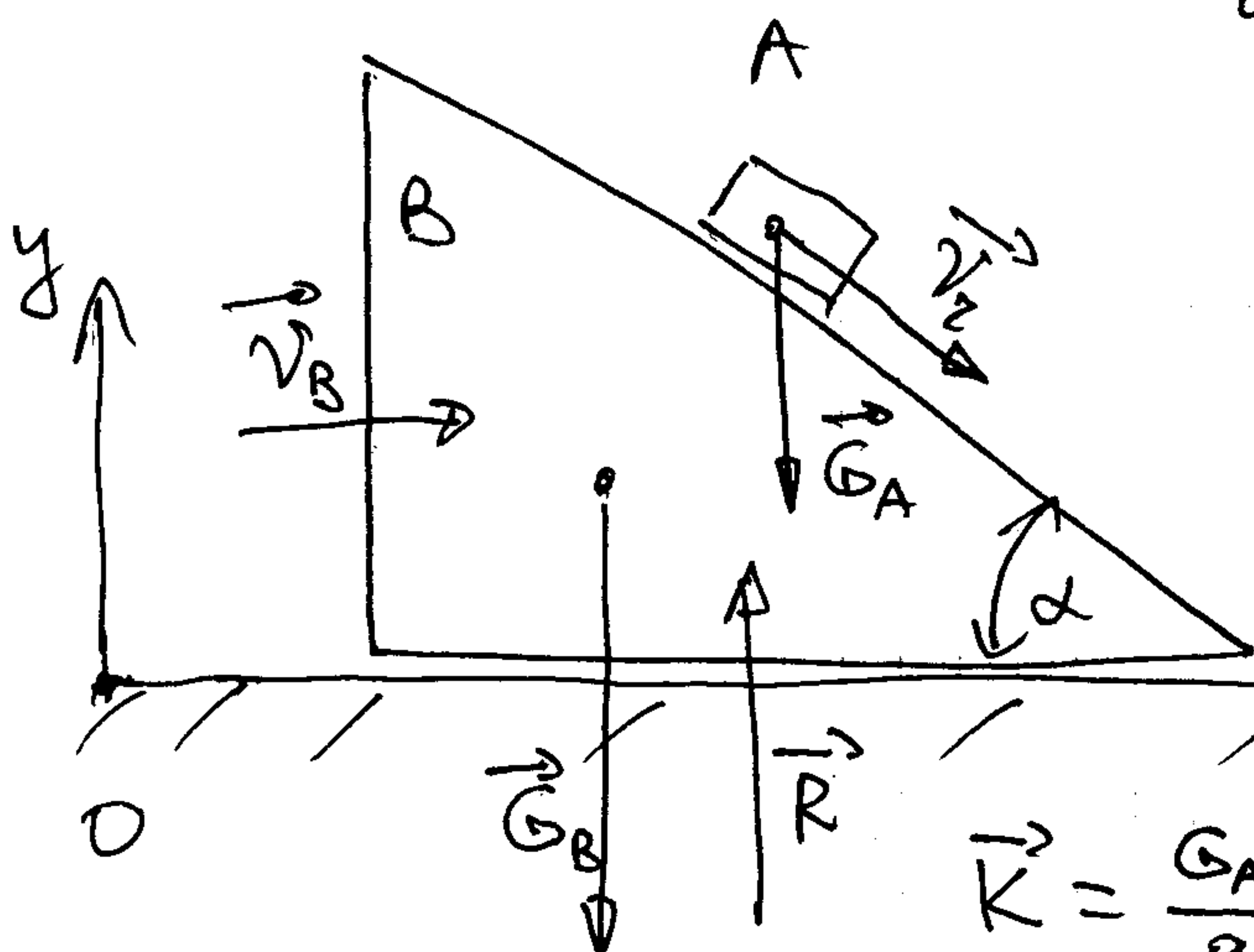
$$\vec{F}_2^s = \sum \vec{F}_i^s = \vec{G}_A + \vec{G}_B + \vec{R}$$

$$F_{2x}^s \equiv 0$$

$$\frac{dK_x}{dt} = F_{2x}^s \equiv 0$$

$$\Rightarrow K_x = \text{const}$$

$$K_x(t) = K_x(t_0)$$

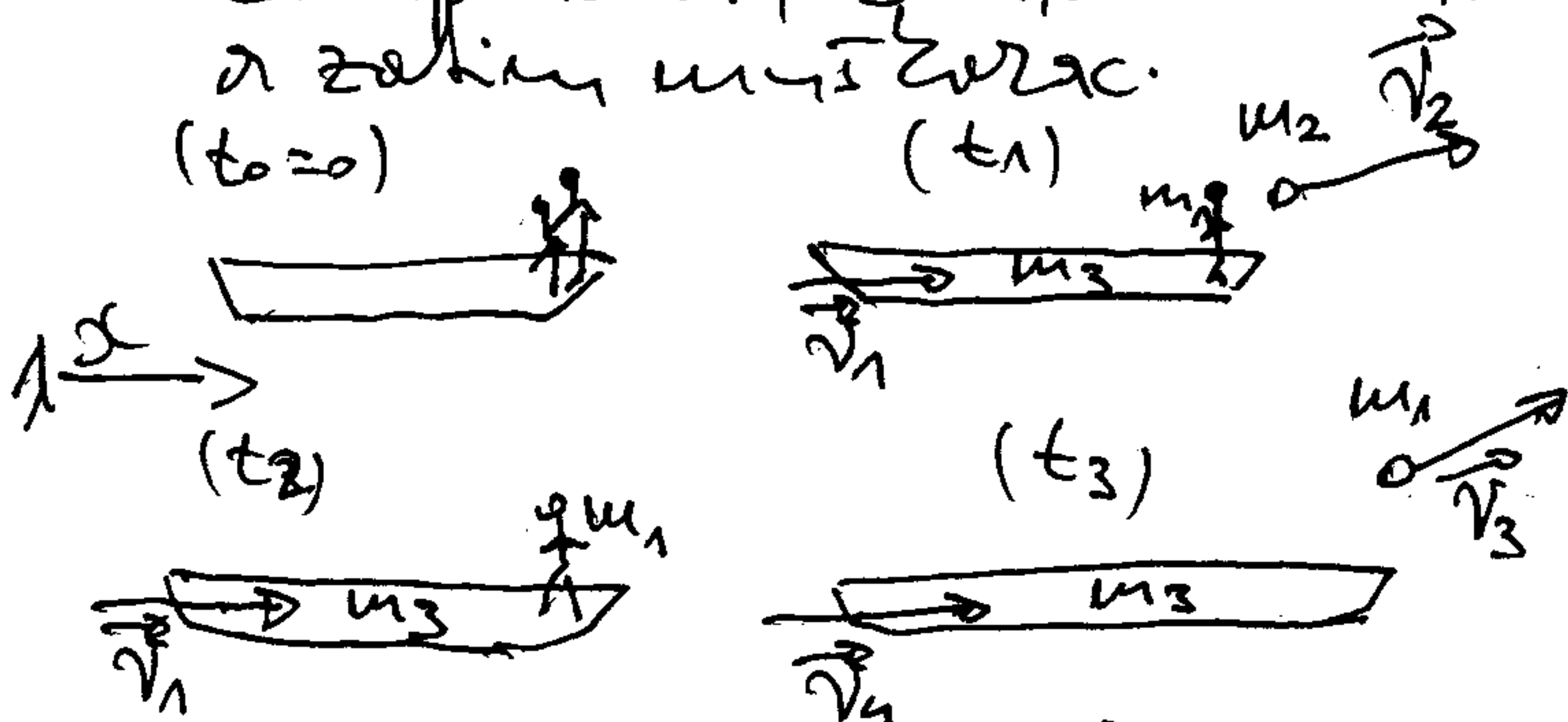


$$\vec{K} = \frac{G_A}{g} \vec{v}_A + \frac{G_B}{g} \vec{v}_B, \quad \vec{v}_A = \vec{v}_p + \vec{v}_2 = \vec{v}_B + \vec{v}_2$$

$$\vec{K} = \frac{G_A + G_B}{g} \vec{v}_B + \frac{G_A}{g} \vec{v}_2, \quad \vec{K}(t_0) = 0 \text{ jer je nit-bio u miru}$$

$$K_x = \frac{G_A + G_B}{g} v_{Bx} + \frac{G_A}{g} v_2 \cos \alpha, \quad K_x = 0 \Rightarrow \boxed{v_{Bx} = -\frac{G_A}{G_A + G_B} v_2 \cos \alpha}$$

7. Muškarac mase $m_1 = 80 \text{ kg}$ i žena mase $m_2 = 55 \text{ kg}$ stoje, jedno pored drugog, na krajn čamcu mase $m_3 = 136 \text{ kg}$ koji miruje na vodi, spremni da istoce čamac relativnom brzinom čija je horizontalna komponenta 5 m/s . Odrediti brzinu čamca posle izlazi prvo žena a zatim muškarac.



Sve spojnice su ok (težine i ota pabizta) su vertikalnog pravca pa vari zakon o održanju projekcije količine gibanja sistema na horizontalni pravcu: $K_x = \text{const}$

$$K_x(t_1) = K_x(t_0) = 0; \quad \vec{K}(t_1) = (m_1 + m_3) \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2, \quad \vec{v}_2 = \vec{v}_1 + \vec{v}_2, \quad v_{2x} = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

