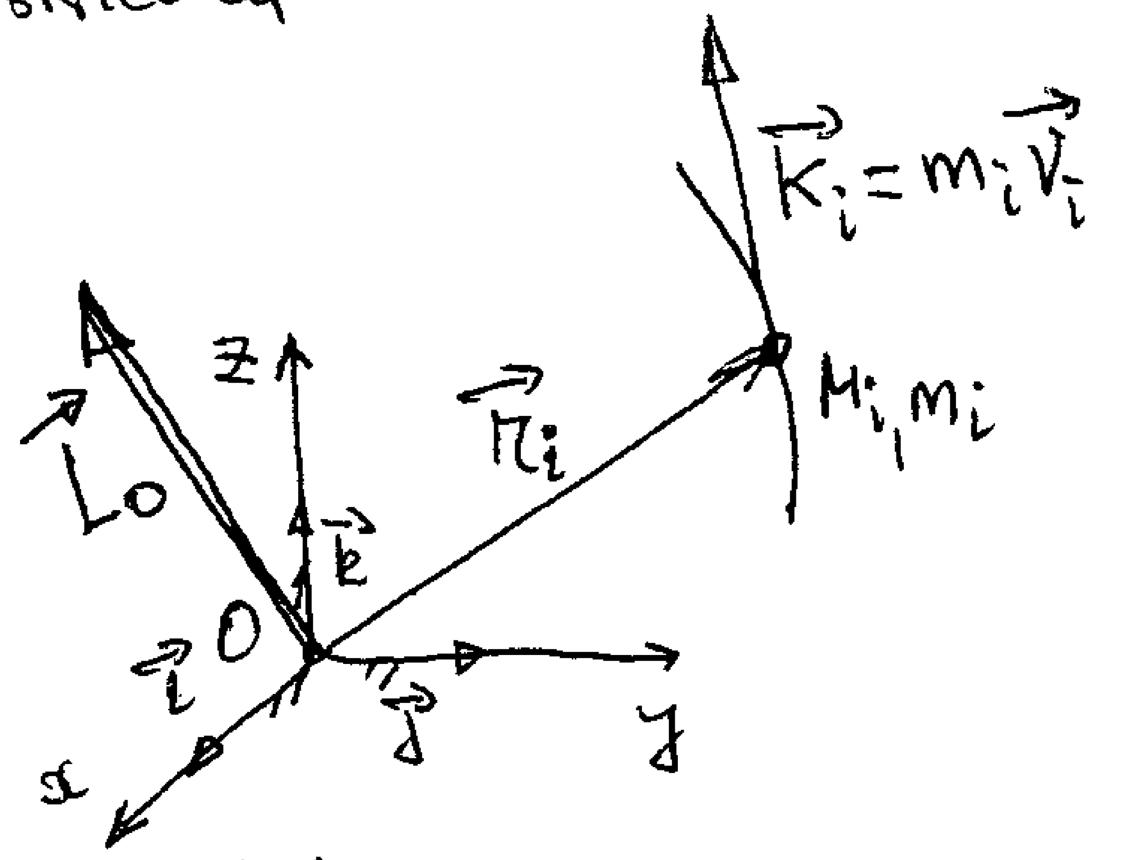
VI sedmica nastave

- predavanja sa primjerima

6. Zakon o promjeni momenta količina kretanja sistema

6.1 Moment količina kretanja sistema

Momentom (glavnim momentom) količina kretanja sistema, ili kinetičkim momentom za nepokretnu tačku O naziva se veličina $\vec{L}_O$, koja je jednaka vektorskom zbiru momenata količina kretanja svih tačaka sistema u odnosu na tu tačku:



$$\vec{L}_O = \sum \vec{L}_{Oi} = \sum \vec{M}_O^{m_i\vec{v}_i} = \sum \vec{r}_i \times m_i\vec{v}_i \qquad (1)$$

Za inercijalni koordinatni sistem Oxyz, gornja relacija se svodi na

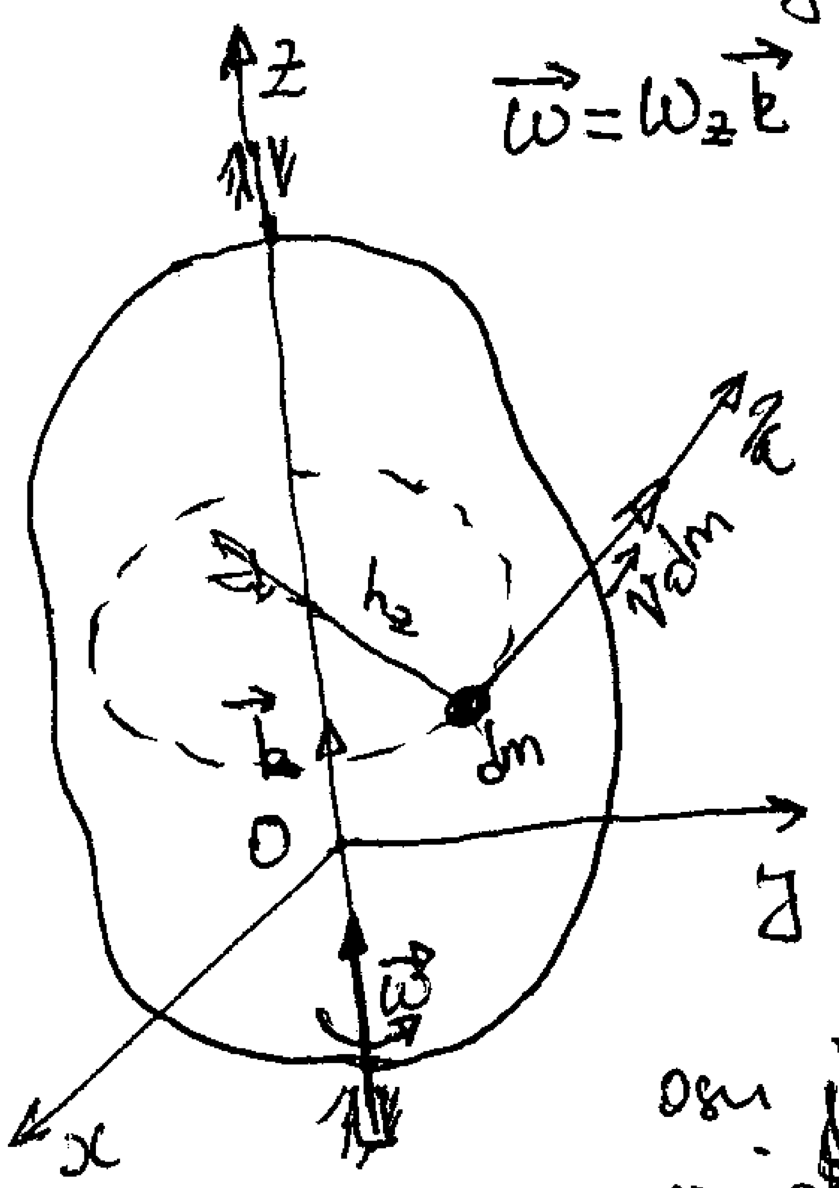
$$\vec{L}_O = \sum m_i \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_i & y_i & z_i \\ \dot{x}_i & \dot{y}_i & \dot{z}_i \end{vmatrix}$$

pa su projekcije kinetičkog momenta sistema na ose x, y i z, tj. momenti količina kretanja za te ose:

$$L_x = \sum m_i(y_i\dot{z}_i - z_i\dot{y}_i),\; L_y = \sum m_i(z_i\dot{x}_i - x_i\dot{z}_i),\; L_z = \sum m_i(x_i\dot{y}_i - y_i\dot{x}_i), \qquad (2)$$

jer je $\vec{L}_O = L_x\vec{i} + L_y\vec{j} + L_z\vec{k}$.

Pr. Kinetički moment krutog tijela koje se obrće, za drtnu osu.



$$dL_z = L_z(dm) = \overset{+}{M}{}_z^{\vec{v}\,dm} = h_z \cdot (h_z\omega_z)\,dm$$

$$L_z = \int_{(m)} h_z^2\,\omega_z\,dm = \omega_z \underbrace{\int_{(m)} h_z^2\,dm}_{J_z}$$

$$\boxed{L_z = J_z\,\omega_z} \qquad (3)$$

Moment količine kretanja tijela, koje se obrće, za obrtnu osu jednak je proizvodu iz momenta inercije tijela za tu osu i projekcije ugaone brzine tijela na obrtnu osu.

N: Osim projekcije L_z kinetički moment $\vec{L}_O$ ima i projekcije L_x i L_y, koje su u opštem slučaju različite od nule, i biće određene u odjeljku 6.2.

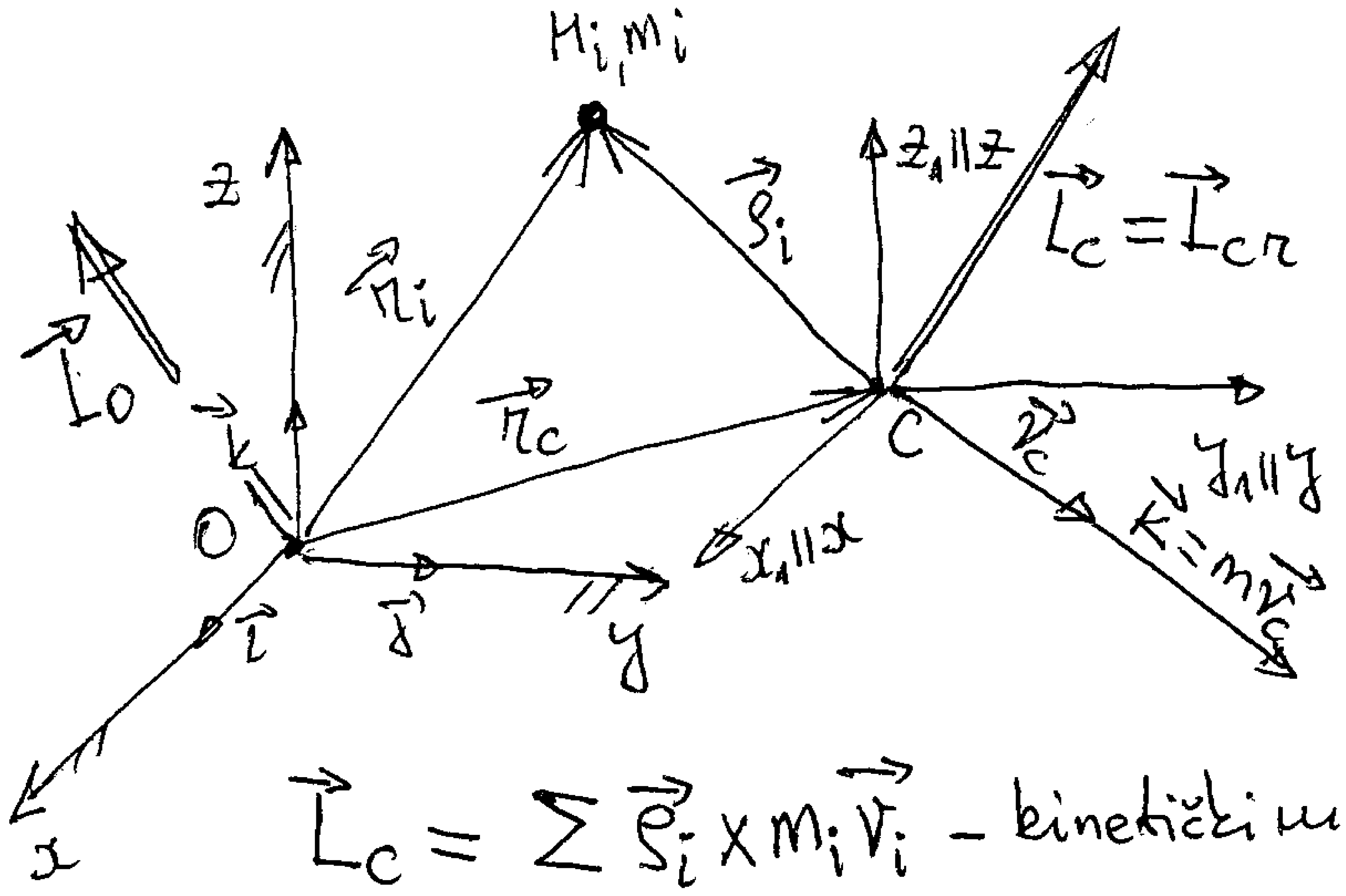
Posmatrajmo sada kretanje datog sistema kako u odnosu na nepokretni (inercijalni) koordinatni sistem, tako i u odnosu na translatorno pokretni koordinatni sistem vezan za centar inercije $Cx_1y_1z_1$. Položaj proizvoljne tačke M_i u pokretnom koordinatnom sistemu određen je vektorom položaja $\vec{\rho}_i$. Očigledno su:

$$\vec{r}_i = \vec{r}_c + \vec{\rho}_i \qquad (4)$$

i

$$\vec{v}_i = \vec{v}_c + \vec{v}_{ir}, \qquad (5)$$

gdje je $\vec{v}_i$ apsolutna, a $\vec{v}_{ir} = \dot{\vec{\rho}}_i$ relativna brzina tačke M_i, dok je $\vec{v}_c = \dot{\vec{r}}_c$ - apsolutna brzina centra inercije (prenosna brzina).