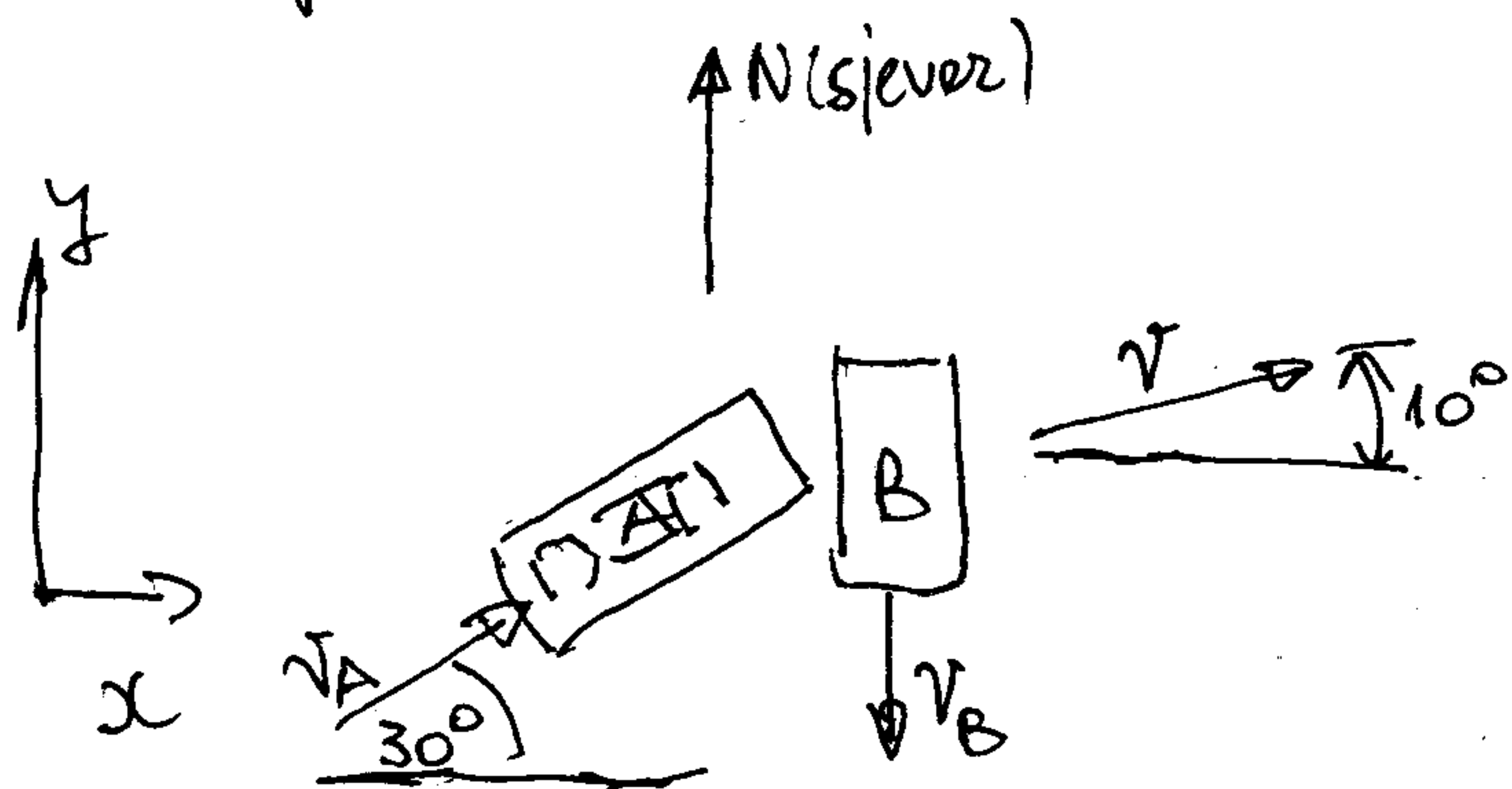
$$(m_1 + m_2 + m_3) v_{1x} + m_2 v_{2x} = 0 \Rightarrow v_{1x} = -\frac{m_2}{m_1 + m_2 + m_3} v_{2x}$$

$$K_x(t_2) = K_x(t_3) \quad ; \quad \vec{v}_3 = \vec{v}_4 + \vec{v}_2$$

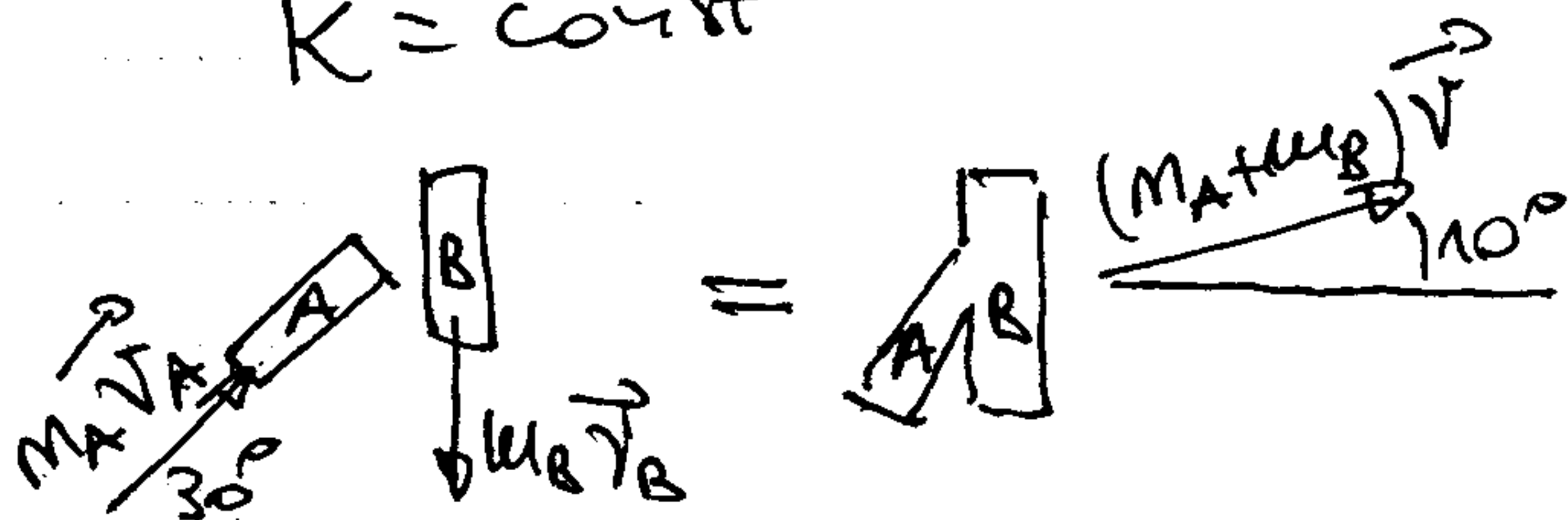
$$(m_1 + m_3) v_{1x} = m_3 v_{4x} + m_1 (v_{4x} + v_{2x}) \Rightarrow v_{4x} = -\left(\frac{m_1}{m_1 + m_3} + \frac{m_2}{m_1 + m_2 + m_3}\right) v_{2x} = -2,87 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\Rightarrow \boxed{v_4 = 2,87 \frac{\text{m}}{\text{s}} \leftarrow}$$

8. Automobil A se kreće pod uglom od 30° prema sjeveroistoku, kada se na završnici sudario sa automobilom B koji je išao na jug. Nakon istrage utvrđeno je da su se poslije sudara automobili zglavili i skliznuli pod uglom od 10° prema sjeveroistoku. Svaki vozač je tvrdio da je išao opronicenim brzinom od 50 km/h i da je pokušao da uspori, ali nije mogao da izbjegne sudar jer je drugi vozač išao prebrzo. Znajući da je $m_A = 1500 \text{ kg}$ i $m_B = 1200 \text{ kg}$, odrediti: a) koji se automobil kreće brže; b) brzinu bržeg automobila ako je drugi "išao" brzinom od 50 km/h .



Kolicina kretanja sistema od dva automobila tokom sudara za $(\vec{F}_{iz} = 0)$ je nepromjenjiva.
 $\vec{K} = \text{const}$



$$\vec{K}_0 = m_A \vec{v}_A + m_B \vec{v}_B \quad \text{— kolicina kretanja na početku sudara}$$

$$\vec{K}_1 = (m_A + m_B) \vec{v} \quad \text{— kolicina kretanja na kraju sudara}$$

$$m_A \vec{v}_A + m_B \vec{v}_B = (m_A + m_B) \vec{v}$$

$$\rightarrow x: m_A v_A \cos 30^\circ + m_B \cdot 0 = (m_A + m_B) v \cos 10^\circ \quad (1)$$

$$\uparrow y: m_A v_A \sin 30^\circ - m_B v_B = (m_A + m_B) v \sin 10^\circ \quad (2)$$

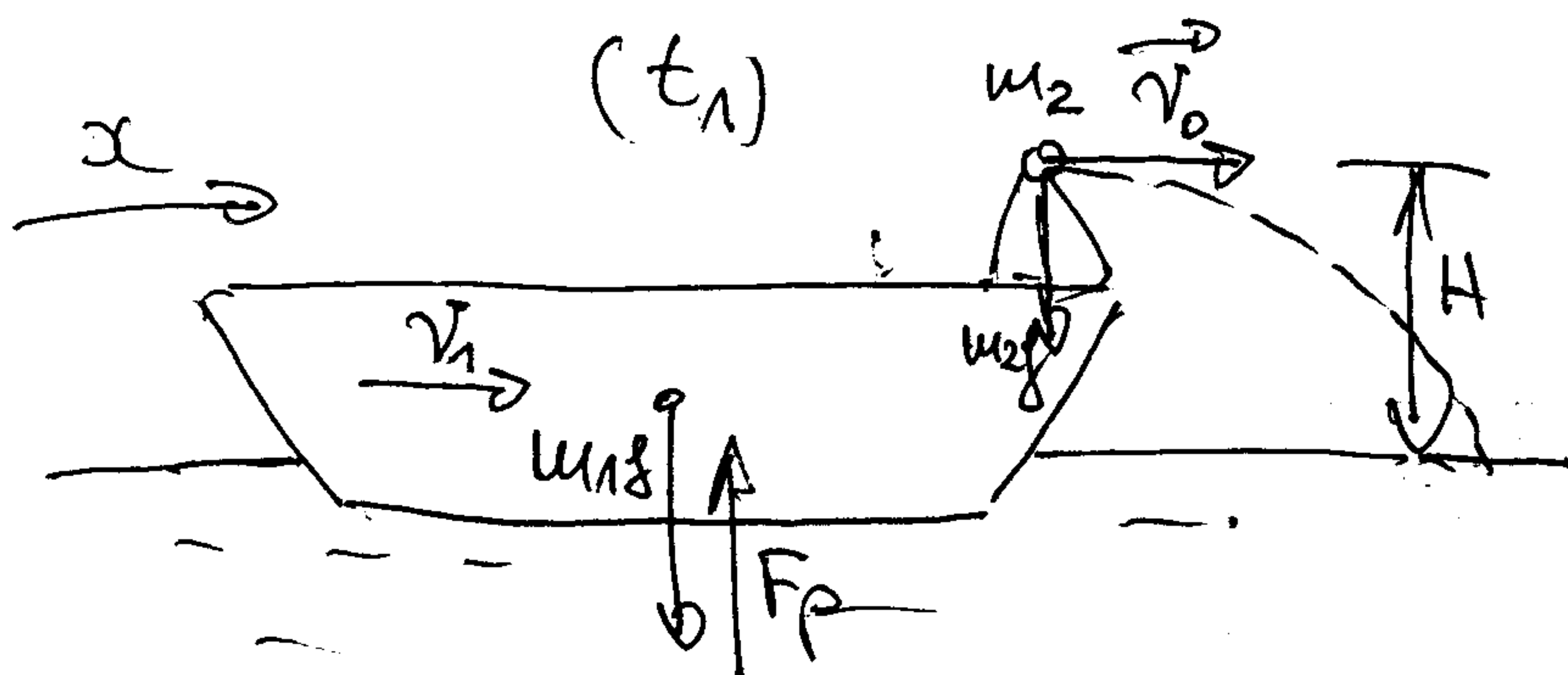
$$(2):(1) \Rightarrow \tan 30^\circ - \frac{m_B v_B}{m_A v_A \cos 30^\circ} = \tan 10^\circ \Rightarrow \frac{v_B}{v_A} = \frac{(\tan 30^\circ - \tan 10^\circ) m_A \cos 30^\circ}{m_B}$$

$$\frac{v_B}{v_A} = 0,434, \quad v_A = 2,30 v_B \Rightarrow \text{A se kreće brže}$$

$$b) v_B = 50 \text{ km/h} \Rightarrow v_A = 115,2 \text{ km/h}$$

N: Udarne sile koje se javljaju tokom sudara između automobila predstavljaju kontrastnije sile te dati sistem.