$\vec{L}_C = \sum \vec{\rho}_i \times m_i \vec{v}_i$ – kinetički moment apsolutnih kretanja za centar inercije

$$\vec{L}_C \overset{(5)}{=} \underbrace{\left(\sum m_i \vec{\rho}_i\right)}_{= m\vec{\rho}_C = 0} \times \vec{v}_C + \underbrace{\sum \vec{\rho}_i \times m_i \vec{v}_{ir}}_{= \vec{L}_{Cr}}$$

$= \vec{L}_{Cr}$ – kinetički moment relativnih kretanja za centar inercije

$$\rightarrow \quad \vec{L}_C = \vec{L}_{Cr} \qquad (6)$$

Dakle, kinetički moment apsolutnih kretanja za centar inercije jednak je kinetičkom momentu relativnog kretanja za tačku C. Pri tome se pod relativnim kretanjem podrazumijeva kretanje u odnosu na translatorno pokretni koordinatni sistem vezan za centar inercije.

S druge strane, ako u (1) unesemo vezu (4), dobijamo

$$\vec{L}_O = \vec{r}_C \times \sum m_i \vec{v}_i + \sum \vec{\rho}_i \times m_i \vec{v}_i ,$$

a pošto je $\sum m_i \vec{v}_i = \vec{K} = m\vec{v}_C$ – količina apsolutnog kretanja i $\sum \vec{\rho}_i \times m_i \vec{v}_i = \vec{L}_C$, to je

$$\vec{L}_O = \vec{L}_C + \vec{r}_C \times \vec{K}$$

ili $\vec{L}_O = \vec{L}_C + \vec{r}_C \times m\vec{v}_C$, odnosno, $\vec{L}_O = \vec{L}_{Cr} + \vec{M}_O^{m\vec{v}_C}$ (7)

Ako projiciramo (7) na nepokretne ose $Oxyz$, dobićemo

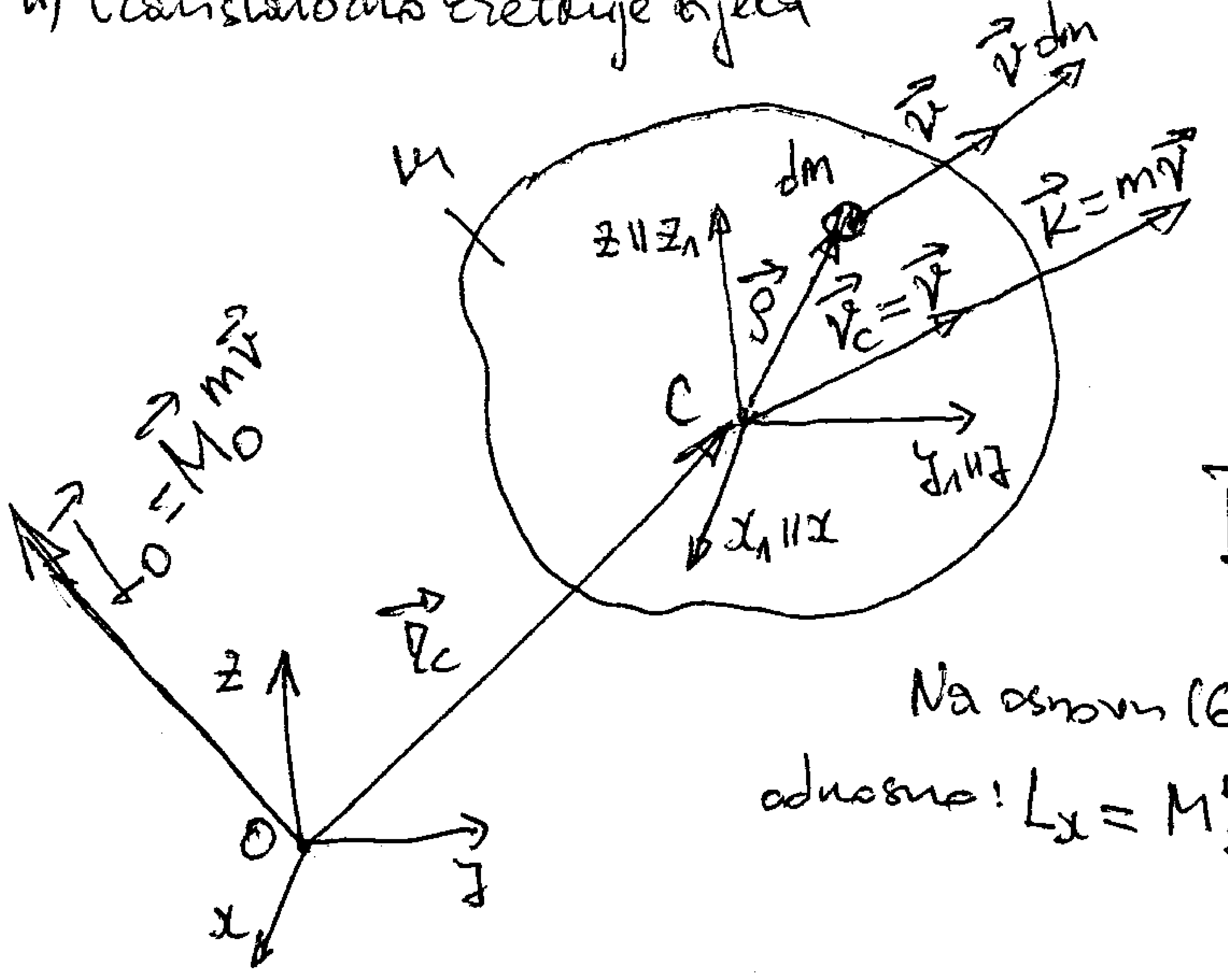
$$L_x = L_{Cx_1r} + M_x^{m\vec{v}_C}, \quad L_y = L_{Cy_1r} + M_y^{m\vec{v}_C}, \quad L_z = L_{Cz_1r} + M_z^{m\vec{v}_C} \qquad (8)$$

Prema tome, moment količina apsolutnog kretanja za nepokretnu tačku O, $\vec{L}_O$, jednak je zbiru kinetičkog momenta relativnog kretanja za centar inercije i momenta količine kretanja centra inercije sistema za pol O, pod pretpostavkom da je u centru inercije skoncentrisana cjelokupna masa sistema.

Relacija (7), odnosno (8), često se primjenjuju u dinamici krutog tijela.

6.2 Kinetički moment krutog tijela

a) translatorno kretanje tijela



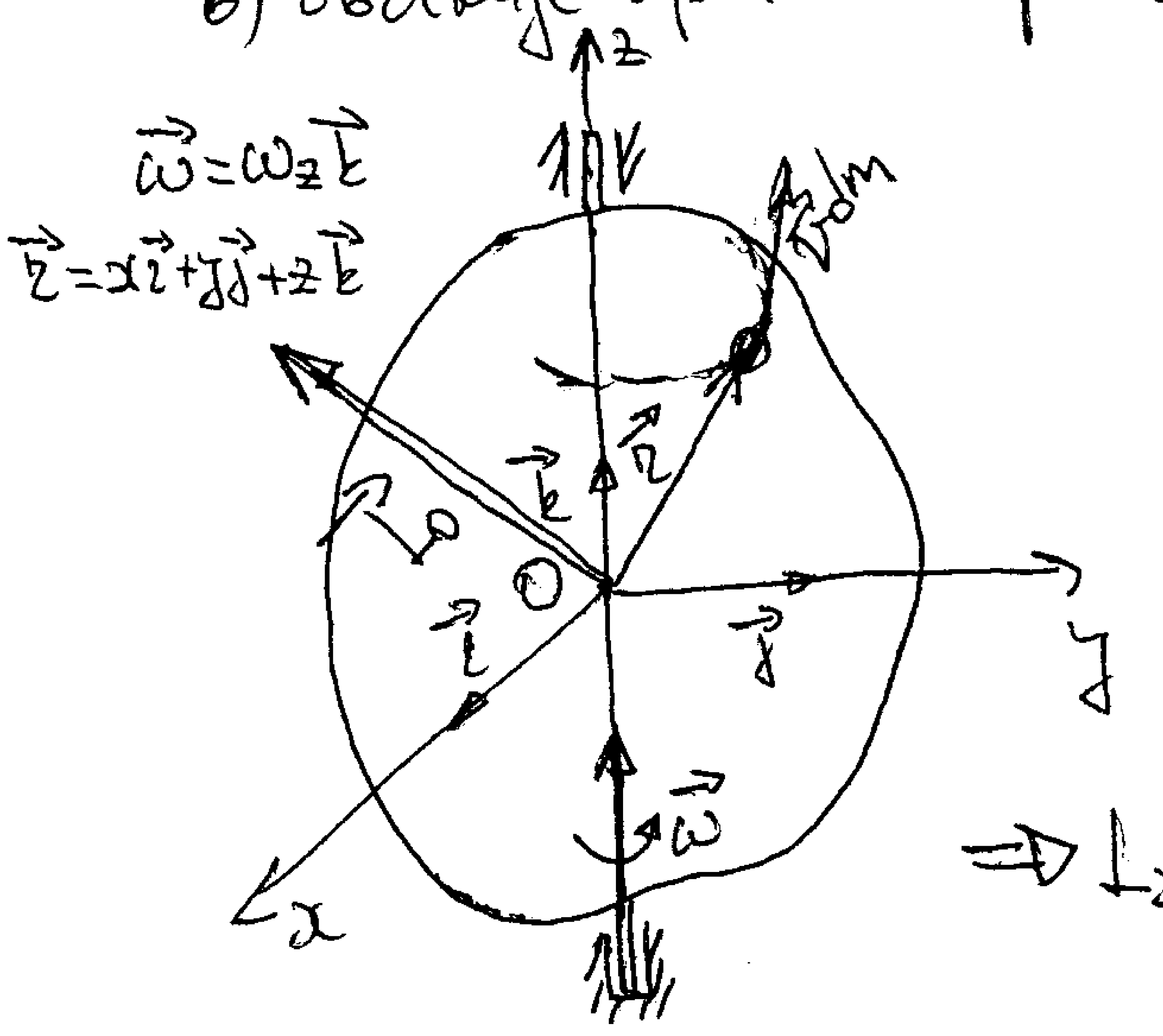
Brzine svih tačaka tijela su iste, $\vec{v}=\vec{v}_C$, pa su relativne brzine tačaka tijela u odnosu na translatorno pokretni koordinatni sistem $Cx_1y_1z_1$ (koji se kreće na isti način kao i tijelo) jednake nuli, tj. $\vec{v}_r = \vec{v} - \vec{v}_C = 0$.