9. Iz plavnog objekta mase m_1 koji miruje na vodi izbaci se sa visine H mjereno od nivoa vode tijelo mase m_2 brzinom v_0 horizontalnog pravca. Zone marnici otpore vretanji odrediti pomjeranje plavnog objekta do trenutka kad tijelo padne u vodu.



$$K_x = c v_x A$$

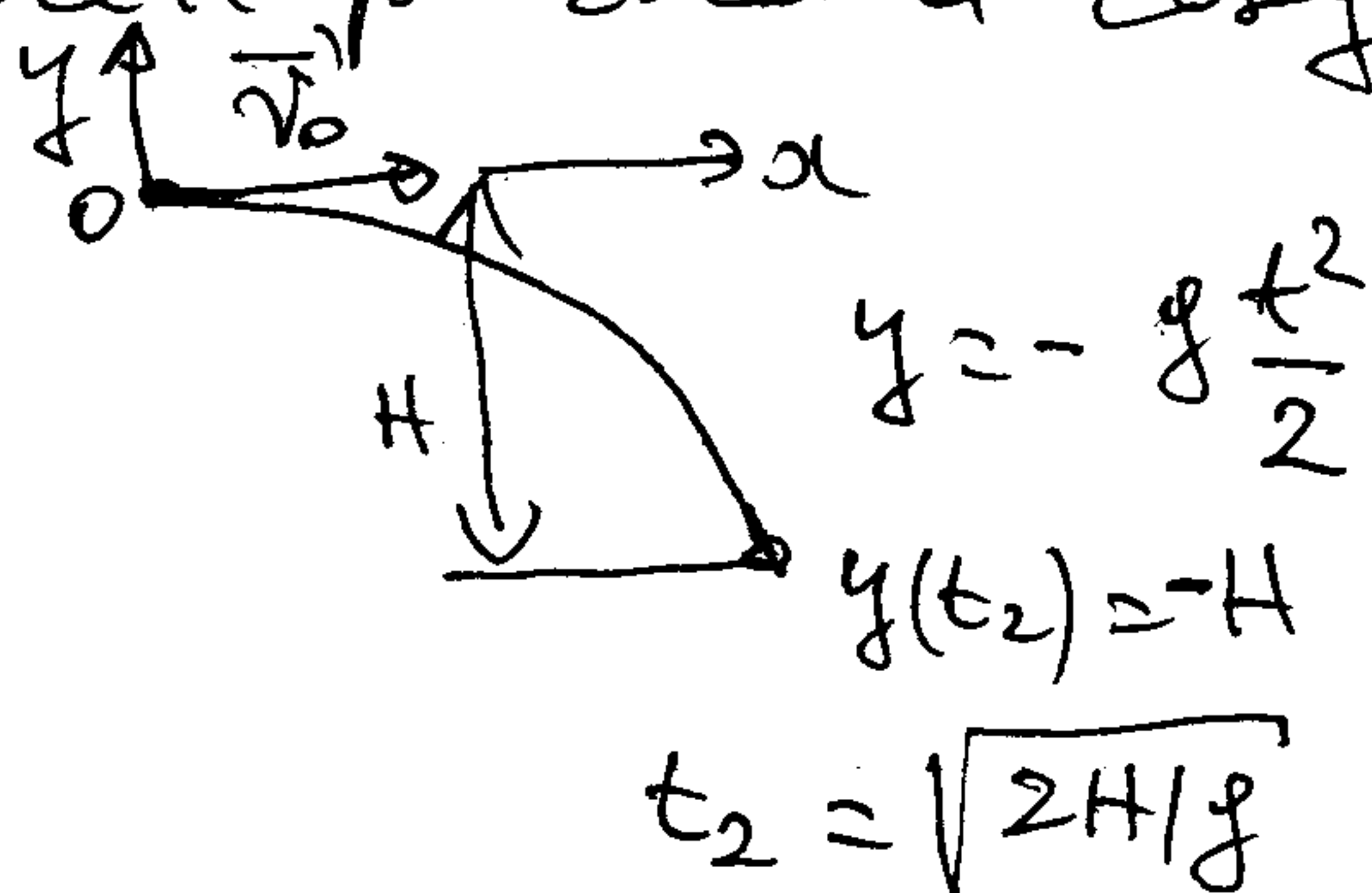
$$K_x(t_1) = K_x(t_0) = 0$$

"

$$m_1 v_1 + m_2 v_0 = 0$$

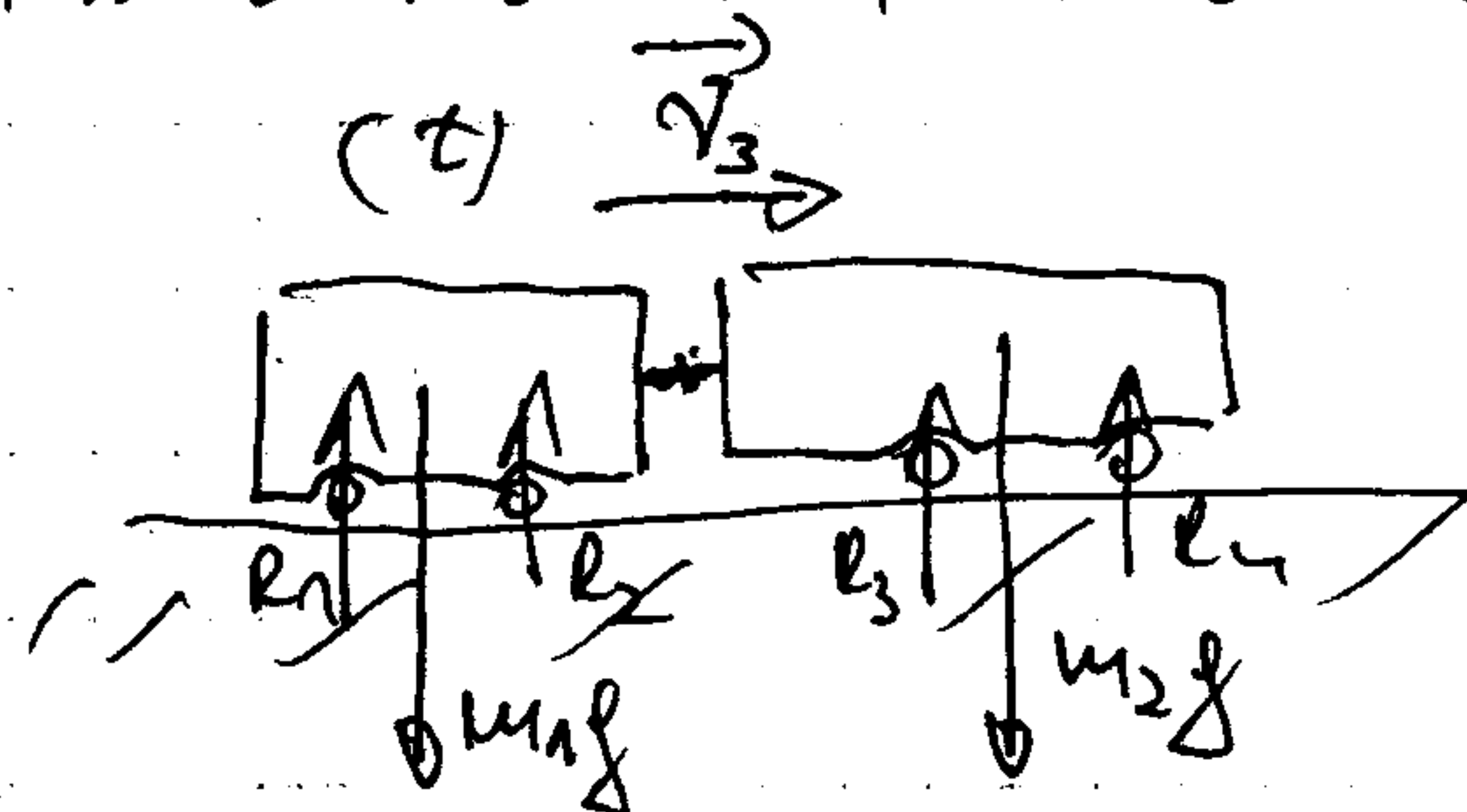
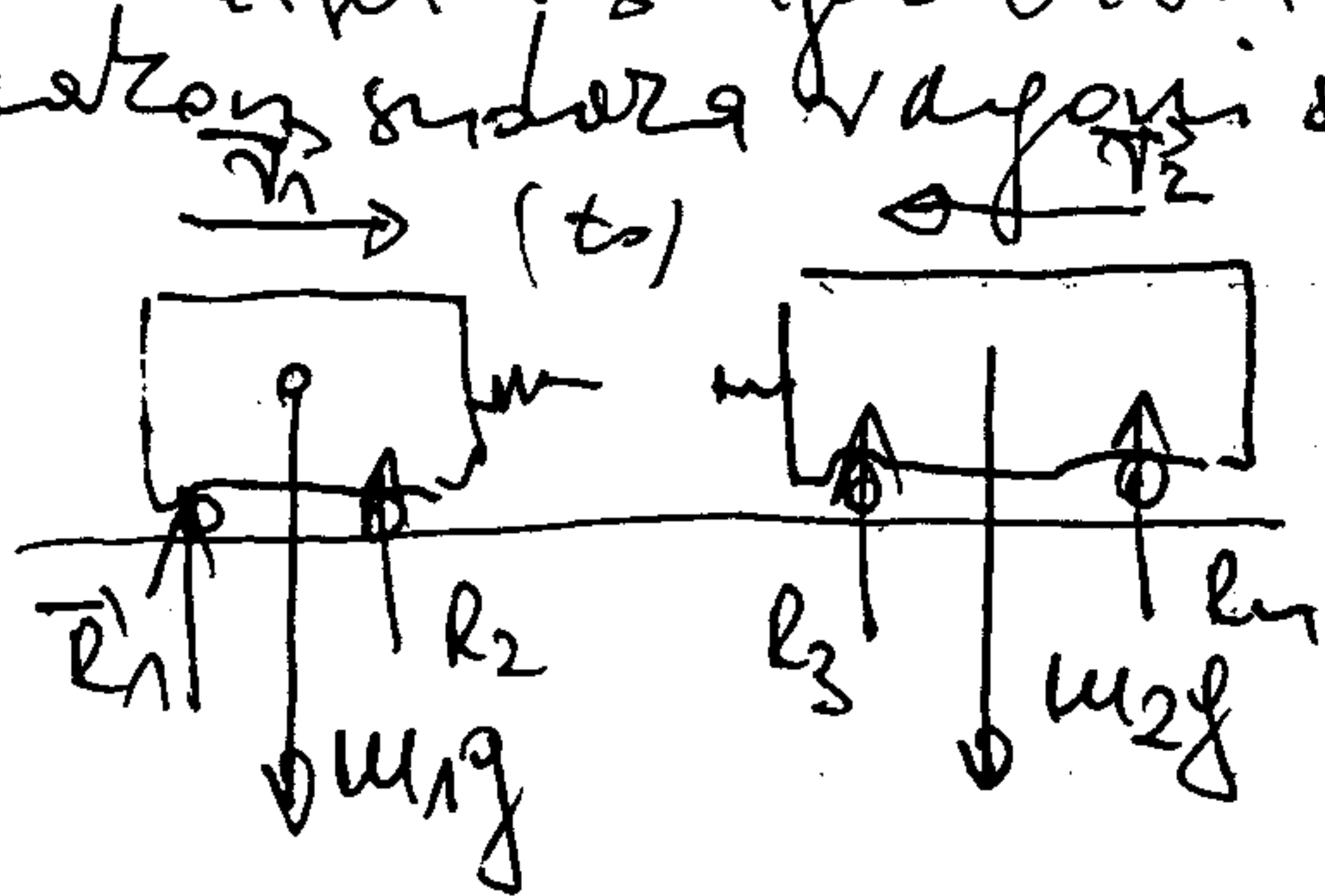
$$v_1 = - \frac{m_2}{m_1} v_0$$

Po izbacivanju tijela brzinom (apsolutnom) v_0 , plavni objekt se kreće jednoliko (nema sila otpora) u smjeru suprotnom od smjera brzine v_0 , a tijelo se kreće po zakonu kosog hica.



$$\Delta x = v_1 t_2 = \frac{m_2}{m_1} v_0 \sqrt{\frac{2H}{g}}$$

10. Vagoni mase $m_1 = 20$ t (tona) i $m_2 = 30$ t kreću se u susret jedan drugom po horizontalnom kolosijeku brzinama $v_1 = 3$ m/s, $v_2 = 2,5$ m/s, respektivno. Zone marnici otpore vretanji, odrediti intezitet i smjer brzine vagona nakon sudara. Smetajti da su nakon sudara vagoni spojeni.



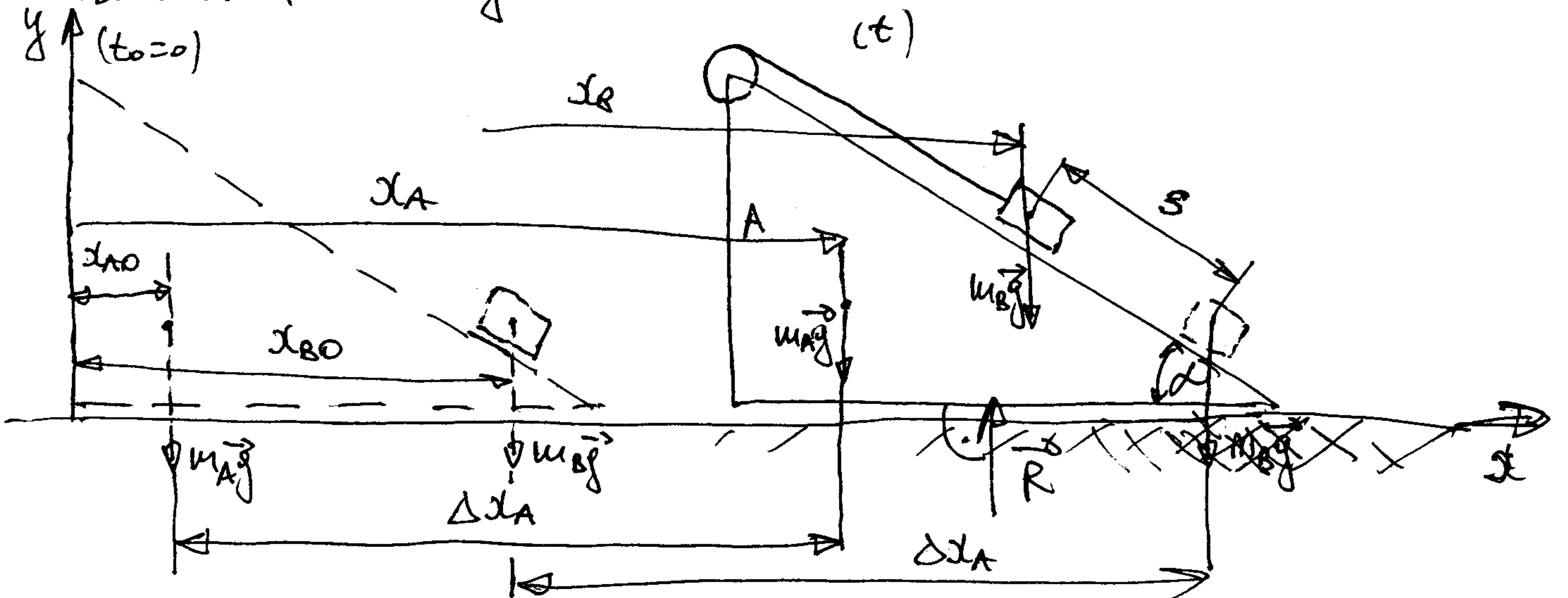
$$\sum F_{ix}^s \equiv 0 \Rightarrow K_x = c v_x A$$

$$t_0: \vec{K}_0 = m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2, \quad K_{0x} = m_1 v_1 + m_2 (-v_2)$$

$$t: \vec{K} = (m_1 + m_2) \vec{v}_3, \quad K_x = (m_1 + m_2) v_3$$

$$K_{0x} = K_x \Rightarrow v_3 = \frac{m_1 v_1 - m_2 v_2}{m_1 + m_2} = -0,3 \frac{m}{s} \quad \boxed{v_3 = 0,3 \frac{m}{s} \leftarrow}$$

11 Uz strunu naven, nagiba $\alpha = 60^\circ$, klina A koji se može kretati po glatkoj horizontalnoj podlozi, vuče se posredstvom konopca sanduk B ~~relativno~~ ~~brzinom $\dot{x}_c = 1 \text{ m/s}$~~ . Odrediti pomjeranje klina A po horizontalnoj ravni do trenutka kad sanduk B pređe put dužine $s = 2 \text{ m}$ uz strunu naven klina. Masa klina je $m_A = 60 \text{ kg}$, sanduka $m_B = 30 \text{ kg}$, a koeficijent trenja između sanduka i klina je $\mu = 0,3$. U početnom trenutku sistem je mirovao.



Spodnje sile: $m_A \vec{g}$, $m_B \vec{g}$, R . $\sum F_{ix} \equiv 0 \Rightarrow \ddot{x}_c \equiv 0 \Rightarrow \dot{x}_c = \text{const} = \dot{x}_c(0)$
 $\dot{x}_c(0) = 0$ jer je u početnom trenutku sistem mirovao, $\Rightarrow \dot{x}_c \equiv 0$

$$\Rightarrow x_c = \text{const} = x_c(0)$$

$$x_c = \frac{m_A x_A + m_B x_B}{m_A + m_B} = \text{const} \Leftrightarrow m_A x_A + m_B x_B = \text{const}$$

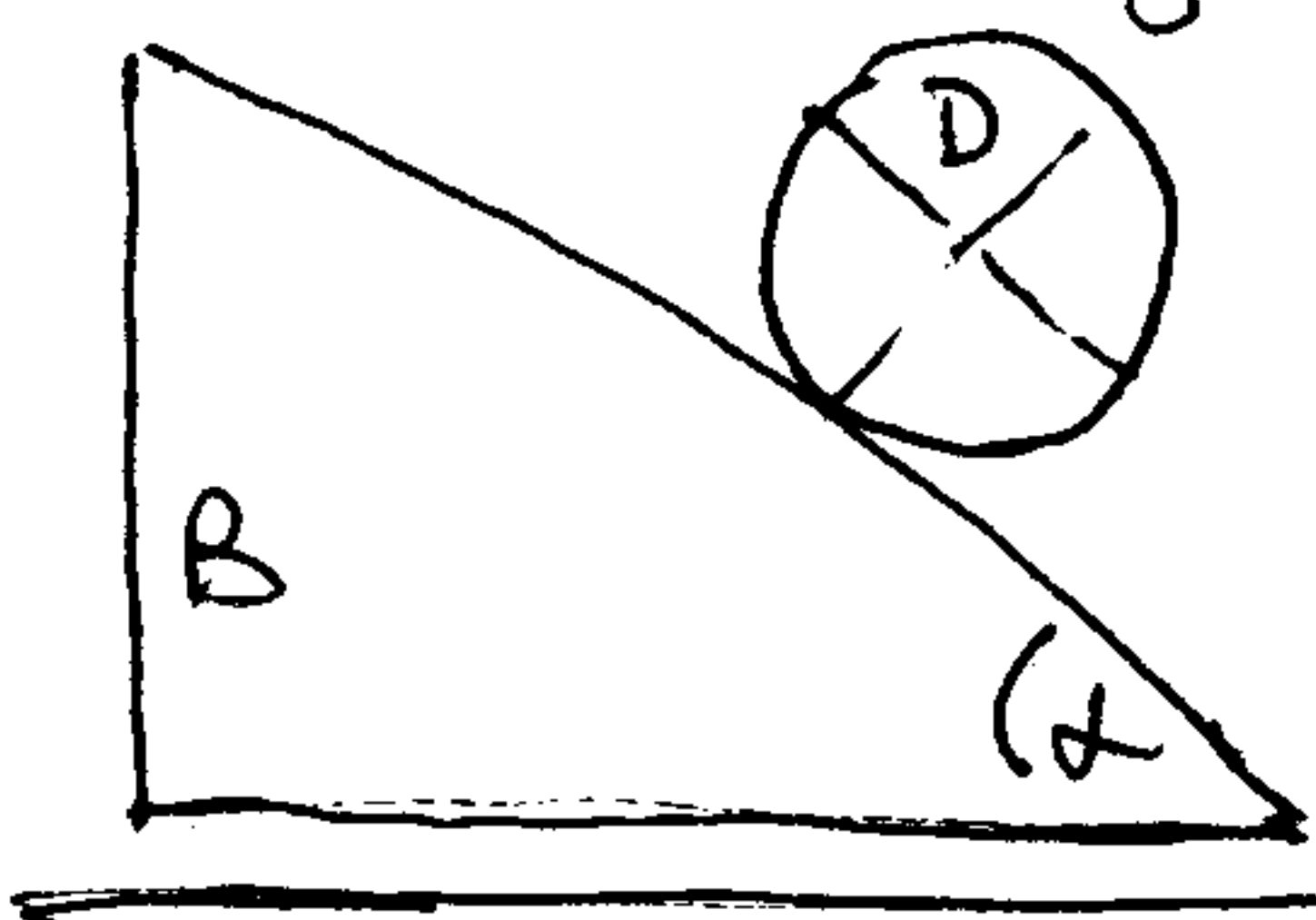
$$m_A x_A + m_B x_B = m_A x_{A0} + m_B x_{B0} \quad (*)$$

$$x_A = x_{A0} + \Delta x_A, \quad x_B = x_{B0} + \Delta x_A - s \cos \alpha \quad (**)$$

$$(**) \wedge (*) \Rightarrow \Delta x_A = \frac{m_B}{m_A + m_B} s \cos \alpha, \quad \boxed{\Delta x_A = \frac{1}{3} \text{ m}}$$