$$\vec{L}_C = \vec{L}_{Cr} = \int_{(m)} \vec{\rho} \times \underbrace{\cancel{\vec{v}_r}}_{0} \, dm = 0$$

Na osnovu (6.1.7) je $\vec{L}_O = \vec{M}_O^{m\vec{v}} = \vec{r}_C \times m\vec{v}$,

odnosno: $L_x = M_x^{m\vec{v}}$, $L_y = M_y^{m\vec{v}}$, $L_z = M_z^{m\vec{v}}$

b) obrtanje tijela oko nepokretne ose



$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

$$\vec{L}_O = \int_{(m)} \vec{r} \times \vec{v} \, dm = \int_{(m)} \vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) \, dm$$

$$\left[\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C}(\vec{A} \cdot \vec{B})\right]$$

$$\downarrow$$

$$\vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = \vec{\omega} r^2 - \vec{r}(\vec{r} \cdot \vec{\omega}) = \omega_z (x^2+y^2)\vec{k} - \omega_z xz \vec{i} - \omega_z yz \vec{j}$$

$$\Rightarrow L_x = \vec{L}_O \cdot \vec{i} = -\omega_z \underbrace{\int_{(m)} xz \, dm}_{= J_{xz}}$$

$$L_y = \vec{L}_O \cdot \vec{j} = -\omega_z \underbrace{\int_{(m)} yz \, dm}_{= J_{yz}}, \quad L_z = \vec{L}_O \cdot \vec{k} = \omega_z \underbrace{\int_{(m)} (x^2+y^2) \, dm}_{J_z}$$

$\vec{L}_O = L_x \vec{i} + L_y \vec{j} + L_z \vec{k}$, gdje su kinetički momenti za pojedine ose:

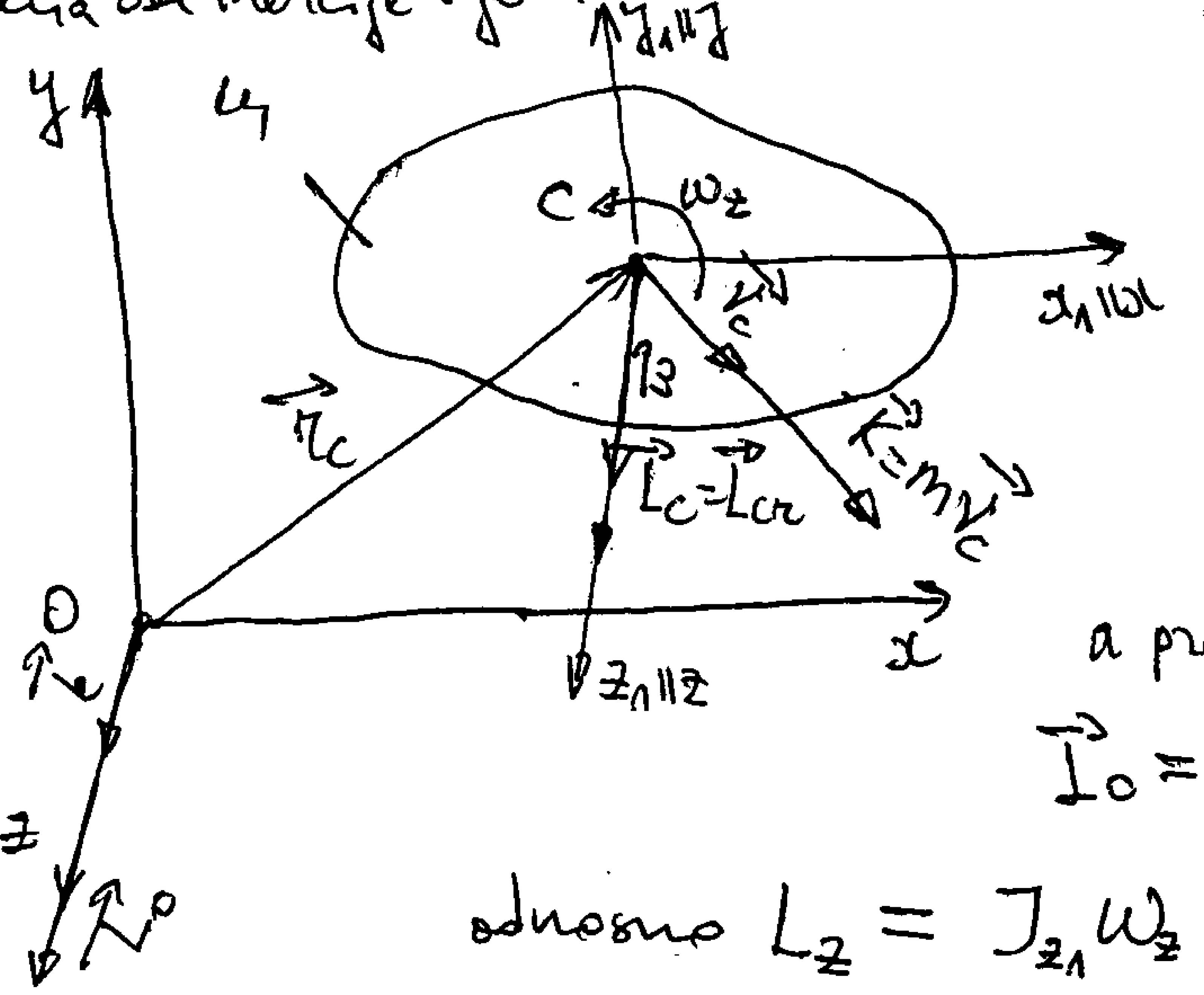
$$L_x = -J_{xz}\omega_z, \quad L_y = -J_{yz}\omega_z, \quad L_z = J_z \omega_z \qquad (1)$$

N: U prethodnim izvođenjima ose koordinatnog sistema mogu biti kako nepokretne tako i pokretne.

Vektor $\vec{L}_O$ nema pravac obrtne ose (vektora ugaone brzine). Samo onda kada je $J_{xz}=J_{yz}=0$, tj. kada je obrtna osa <u>glavna osa inercije</u> tijela, biće $\vec{L}_O = L_z\vec{k} = J_z\vec{\omega}$, i tj. vektor $\vec{L}_O$ biće usmjeren duž obrtne ose.

c) ravno kretanje tijela

Poznato je iz kinematike da je ravno kretanje takvo kretanje tijela pri kome se sve njegove tačke kreću paralelno prema nekoj nepokretnoj ravni. Ta ravan se zove ravan kretanja i kretanje tijela se svodi na kretanje ravne figure u toj ravni. Pretpostavićemo da je Oxy ravan kretanja i da je ona ravan materijalne simetrije tijela. Tada centar inercije C tijela leži u toj ravni, a osa koja prolazi kroz tačku C i upravna je na ravan kretanja je glavna centralna osa inercije tijela. Razložimo kretanje tijela na translatorno određeno kretanjem centra inercije C i na relativno kretanje u odnosu na centar inercije, koje je, u ovom slučaju, obrtanje oko ose koja prolazi kroz tačku C, a normalna je na ravan kretanja (osa z_1).



Na osnovu (6.2.1) biće

$$\vec{L}_C = \vec{L}_{Cr} = J_{z_1}\omega_z\vec{k} = J_{z_1}\vec{\omega},$$

a prema (6.1.7):

$$\vec{L}_O = J_{z_1}\vec{\omega} + \vec{M}_O^{m\vec{v}_C},$$

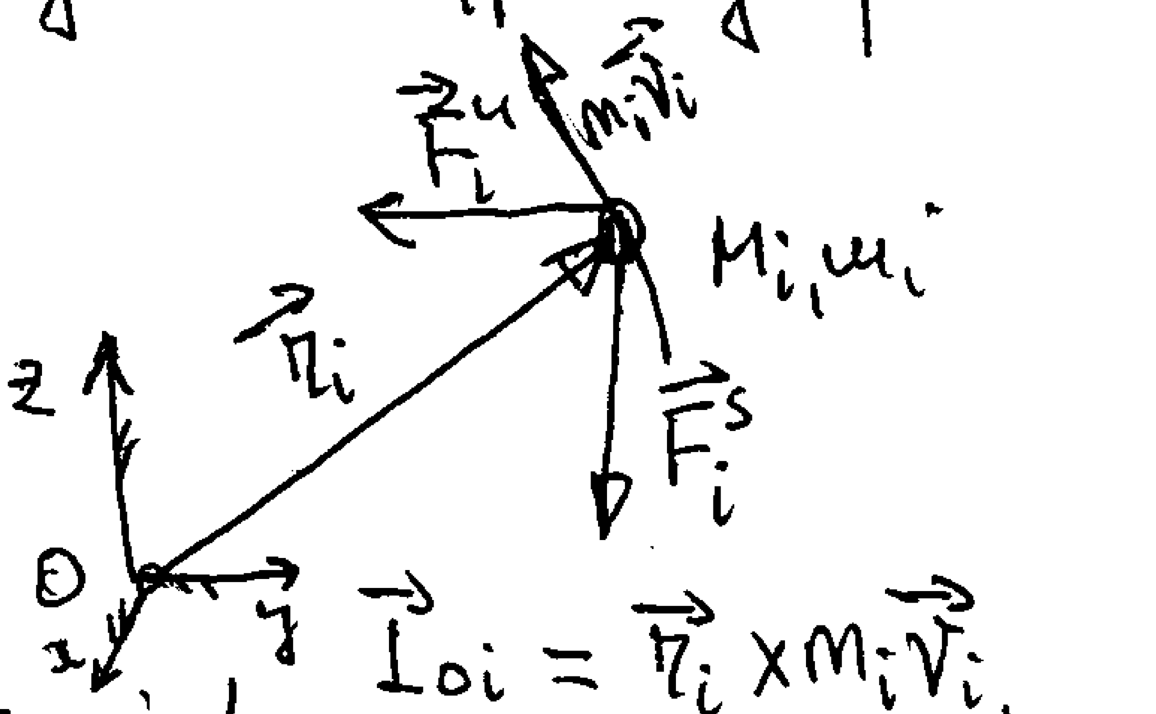
odnosno $$L_z = J_{z_1}\omega_z + M_z^{m\vec{v}_C}$$

Napomena 1: Umjesto J_{z_1} obično se piše J_{Cz} ili, još češće, samo J_C.

Napomena 2: Ukoliko ravan kretanja Oxy ne bi bila ravan materijalne simetrije to bi kinetički moment $\vec{L}_C$ imao komponente po x_1 i y_1 osi (v. 6.2.1).

6.3 Zakon o promjeni momenta količina kretanja

Zakon o promjeni momenta količine kretanja materijalne tačke, primijenjen na tačku M_i, mase m_i, iz datog sistema glasi



$$\frac{d\vec{L}_{Oi}}{dt} = \vec{M}_O^{\vec{F}_i^s} + \vec{M}_O^{\vec{F}_i^u}$$

gdje su $\vec{F}_i^s$ i $\vec{F}_i^u$ rezultante svih spoljašnjih i unutrašnjih sila, koje djeluju na datu tačku. $\vec{L}_{Oi} = \vec{r}_i \times m_i\vec{v}_i$ Ako postavimo ovakve jednačine za svaku tačku sistema, a zatim sve te jednačine saberemo, dobićemo

$$\frac{d}{dt}\underbrace{\left(\sum \vec{L}_{Oi}\right)}_{=\vec{L}_O} = \underbrace{\sum \vec{M}_O^{\vec{F}_i^s}}_{=\vec{M}_O^s} + \underbrace{\cancel{\sum \vec{M}_O^{\vec{F}_i^u}}}_{=\cancel{\vec{M}_O^u}} 0$$

glavni moment unutrašnjih sila je jednak nuli (v. odjeljak 1)

odnosno

$$\boxed{\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{M}_O^s} \qquad (1)$$

Dobijena relacija izražava zakon o promjeni momenta količine kretanja sistema: <u>Izvod po</u>

vremenu momenta količine kretanja sistema za neku nepokretnu tačku jednak je glavnom momentu spoljašnjih sila (vektorskom zbiru momenata svih spoljašnjih sila) za istu tačku.