12 Klin se pomjeri udarno za $1/3 \text{ m}$.

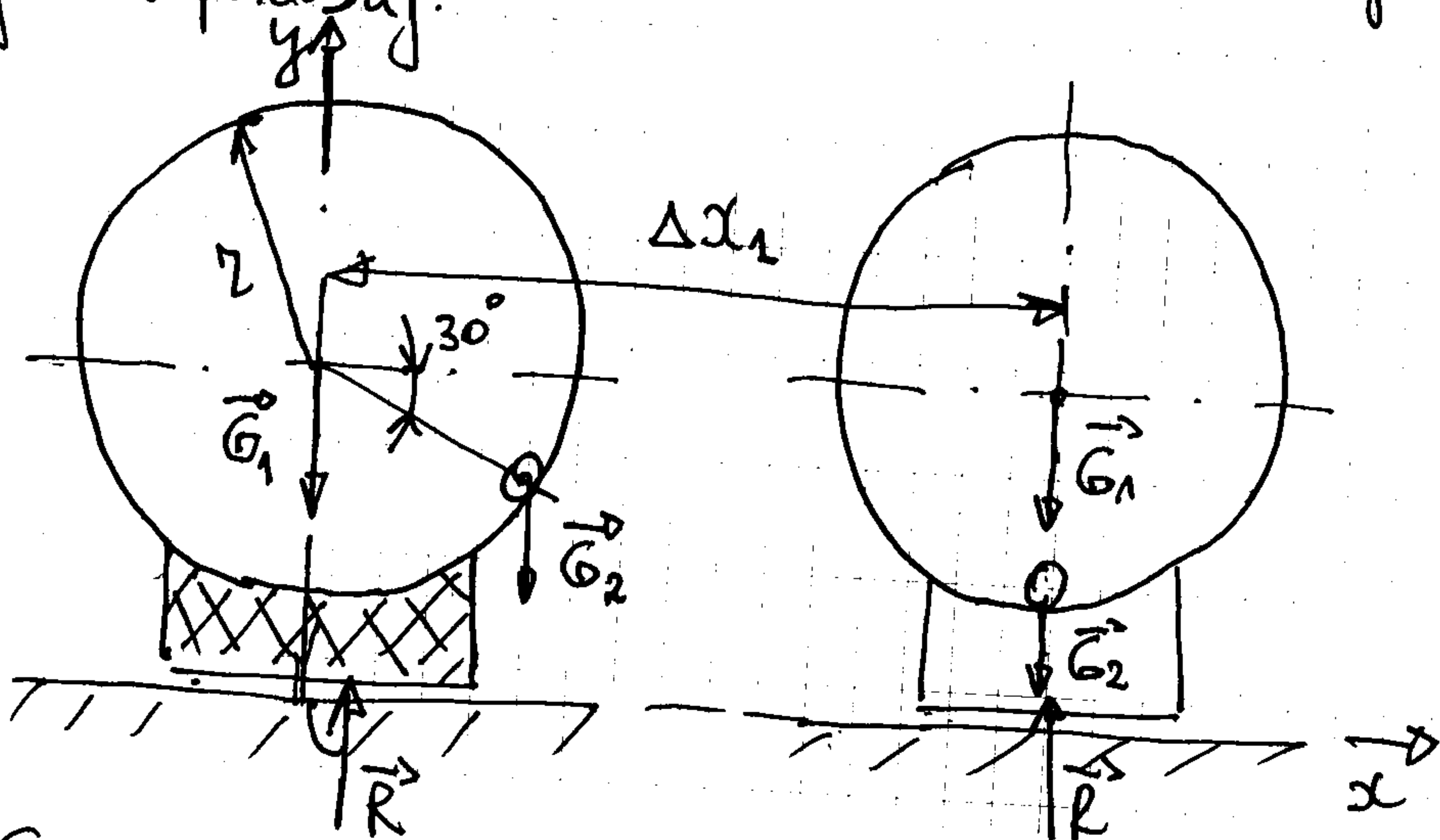
Cilinder D mase m_1 i poluprečnika r može da se kotrlja bez klizanja niz nagibni stran klina B mase m_2 . Odrediti pomjeranje klina B po glatkoj horizontalnoj ravni do trenutka kad cilindar načini dva puna obrta od početka kretanja. U početnom trenutku sistem je mirovao.



Upućenje: Pošto se cilindar kotrlja bez klizanja bide $s = r\varphi$, s - pomjeranje centra cilindra u odnosu na klin, φ - ugao obrtanja cilindra.

$$\text{Odgovor: } \Delta x_B = - \frac{4m_1 r \pi \cos \alpha}{m_1 + m_2}$$

13 Supli cilindar, unutrašnjeg poluprečnika r , bruto je vezan za postolje koje može da klizi bez trenja po horizontalnoj ravni. Težina cilindra zajedno sa postoljem je G_1 . Unutar cilindra nalazi se kuglica težine G_2 , koja iz položaja, prikazanog na slici, počinje da se kreće po površi cilindra bez početne brzine. Odredi pomjeranje cilindra po ~~glatkoj~~ horizontalnoj ravni do trenutka kada kuglica prolazi kroz najniži položaj.



$$\sum \vec{F}_{\text{tot}}^s \equiv 0$$

$$\Rightarrow \ddot{x}_c = 0$$

$$\Rightarrow x_c = c_0 + vt$$



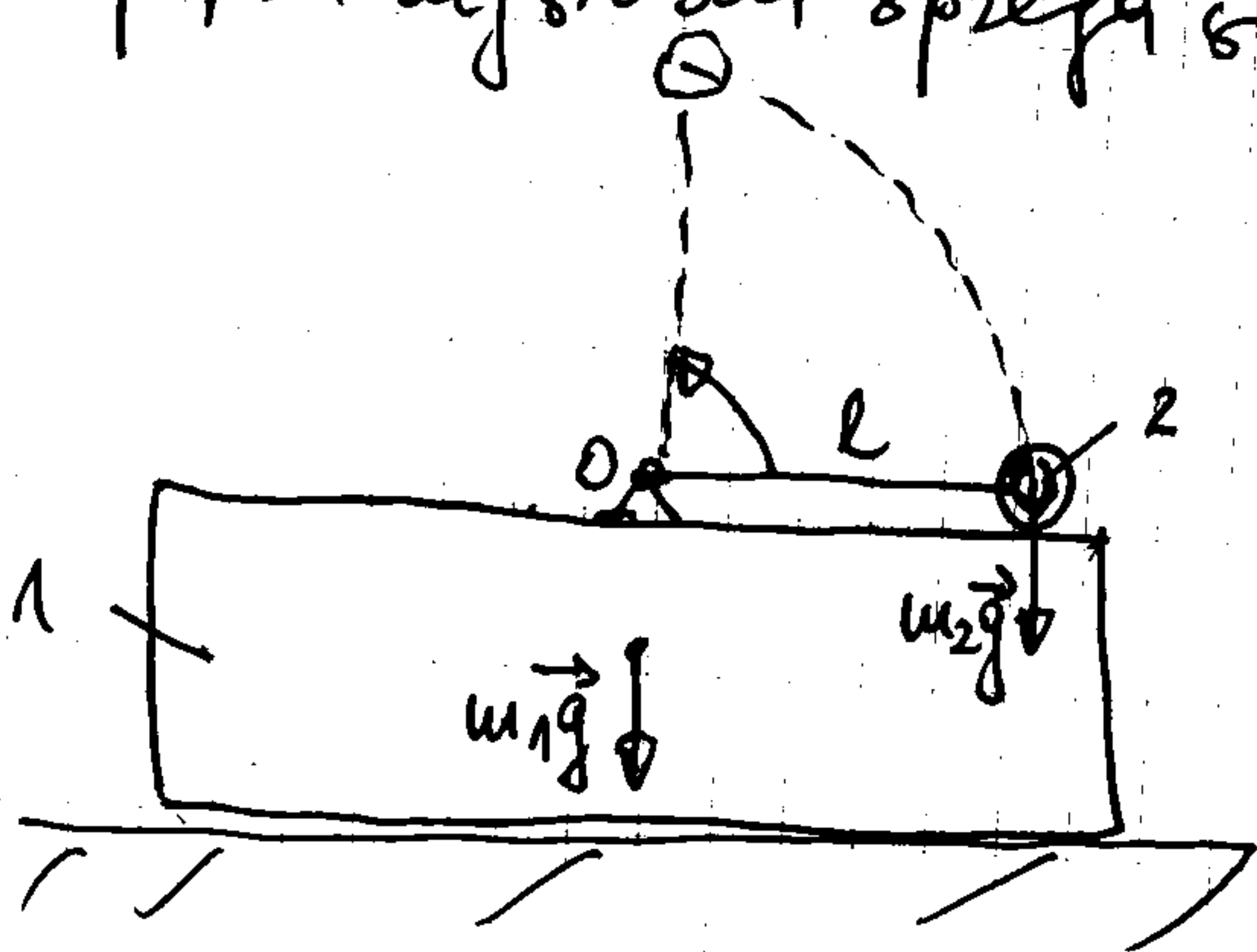
$$m_1 x_1 + m_2 x_2 = m_1 x_{10} + m_2 x_{20}$$

$$m_1 = \frac{G_1}{g}, m_2 = \frac{G_2}{g}, x_{10} = 0, x_{20} = r \cos 30^\circ = r \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$x_1 = \Delta x_1, x_2 = \Delta x_1$$

$$\Rightarrow \Delta x_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} r \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{G_2}{G_1 + G_2} \frac{\sqrt{3}}{2} r$$