Vektorskoj jednačini (1) odgovaraju tri skalarne jednačine u obliku

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dL_x}{dt} &= M_x^s = \sum M_x^{\vec F_i^s} \\
\frac{dL_y}{dt} &= M_y^s = \sum M_y^{\vec F_i^s} \\
\frac{dL_z}{dt} &= M_z^s = \sum M_z^{\vec F_i^s}
\end{aligned}\right\} \quad (1')$$

koje izražavaju zakone o promjeni momenta količine kretanja sistema za odgovarajuće nepokretne ose: Izvod po vremenu kinetičkog momenta sistema za neku nepokretnu osu, jednak je zbiru momenata svih spoljašnjih sila za tu osu.

Iz dokazanog zakona proističu sljedeće važne posledice:

1) Unutrašnje sile ne utiču direktno na promjenu kinetičkog momenta.

2) Zakon o održanju momenta količine kretanja.

$$\text{Ako je } \vec M_O^s = 0 \xrightarrow{(1)} \vec L_O = \overrightarrow{const}$$

Kada je glavni moment spoljašnjih sila za neku nepokretnu tačku jednak nuli, onda je moment količine kretanja sistema za istu tačku konstantan (i po pravcu i po intezitetu).

3) Zakon o održanju kinetičkog momenta za osu.

$$\text{Ako je } \vec M_O^s \neq 0,\ M_x^s = 0 \xrightarrow{(1')_1} L_x = const$$

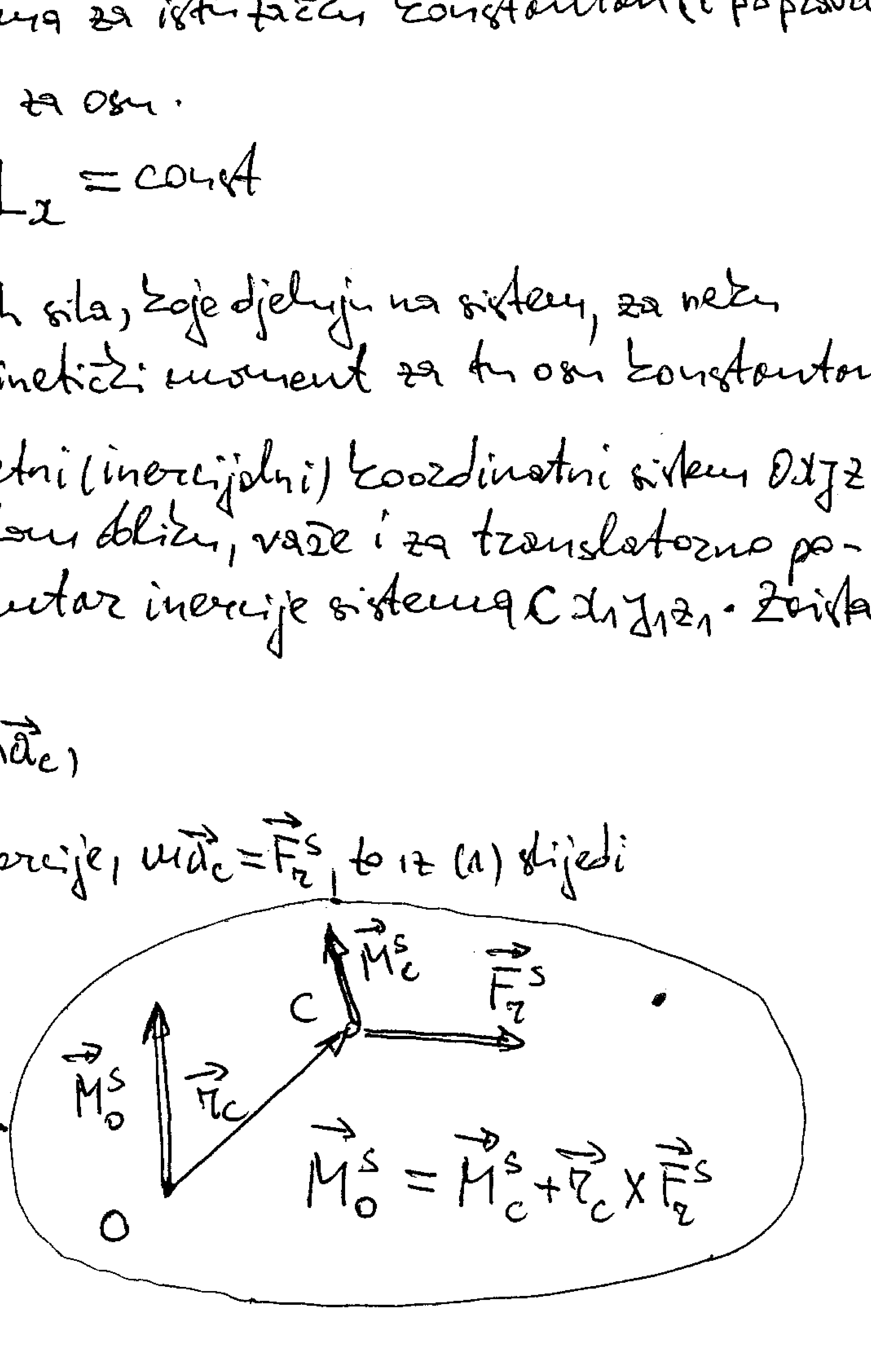
Kada je zbir momenata svih spoljašnjih sila, koje djeluju na sistem, za neku nepokretnu osu jednak nuli, onda je kinetički moment za tu osu konstantan.

Relacije (1) i (1') izvedene su za nepokretni (inercijalni) koordinatni sistem $Oxyz$. Važno je primijetiti da one, u potpuno istom obliku, važe i za translatorno pokretni koordinatni sistem vezan za centar inercije sistema $Cx_1y_1z_1$. Zaista, polazeći od relacije (6.1.7), imamo

$$\frac{d\vec L_O}{dt} = \frac{d\vec L_C}{dt} + \underbrace{\cancel{\vec v_C \times m\vec v_C}}_{0} + \vec r_C \times m\vec a_C,$$

a pošto je, na osnovu zakona o kretanju centra inercije, $m\vec a_C = \vec F_R^s$, to iz (1) slijedi

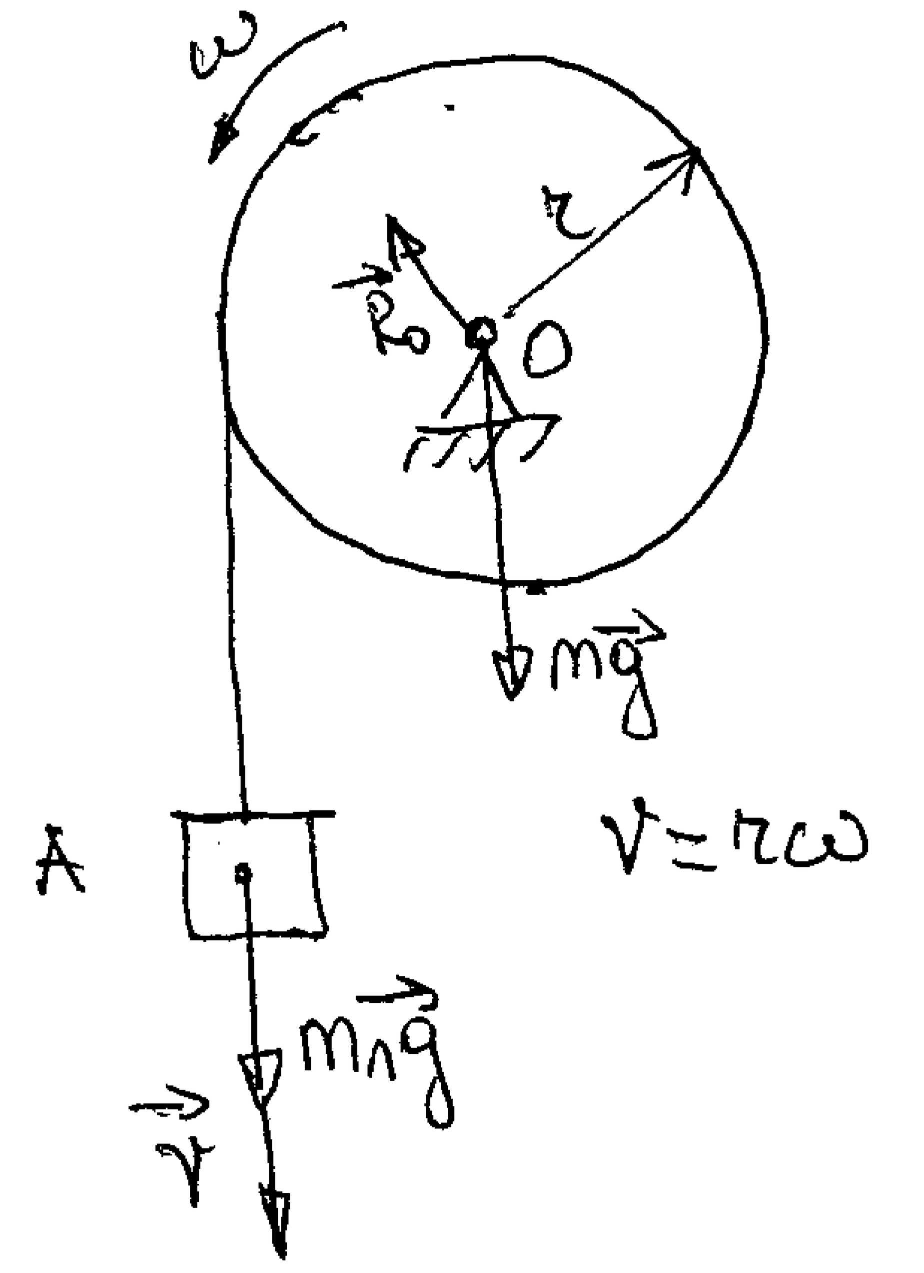
$$\frac{d\vec L_C}{dt} = \underbrace{\vec M_O^s - \vec r_C \times \vec F_R^s}_{=\vec M_C^s},$$



odnosno

$$\boxed{\frac{d\vec L_C}{dt} = \vec M_C^s} \quad (2)$$

Pr. Na kotur, koji se može smatrati homogenim kružnim diskom mase m i poluprečnika r, namotan je konopac na čijem je kraju A obješen teret mase m_1. Zanemarujući masu konopca i trenje u ležištu, odrediti ugaono ubrzanje ~~kotura~~ kotura pri vertikalnom spuštanju tereta. Konopac smatrati nerastegljivim.



$v = r\omega$

spoljnje sile: $m_1\vec{g}$, $m\vec{g}$, $\vec{R}_O$

Ako primijenimo zakon o promjeni kinetičkog momenta za osu O, biće

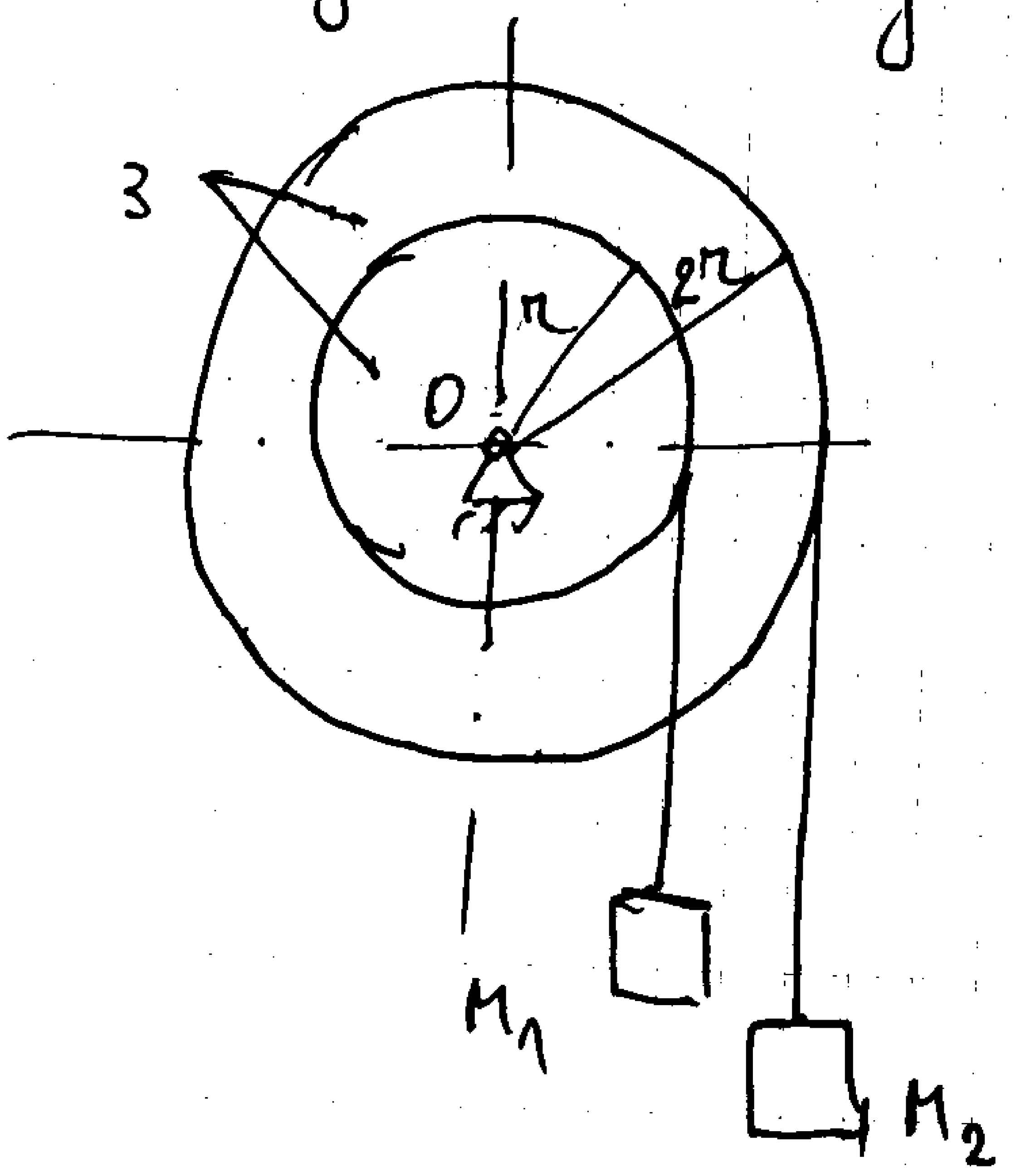
$$\frac{dL_O}{dt} = M_O^{m_1\vec{g}} + \cancel{M_O^{m\vec{g}}}^{\,0} + \cancel{M_O^{\vec{R}_O}}^{\,0}$$

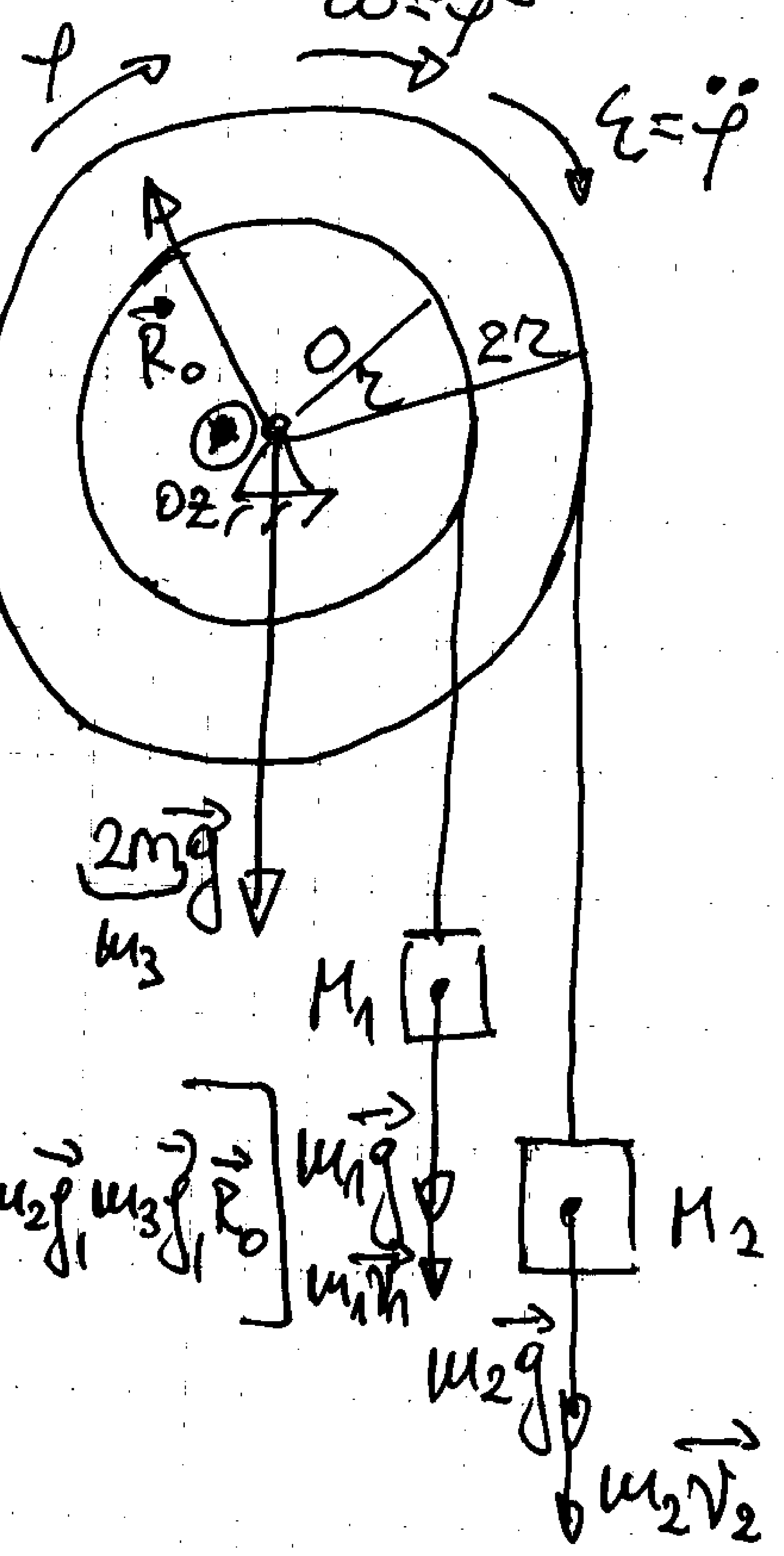
$$L_O = \underbrace{L_O^{(m)}}_{= J_O\omega = \frac{mr^2}{2}\omega} + \underbrace{L_O^{(m_1)}}_{= M_O^{m_1\vec{v}} = m_1 v r} = \left(\frac{m}{2} + m_1\right) r^2\omega$$

$$M_O^{m_1\vec{g}} = m_1 g \cdot r$$

$$\Rightarrow \quad \frac{m+2m_1}{2} r^2 \frac{d\omega}{dt} = m_1 g r \quad \Rightarrow \quad \varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \boxed{\frac{2m_1 g}{(m+2m_1)r}}$$

① Tereti M_1 i M_2, masa $m_1 = 2m$ i $m_2 = m$, vezani su za krajeve nerastegljivih niti koja su namotana na dva homogena koaksijalna, međusobno kruto vezana cilindra poluprečnika r i $2r$ i ukupne mase $m_3 = 2m$. Cilindri se obrću oko nepokretne horizontalne ose simetrije za koju je njihov poluprečnik inercije $i_0 = r\sqrt{2}$. Odrediti ugaono ubrzanje cilindara.





Spoljašnje sile koje deluju na sistem: $m_1\vec g$, $m_2\vec g$, $m_3\vec g$, $\vec R_0$

$$\sum M_{Oz}^{\vec F_i^s} = m_1 g r + m_2 g\, 2r = 4mgr$$

$$L_{Oz} = L_{Oz}^{(1)} + L_{Oz}^{(2)} + L_{Oz}^{(3)}$$

$$L_{Oz}^{(1)} = M_{Oz}^{m_1\vec v_1} = m_1 v_1 r, \quad v_1 = r\omega, \quad L_{Oz}^{(1)} = m_1 r^2\omega = 2mr^2\omega$$

$$L_{Oz}^{(2)} = M_{Oz}^{m_2\vec v_2} = m_2 v_2\, 2r, \quad v_2 = 2r\omega, \quad L_{Oz}^{(2)} = 4mr^2\omega$$

$$L_{Oz}^{(3)} = J_{Oz}^{(3)}\omega, \quad J_{Oz}^{(3)} = m_3 i_0^2 = 4mr^2 \Rightarrow L_{Oz}^{(3)} = 4mr^2\omega$$