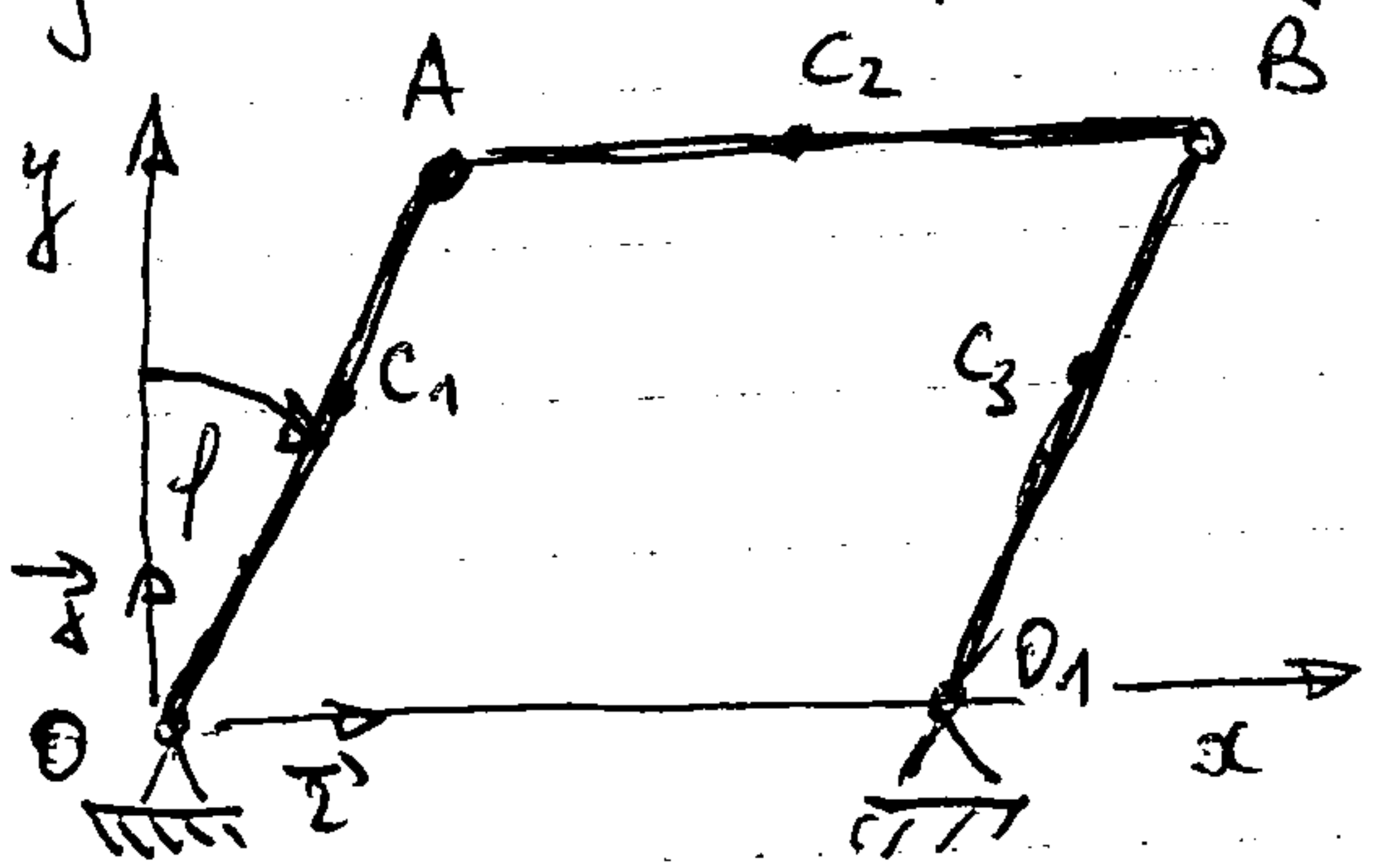
14 Za tijelo 1 mase m_1 koje se nalazi na glatkoj horizontalnoj ravni vezan je cilindričnim zglobom step dužine l i zanemarljive mase sa koncentrisanim teretom mase m_2 na njegovom kraju. Na početku vretanja sistema je mirovao u položaju prikazanom na slici. Odredi pomjeranje tijela 1 po horizontalnoj ravni do trenutka kada step pod dejstvom sprege sila dođe u vertikalni položaj.



$$\Delta x_1 = \frac{m_2 l}{m_1 + m_2} \text{ udesno}$$

Zakon o kretanju centra inercije i zakon o promjeni količine gibanja sistema
(zadaci za soubodan rad)

1. Štap OA zglobnog kraja OABO₁ obzice se po zakonu $\varphi = \omega t$, $\omega = \text{const}$. Smetajdi da je $OA = AB = BO_1 = l$ i da su svi štapovi homogeneri jednake mase m , odredi teže-ktornu centza inercije sistema. Nadi količinu kretanja i glavni vektor spofa-snjih sila sistema u proizvoljnom trenutku t .



$$x_c = \frac{\sum m_i x_{ci}}{\sum m_i} = \frac{l}{3} (2 \sin \varphi + \frac{3}{2})$$

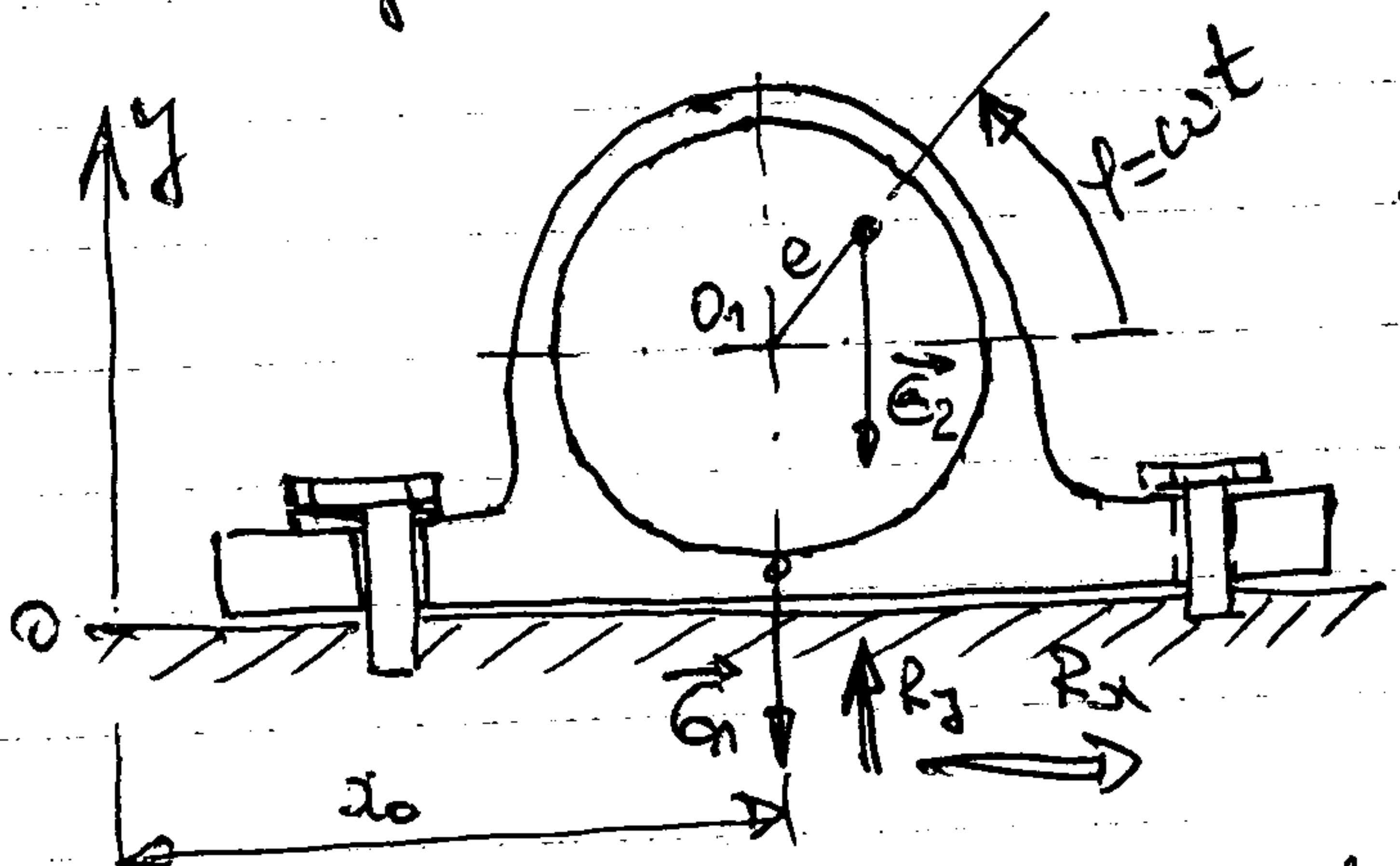
$$y_c = \frac{\sum m_i y_{ci}}{\sum m_i} = \frac{2}{3} l \cos \varphi$$

$$\Rightarrow (x_c - \frac{l}{2})^2 + y_c^2 = \frac{4}{9} l^2$$

$$\vec{K} = m \vec{v}_c = m \dot{x}_c \vec{i} + m \dot{y}_c \vec{j} \stackrel{\varphi = \omega t}{=} 2ml\omega (\cos \omega t \vec{i} - \sin \omega t \vec{j})$$

$$\vec{F}_z^s = m \vec{a}_c = m \frac{d\vec{v}_c}{dt} = -2ml\omega^2 (\sin \omega t \vec{i} + \cos \omega t \vec{j})$$

2. Elektromotor čiji je stator težine G_1 , a rotor težine G_2 i ekscentriciteta e , posredstvom zavrtanja uvršćen je za horizontalnu podlogu. Ako se rotor obzice konstantnom ugaonom brzinom ω odredi maksimalnu smičnu silu u zavrtanju.



$$m \vec{a}_c = \vec{F}_z^s, \quad m = \frac{G_1 + G_2}{g}, \quad \vec{F}_z^s = \vec{G}_1 + \vec{G}_2 + \vec{R}$$