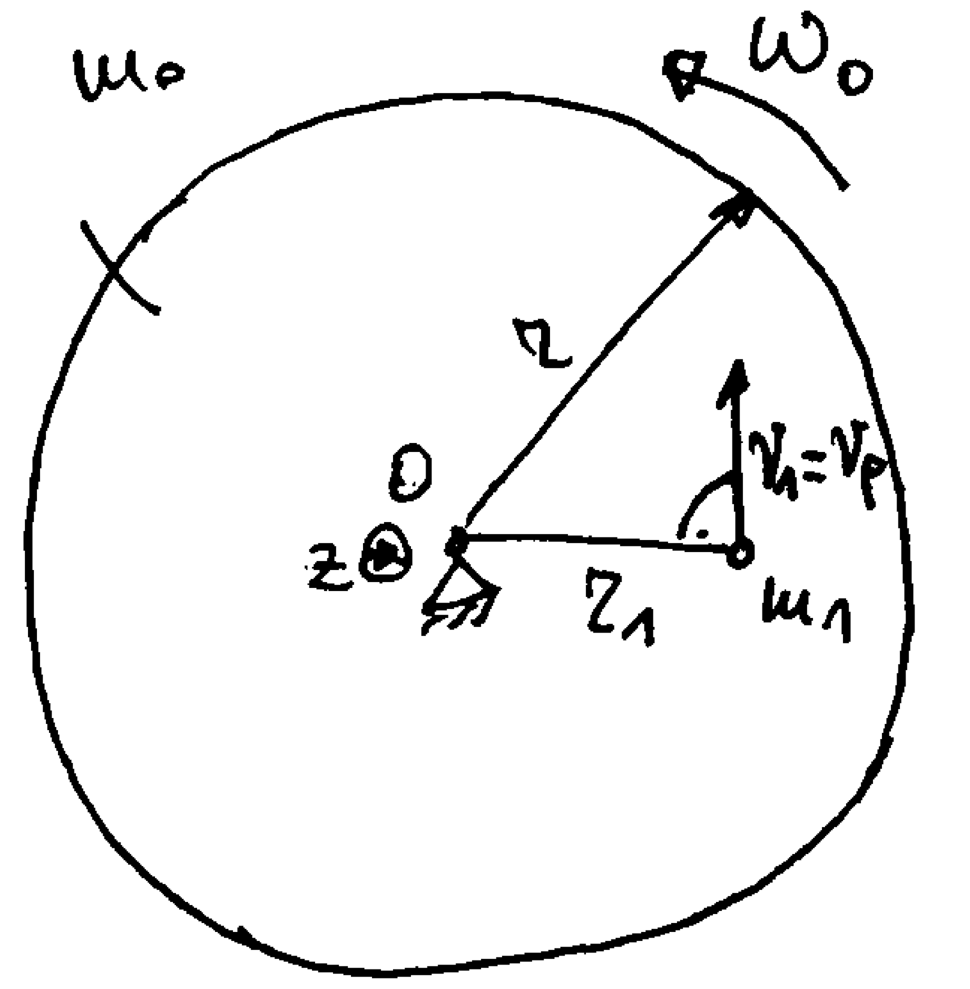
$$\Rightarrow L_{Oz} = 10mr^2\omega$$

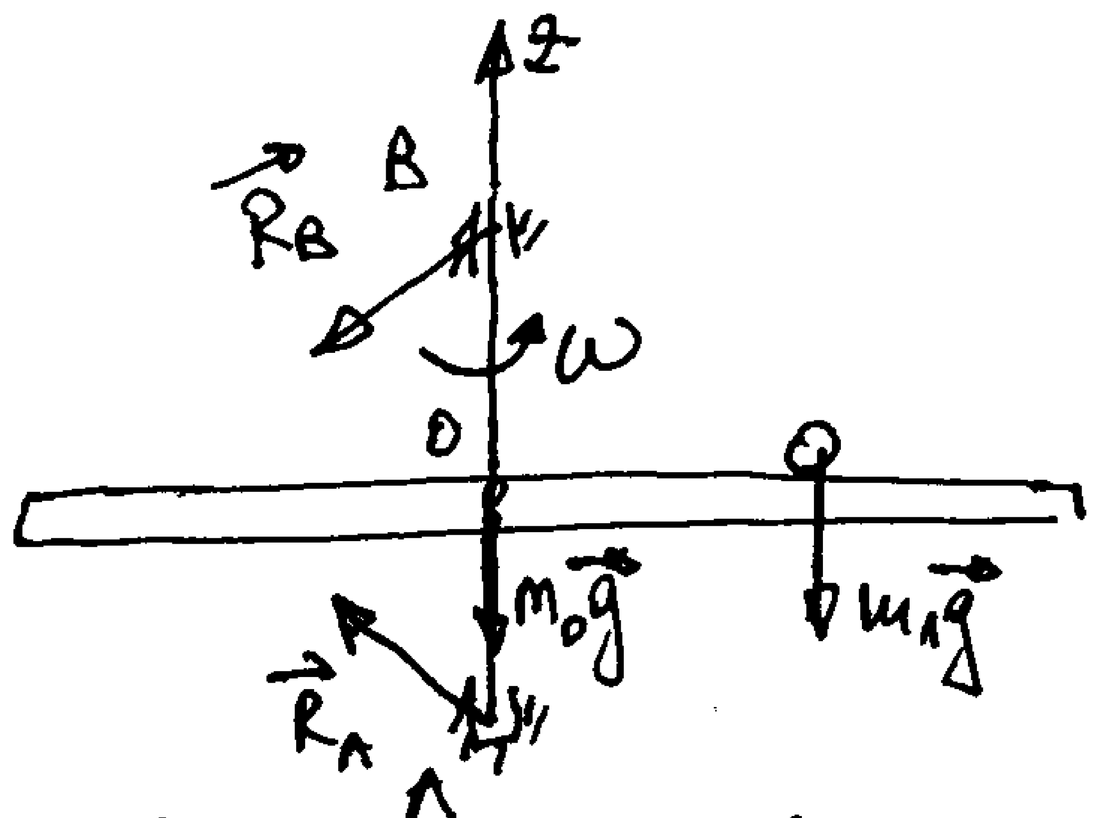
$$\frac{dL_{Oz}}{dt} = \sum M_{Oz}^{\vec F_i^s} \Rightarrow 10mr^2 \overbrace{\frac{d\omega}{dt}}^{\varepsilon} = 4mgr$$

$$\boxed{\varepsilon = \frac{2}{5}\frac{g}{r}}$$

(2) Kružna horizontalna platforma mase m_0 i poluprečnika r obrće se oko vertikalne ose ugaonom brzinom ω_0. Na platformi na rastojanju r_1 od obrtne ose stoji čovjek mase m_1. Odrediti, zanemarujući trenje u ležištima platforme, ugaonu brzinu ω_1 kojom će se obrtati platforma kada čovjek počne da se kreće relativnom brzinom v_r po kružnici radijusa r_1 u stranu obrtanja platforme. Platformu smatrati homogenim kružnim diskom a čovjeka materijalnom tačkom. Dato je $\omega_0 = 10$ ob/min; $m_0 = 200$ kg, $m_1 = 70$ kg, $r = 2$ m, $r_1 = 1,5$ m; $v_r = 2\,\frac{m}{s}$

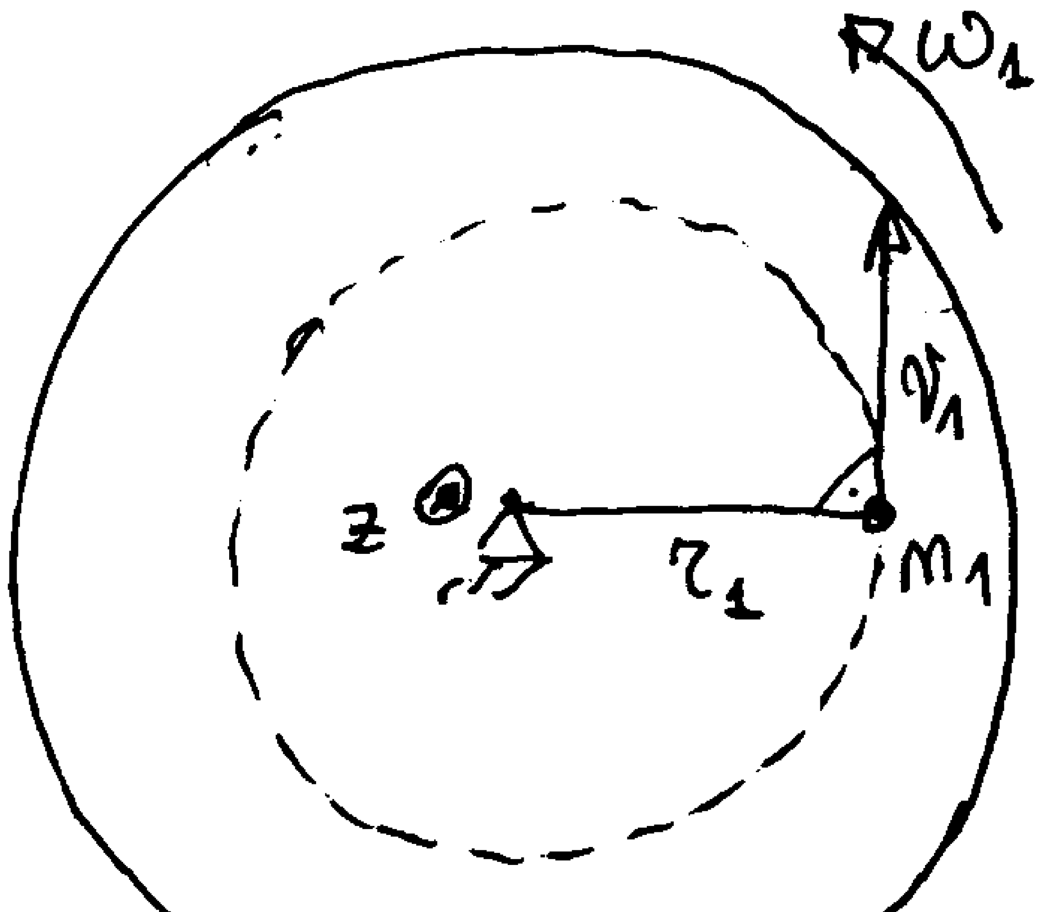
(t_0)



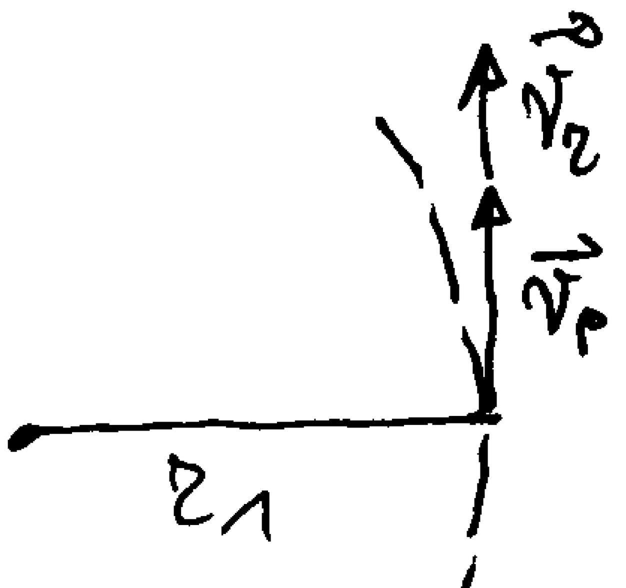


$v_1 = v_p = r_1\omega_0$ (čovjek miruje u odnosu na platformu)

(t_1)



čovjek se kreće po kružnici relativnom brzinom v_r: $\vec v_1 = \vec v_p + \vec v_r$



$v_1 = v_p + v_r$, $v_p = r_1\omega_1$

$\boxed{v_1 = r_1\omega_1 + v_r}$

U sistemu platforma + čovjek spoljašnje sile su: $m_1\vec g$, $m_0\vec g$, $\vec R_A$, $\vec R_B$. Momenti svih ovih sila za obrtnu osu z su jednaki nuli pa važi zakon o održanju momenta količine kretanja za obrtnu osu.

$$\frac{dL_z}{dt} = M_z^{m_1\vec g} + M_z^{m_0\vec g} + M_z^{\vec R_A} + M_z^{\vec R_B} \equiv 0 \Rightarrow L_z = \text{Const}$$

$$L_{z0} = L_{z1}$$

$$L_{z0} = L_{z0}^{(m_0)} + L_{z0}^{(m_1)} = J_z\omega_0 + \overbrace{M_z^{m_1\vec v_1}}^{=m_1 v_1 r_1}, \quad J_z = \frac{m_0 r^2}{2}$$

$$L_{z0} = \left(\frac{m_0 r^2}{2} + m_1 r_1^2\right)\omega_0$$

$$L_{z1} = L_{z1}^{(m_0)} + L_{z1}^{(m_1)} = J_z\omega_1 + M_z^{m_1\vec v_1} = J_z\omega_1 + m_1 \overbrace{v_1}^{r_1\omega_1 + v_r} r_1$$

$$L_{z1} = \left(m_0\frac{r^2}{2} + m_1 r_1^2\right)\omega_1 + m_1 r_1 v_r$$

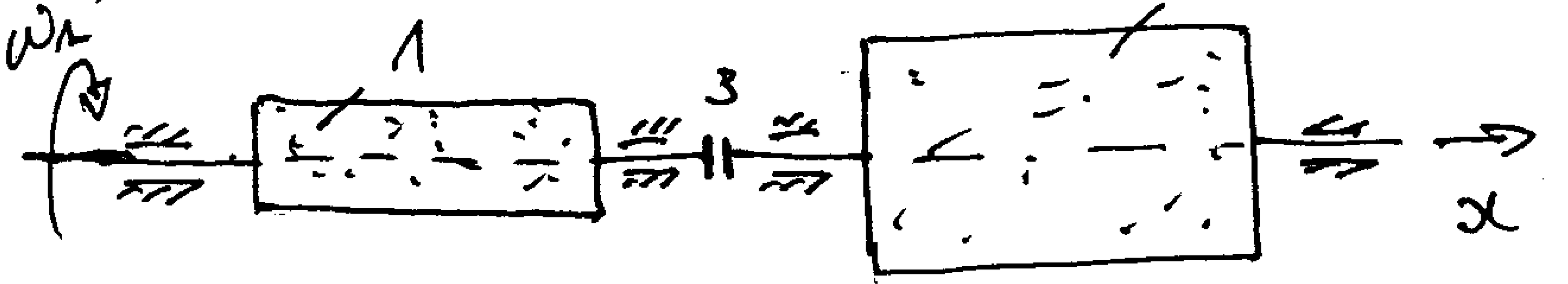
$$L_{z1} = L_{z0} \Rightarrow \omega_1 = \omega_0 - \frac{2 m_1 r_1 v_r}{m_0 r^2 + 2 m_1 r_1^2}$$

za brojne podatke:

$$\omega_0 = 10 \cdot \frac{2\pi}{60}\,\frac{rad}{s} = 1,047\,\frac{rad}{s}$$

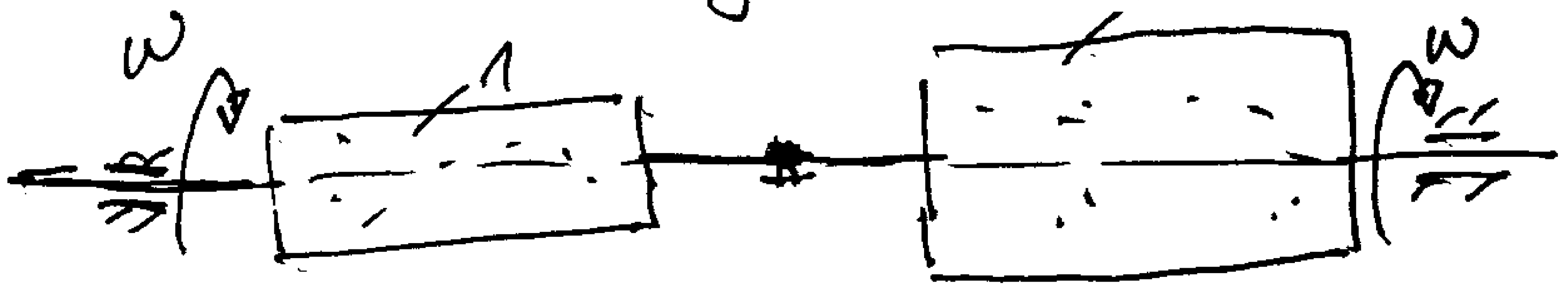
$$\omega_1 = 0,67\,\frac{rad}{s} = 0,67 \cdot \frac{60}{2\pi}\,\frac{ob}{min} = \boxed{6,4\,\frac{ob}{min}}$$

③ Vratilo 1 čiji je moment inercije za obrtnu osu $J_x^{(1)} = 1\,kgm^2$ obrće se konstantnom ugaonom brzinom $\omega_1 = 40\,rad/s$, a vratilo 2 miruje. Naći ugaonu brzinu vratila poslije uključenja spojnice 3, ako je moment inercije vratila 2 za obrtnu osu $J_x^{(2)} = 4\,kgm^2$. Otpore obrtanju i masu spojnice zanemariti.



$$\sum M_x^{\vec{F}_i^s} = 0 \rightarrow L_x = const$$

prije uključenja spojnice ($\omega_2 = 0$): $L_{x0} = J_x^{(1)}\omega_1$

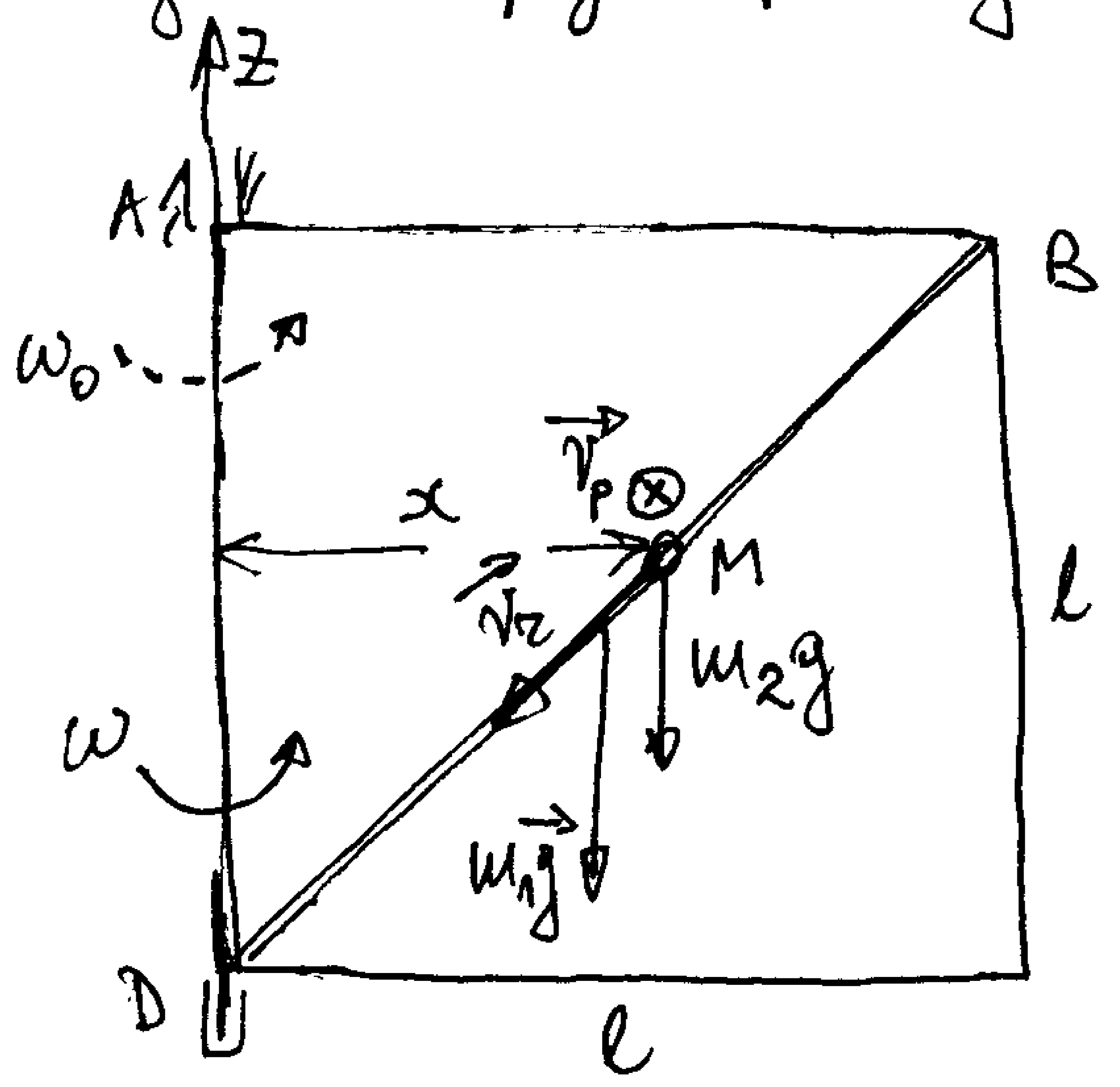


$$L_{x1} = (J_x^{(1)} + J_x^{(2)})\omega$$

nakon uključenja spojnice oba vratila se obrću kao jedno kruto tijelo momenta inercije za obrtnu osu $J_x^{(1)} + J_x^{(2)}$ ~~istom~~ ugaonom brzinom ω

$$L_{x0} = L_{x1} \Rightarrow \omega = \frac{J_x^{(1)}}{J_x^{(1)} + J_x^{(2)}}\omega_1 = 8\,\frac{rad}{s}$$

④ Kvadratna homogena ploča mase $m_1 = 3m$ i ivice l može se obrtati oko vertikalne ose AD. U ploči je urezan po dijagonali BD žlijeb u kome se nalazi kuglica mase $m_2 = m$. U nekom trenutku, kada se kuglica nalazila u tački B, ploči se saopšti ugaona brzina ω_0. Kolika će biti ugaona brzina ploče kada kuglica dospije u položaj D. Uzeti da je moment inercije ploče za obrtnu osu $J_z^{(1)} = \frac{m_1 l^2}{3}$



$$\frac{dL_z}{dt} = 0 \rightarrow L_z = const$$

Nađimo L_z u proizvoljnom trenutku tokom kretanja kuglice kroz žlijeb kada je ugaona brzina ploče ω

$$L_z = L_z^{(1)} + L_z^{(2)}, \quad L_z^{(1)} = J_z^{(1)}\omega = \frac{m_1 l^2}{3}\omega$$

$$L_z^{(2)} = M_z^{m_2\vec{v}_M}, \quad \vec{v}_M = \vec{v}_p + \vec{v}_r, \quad v_p = x\omega$$

$$= M_z^{m_2\vec{v}_p} + \cancel{M_z^{m_2\vec{v}_r}}^{\,0}$$

$$= x\,m_2 v_p = m_2 x^2\omega$$

$$\Rightarrow L_z = \left(\frac{m_1 l^2}{3} + m_2 x^2\right)\omega = m(l^2 + x^2)\omega$$

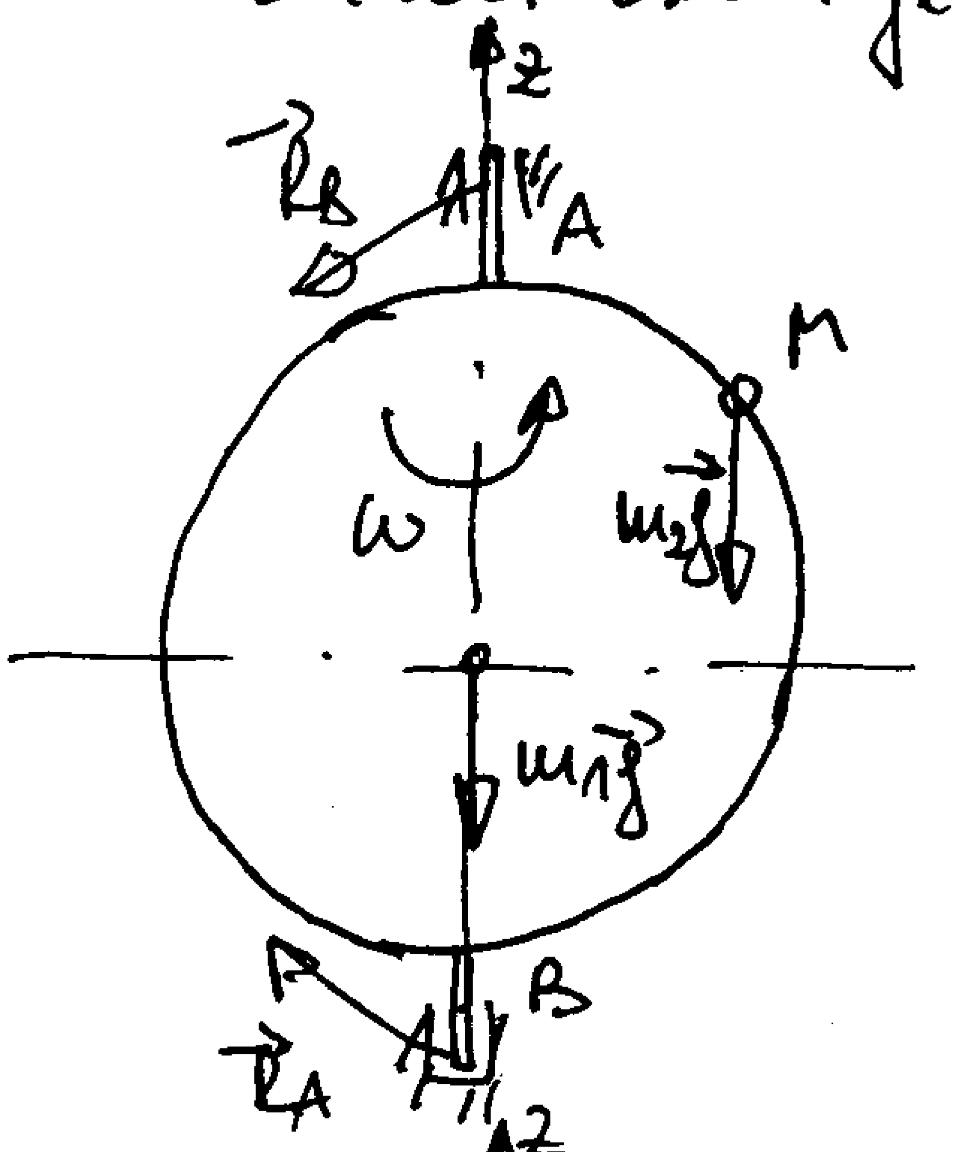
Kada je kuglica u položaju B ($x = l$, $\omega = \omega_0$): $L_{z0} = 2ml^2\omega_0$