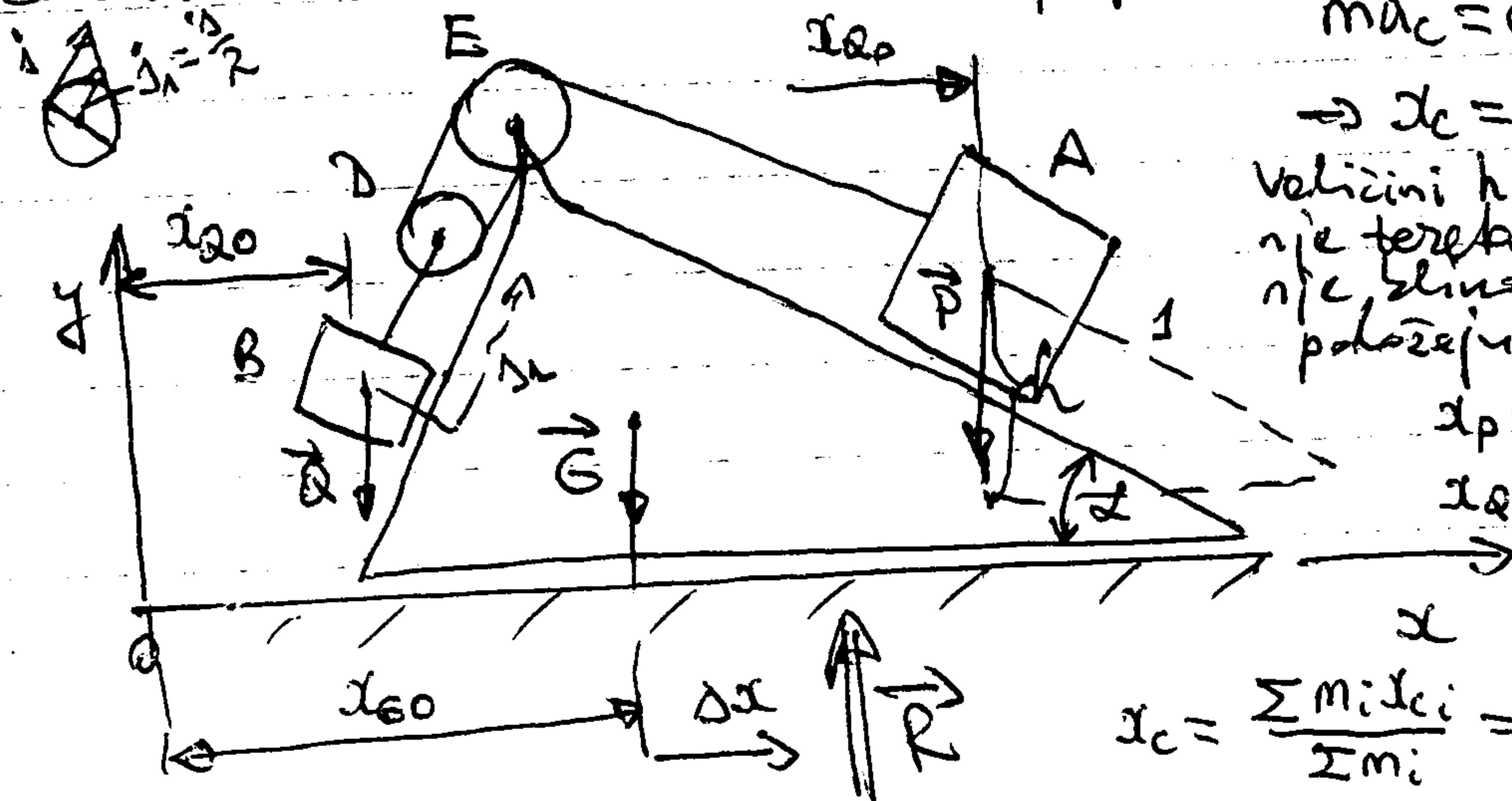
$$\rightarrow m \dot{x}_c = R_x$$

$$x_c = \frac{G_1 x_0 + G_2 (x_0 + e \cos \omega t)}{G + G_1}$$

$$\rightarrow R_x = -\frac{G_2 e \omega^2 \cos \omega t}{g}$$

$$|R_{x \max}| = \frac{G_2 e \omega^2}{g}$$

3. Dva štapa zavni pravougaonog klina težine G , koji leži na glatkoj horizontalnoj podlozi, mogu se pomjeriti ležeci A i B težina P i Q (v.d.). Za koliko će se pomjeriti klini duž horizontalne podloge ako se teret A spusti za h uvršćeno duž vertikalne težine konca i koturne zamenoviti. Kretanje je počelo u miru.



$$m \vec{a}_c = \vec{G} + \vec{P} + \vec{Q} + \vec{R} \rightarrow m \dot{x}_c = 0 \rightarrow \dot{x}_c = 0$$

$$\rightarrow x_c = \text{const} = x_c(t_0) = x_{c0}$$

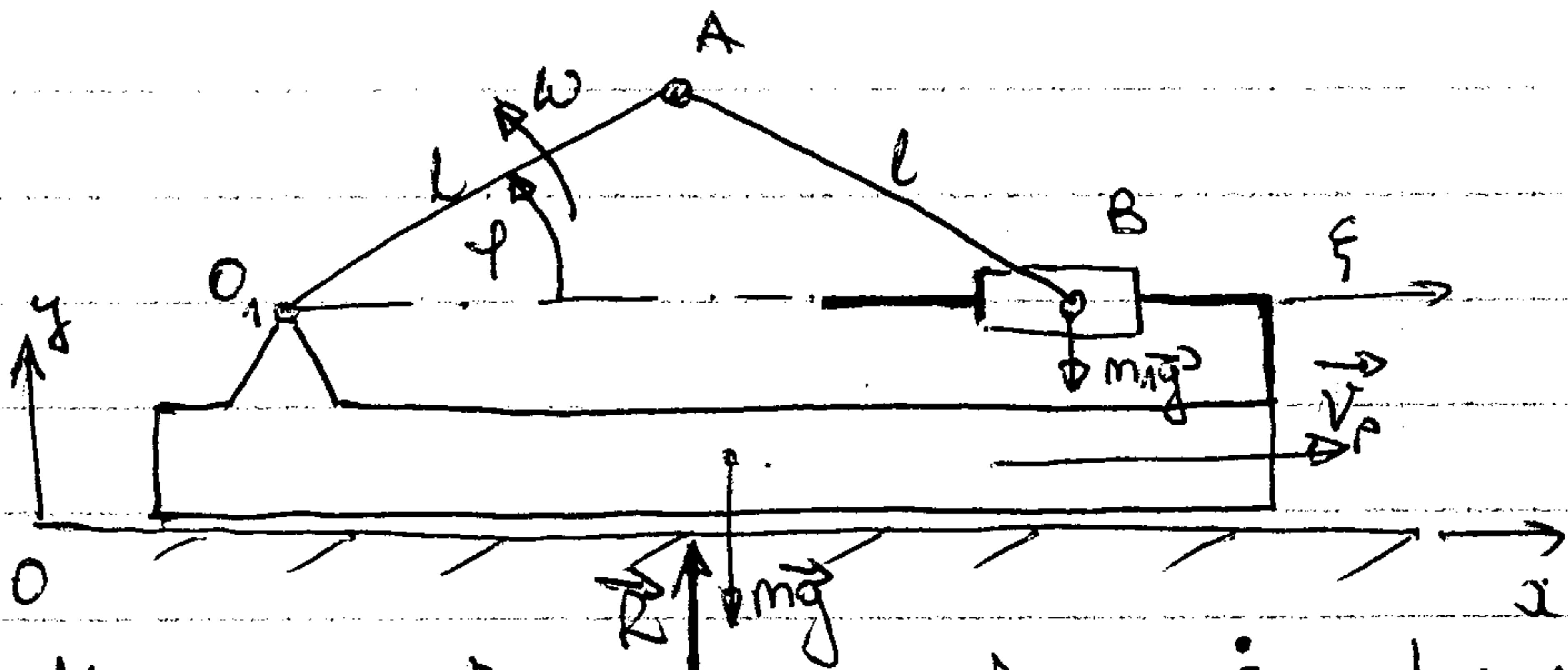
Velicini h odgovara relativna pomjera-nje tereta A za $\Delta = h / \sin \alpha$ i pomjera-nje klina za Δx pa je u krajnjem položaju: $x_c = x_{c0} + \Delta x$

$$x_p = x_{p0} + \Delta x + \Delta \cos \alpha$$

$$x_q = x_{q0} + \Delta x + \Delta \sin \alpha, \quad \Delta_1 = \frac{1}{2}$$

$$x_c = \frac{\sum m_i x_{ci}}{\sum m_i} = x_{c0} \rightarrow \Delta x = -\frac{2P \cos \alpha + Q}{2(G + P + Q)}$$

4. Klipni mehanizam OAB vezan je za postojeću masu m koja je postavljena na glatkoj horizontalnoj ravni. Masa kuglica B je m_1 a mase štapova OA i AB jednaka l i zanemarljive. Odrediti maksimalnu vrijednost v_{pmax} brzine postolja ako se kuglica OA okreće konstantnom ugaonom brzinom ω i za $t_0 = 0$ je $\varphi = 0$.