Kada je kuglica u položaju D ($x = 0$, $\omega = \omega_1$): $L_{z1} = ml^2\omega_1$

$$L_{z0} = L_{z1}$$

$$\Rightarrow \boxed{\omega_1 = 2\omega_0}$$

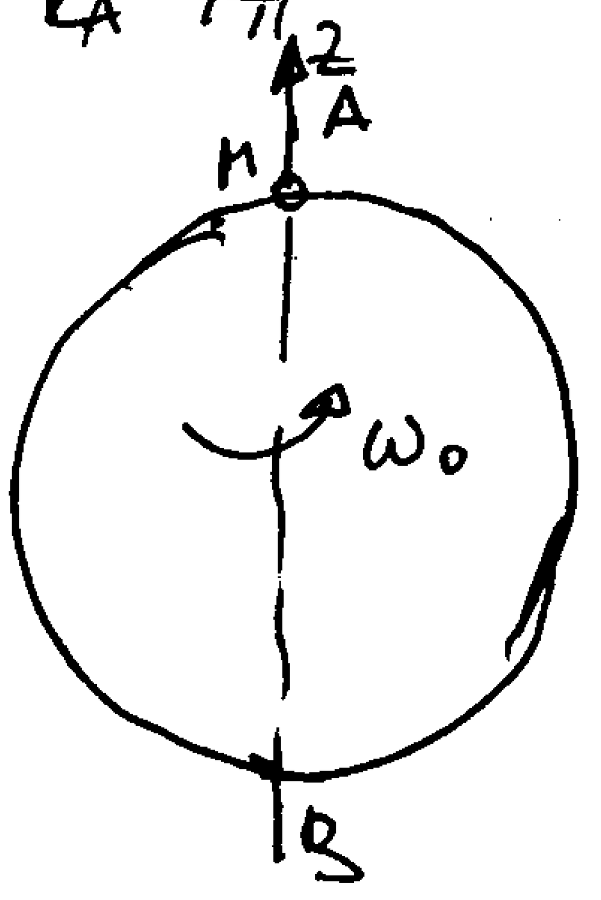
5. Homogeni disk mase m_1 i poluprečnika r obrće se oko vertikalne ose AB ugaonom brzinom ω_0. Iz tačke A po obodu diska počinje kretanje tačka M mase m_2. Odrediti ugaonu brzinu diska u trenutku kada je tačka M na najvećem udaljenju od ose obrtanja.



$$\sum M_z^{\vec F_i^s} \equiv 0 \Rightarrow L_z = const$$

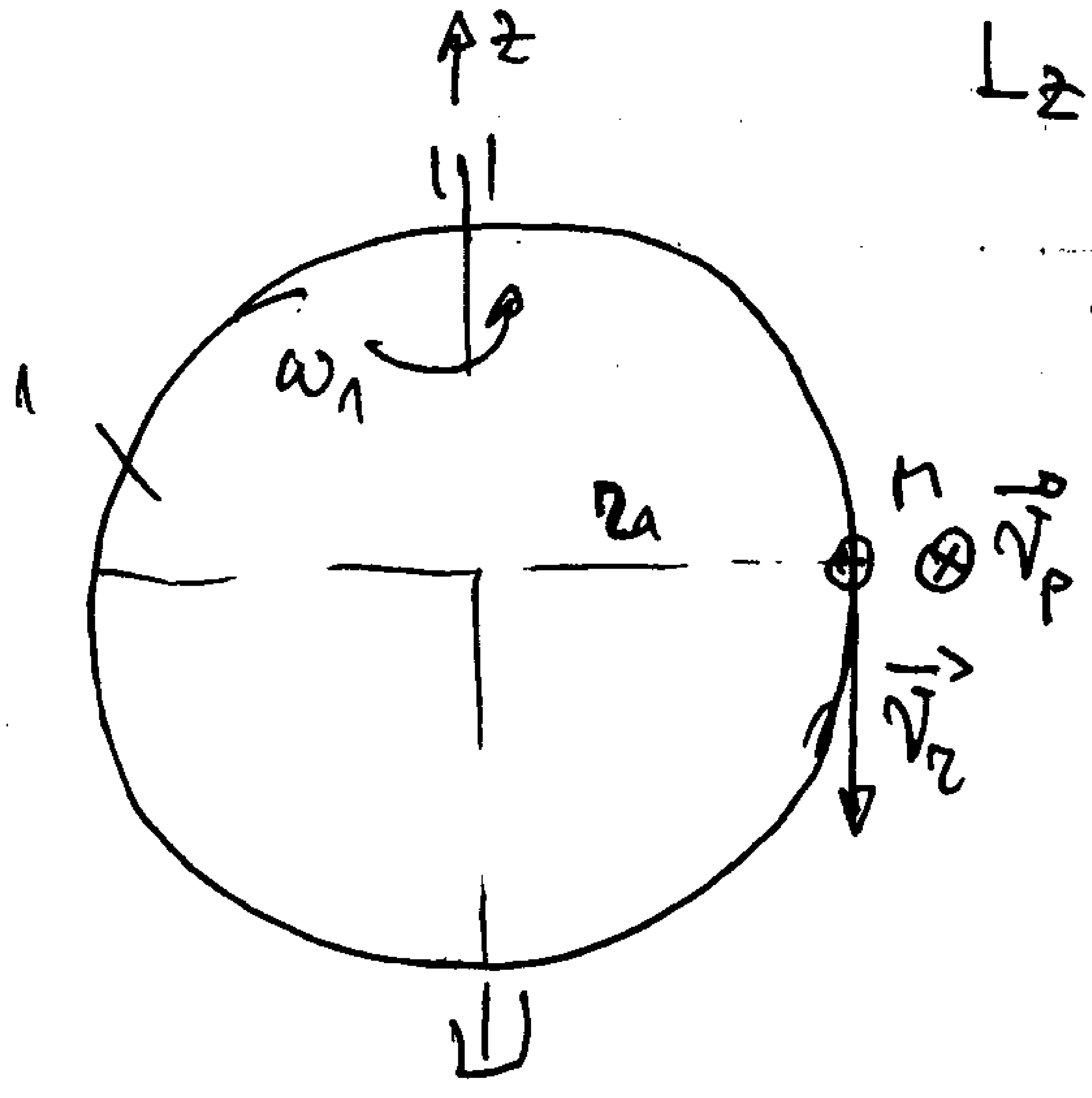
$$L_{z0} = L_{z0}^{(1)} + \cancel{L_{z0}^{(2)}}$$ 0 jer je tačka M na obrtnoj osi

(t₀)



$L_{z0} = J_z^{(1)}\omega_0$, $J_z^{(1)} = \frac{m_1 r^2}{4}$ - moment inercije homogenog kružnog diska za centralnu osu u ravni diska (v. predavanja)

(t₁)



$$L_{z1} = L_{z1}^{(1)} + L_{z1}^{(2)}, \quad L_{z1}^{(1)} = J_z^{(1)}\omega_1$$

$$L_{z1}^{(2)} = M_z^{m_2\vec v_M}, \quad \vec v_M = \vec v_p + \vec v_r, \quad v_p = r\omega_1$$

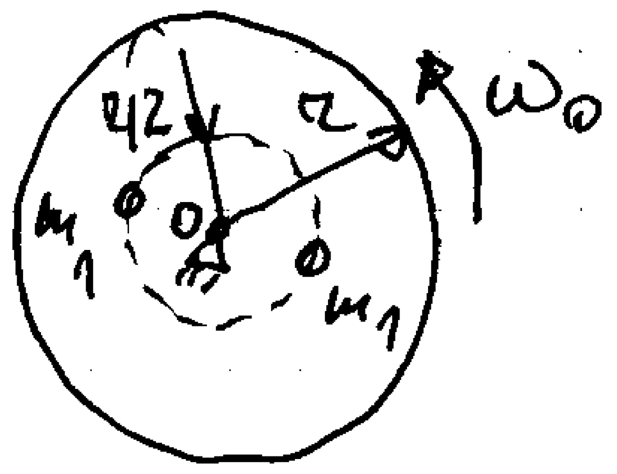
$$= \underbrace{M_z^{m_2\vec v_p}}_{= r m_2 v_p} + \underbrace{\cancel{M_z^{m_2\vec v_r}}}_{0}$$

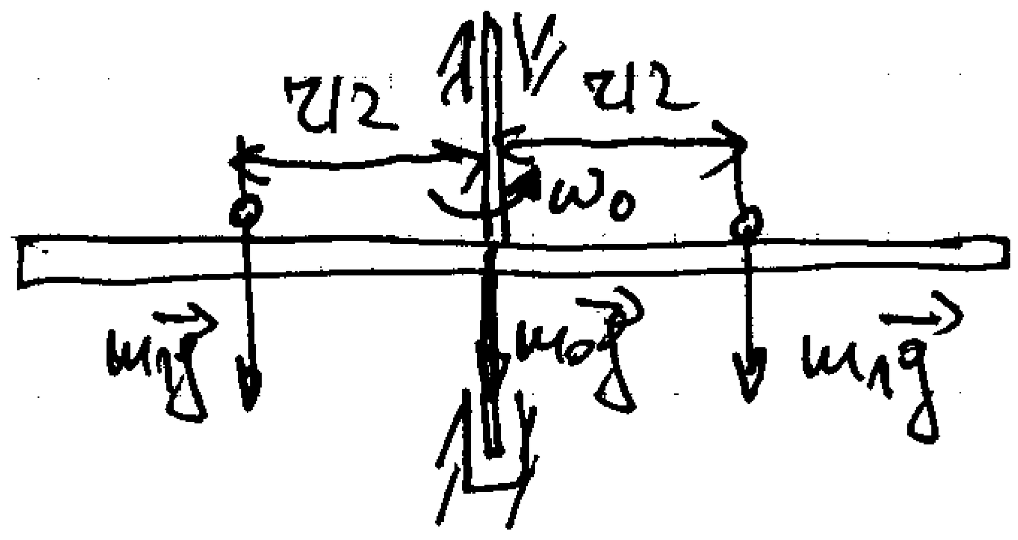
$$r m_2 v_p = m_2 r^2 \omega_1$$

$$L_{z0} = L_{z1} \Rightarrow \left(\frac{m_1 r^2}{4} + m_2 r^2\right)\omega_1 = \frac{m_1 r^2}{4}\omega_0$$

$$\boxed{\omega_1 = \frac{m_1}{m_1 + 4m_2}\omega_0}$$

6. Kružna horizontalna platforma, mase m_0 i poluprečnika r, obrće se oko vertikalne ~~ose~~ centralne ose konstantnom ugaonom brzinom ω_0. Na platformi, na rastojanju $r/2$ od obrtne ose, stoje dva čovjeka jednakih masa m_1. Odrediti ugaonu brzinu kojom će se obrtati platforma kada ljudi počnu da se kreću relativnom brzinom v_r po kružnici u smjeru suprotnom od smjera obrtanja platforme. Ljude smatrati materijalnim tačkama, a platformu homogenim kružnim diskom.





7. Tegovi M_1 i M_2, masa m_1 i m_2, vezani su za krajeve nerastegljivog užeta koje je prebačeno preko kotura (homogeni kružni disk mase m_0 i poluprečnika r) koji se može obrtati oko nepokretne horizontalne ose O. Odrediti ugaono ubrzanje kotura.