$$\frac{d\vec{K}}{dt} = \vec{F}_z^s = m_1\vec{g} + m_2\vec{g} + \vec{R}$$

$$\frac{dK_x}{dt} = 0 \rightarrow K_x = K_x(t_0=0) = \text{const.}$$

$$\vec{K} = m\vec{v}_p + m_1\vec{v}_B$$

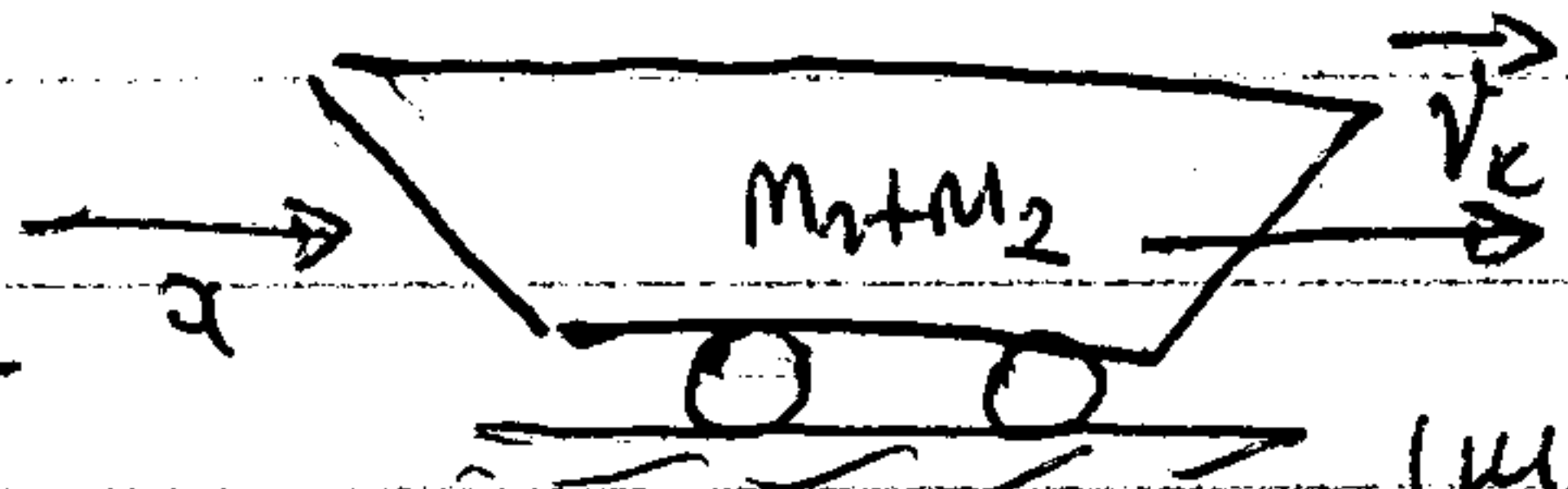
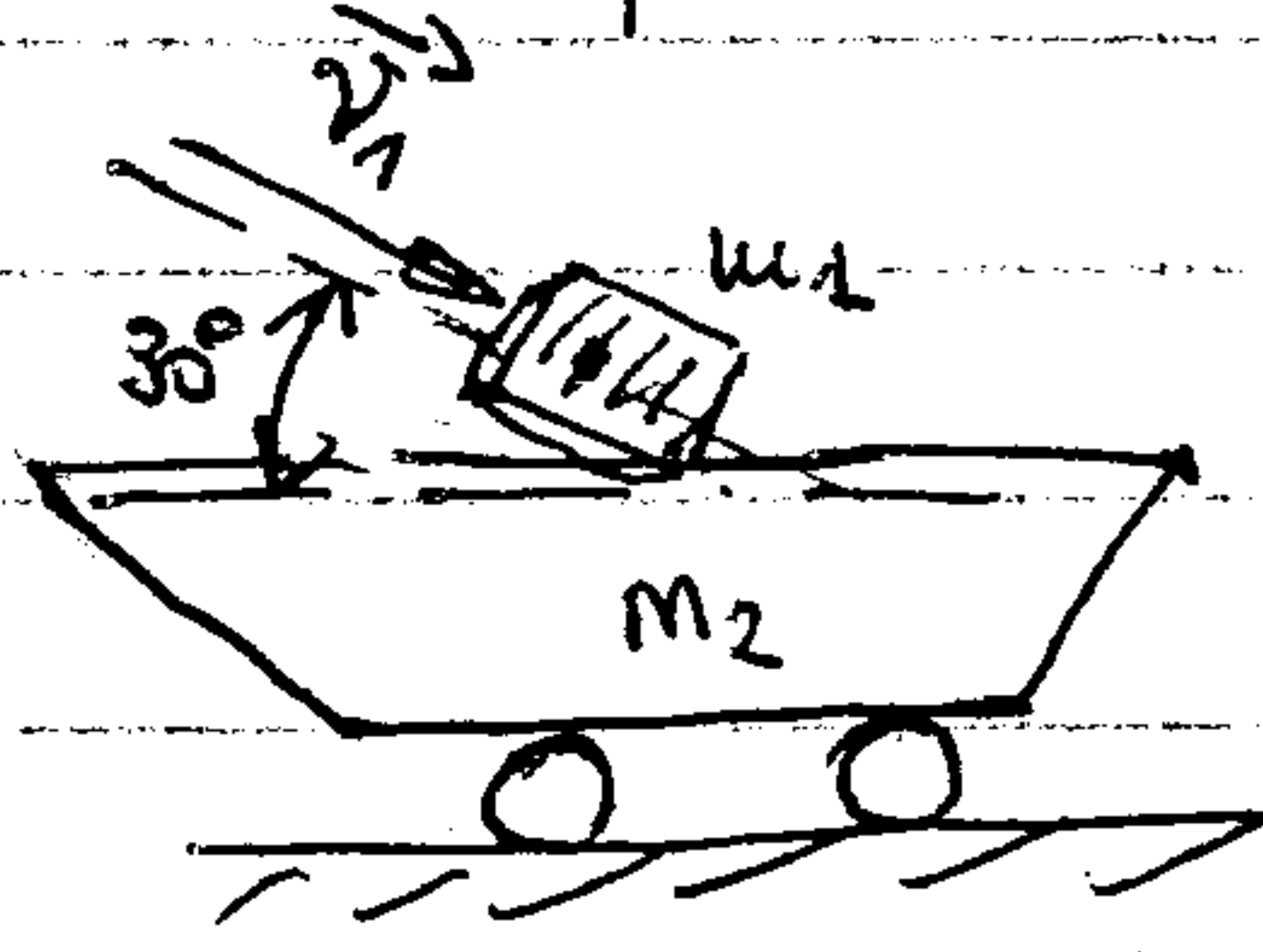
$$\vec{v}_B = \vec{v}_p + \vec{v}_{Bz}$$

$$\vec{K} = (m + m_1)\vec{v}_p + m_1\vec{v}_{Bz}$$

$$K_x = (m + m_1)v_{px} + m_1v_{Bzx}, \quad v_{Bzx} = \dot{x}_B = \frac{d}{dt}(2l\cos\omega t) = -2l\omega\sin\omega t$$

$$K_x(t) = K_x(t_0=0) \rightarrow v_{px} = \frac{2m_1l\omega}{m + m_1}\sin\omega t, \quad v_{pmax} = \frac{2m_1l\omega}{m + m_1}$$

5. Cigla mase $m_1 = 0,6$ kg ubacuje se brzinom $v_1 = 10$ m/s pod uglom od 30° u odnosu na horizontalu, a kolica mase $m_2 = 25$ kg bježe udesno na horizontalnoj podlozi. Odrediti brzinu kolica poslije udarca cigle. Otpor betona kolica zanemariti.



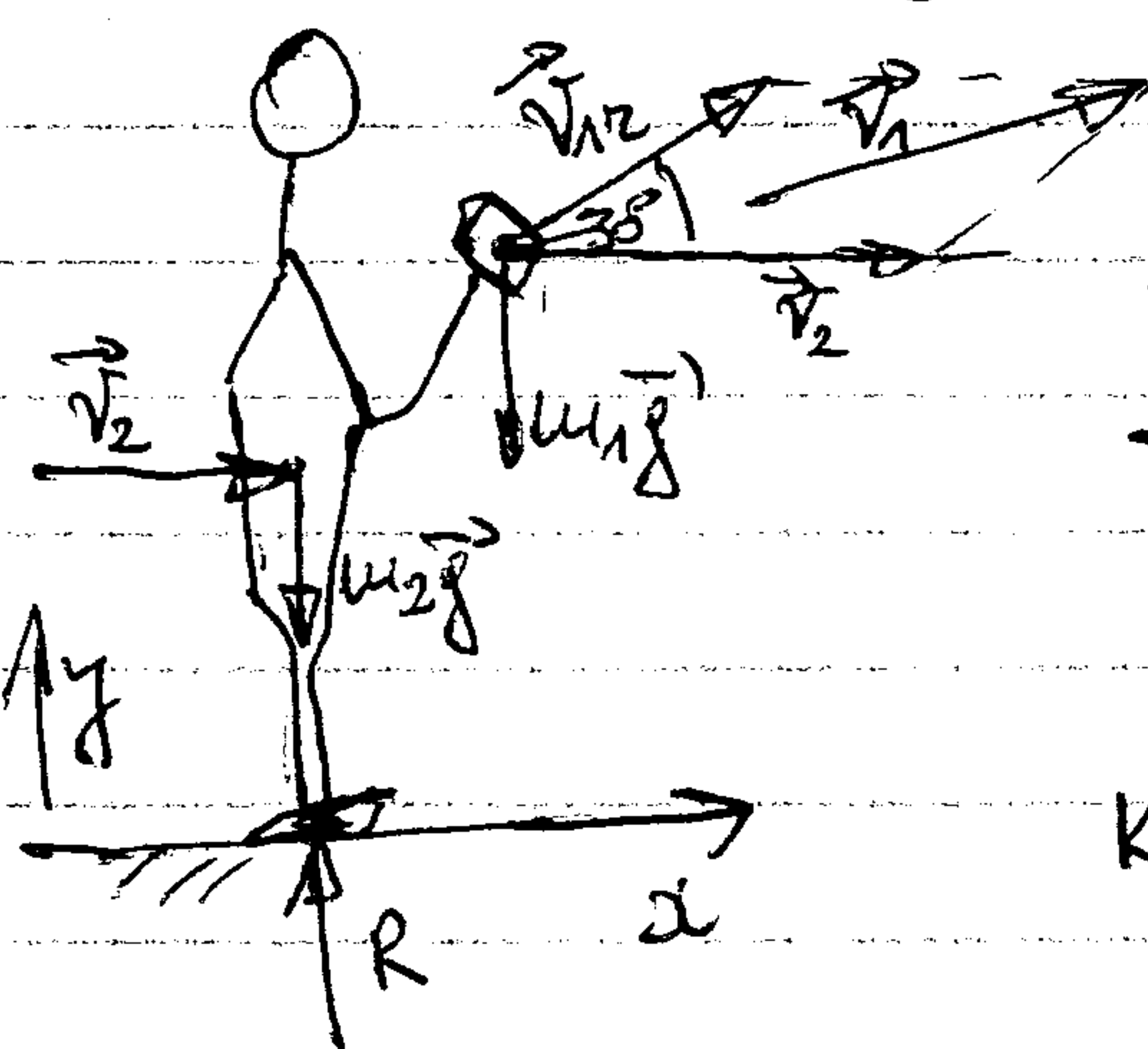
$$\vec{K}_2 = (m_1 + m_2)\vec{v}_k, \quad \vec{K}_1 = m_1\vec{v}_1$$

$$\vec{F}_z^s = m_1\vec{g} + m_2\vec{g} + \vec{R}$$

$$F_{zx}^s = 0 \rightarrow K_{2x} - K_{1x} = 0$$

$$(m_1 + m_2)v_k = m_1v_1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow v_k = 0,203 \frac{m}{s}$$

6. Čovjek sa klizaljčama na nogama, stoji na ledu, baca kamen mase $m_1 = 8$ kg početnom relativnom brzinom na njega od bjege, brzinom $v_{1r} = 2$ m/s i elevacionim uglom od 30° . Bacao je traje $t_1 = 1,5$ s. Odrediti horizontalnu brzinu čovjeka po završenom bacanju i srednju vrijednost reakcije podloge na obje klizaljke za vrijeme bacanja. Masa čovjeka je $m_2 = 70$ kg. Zanemariti trenje i vrtanje kula.



$$\frac{d\vec{K}}{dt} = m_1\vec{g} + m_2\vec{g} + \vec{R} \rightarrow \begin{cases} \frac{dK_x}{dt} = 0 \rightarrow K_x(t_1) = K_x(t_0) \\ \frac{dK_y}{dt} = -m_1g - m_2g + R \end{cases}$$

$$\vec{K}_{1r} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2, \quad \vec{v}_1 = \vec{v}_2 + \vec{v}_{1r}$$

$$\vec{K}_{1f} = (m_1 + m_2)\vec{v}_2 + m_2\vec{v}_{1r}$$

$$K_x(t_1) = (m_1 + m_2)v_{2x} + m_2v_{1rx} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 0 \rightarrow v_{2x} = -0,1776 \frac{m}{s}$$

$$K_y(t_1) - K_y(t_0) = -(m_1 + m_2)g t_1 + \int_0^{t_1} R dt = R_{sr} \cdot t_1$$

$$m_2 v_{1r} \cdot \frac{1}{2}$$

$$\rightarrow R_{sr} = (m_1 + m_2)g + \frac{m_1 v_{1r}}{2 t_1} = 770,5 \text{ N}$$