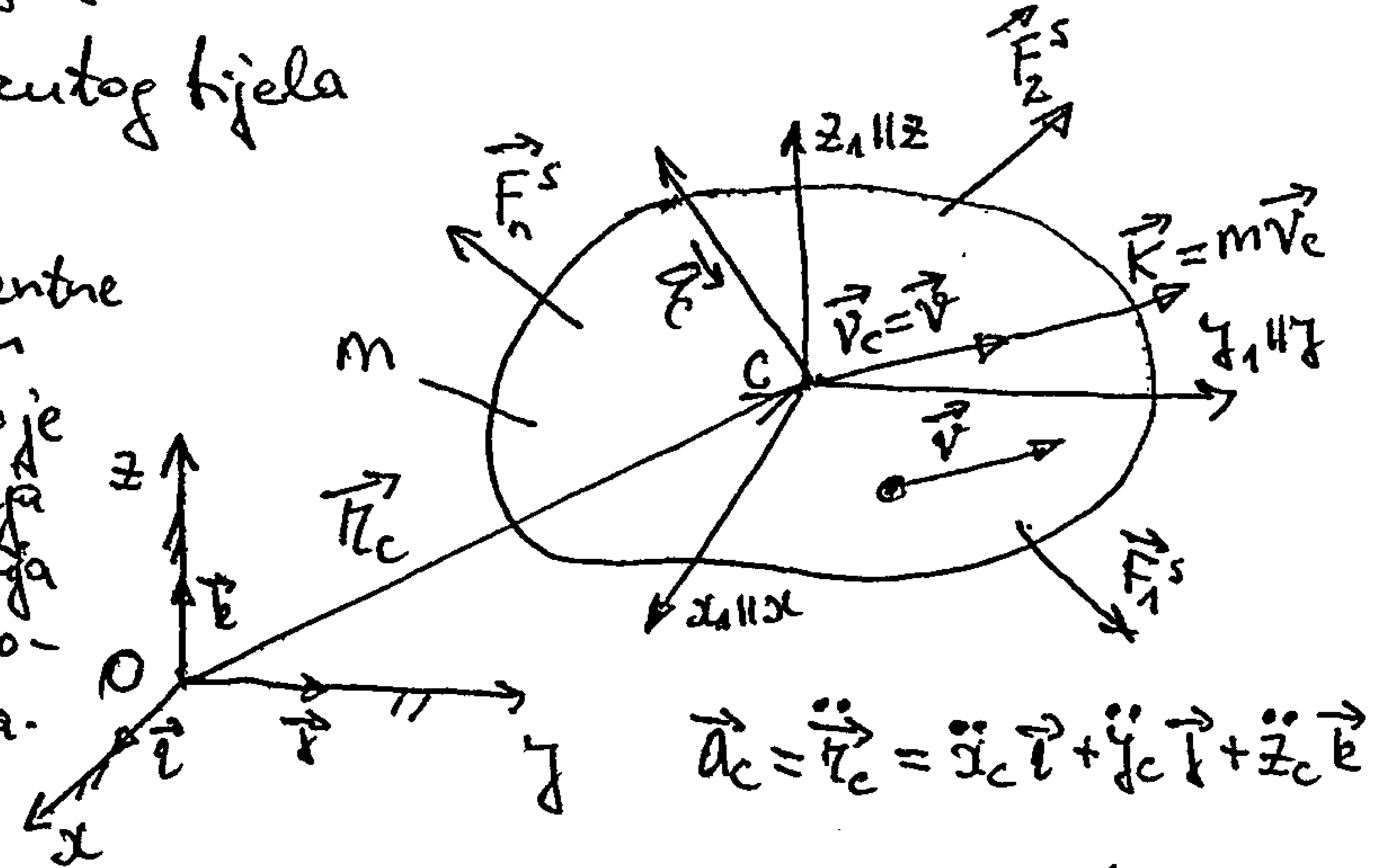
VI sedmica nastave
- predavanja sa primjerima

7. Dinamika krutog tijela

Kruto tijelo predstavlja specijalan slučaj sistema materijalnih tačaka čija su međusobna rastojanja nepromjenljiva tokom kretanja. Polazeći od zakona o kretanju centra inercije i zakona o promjeni kinetičkog momenta, može se doći do dinamičkih jednačina za pojedine vrste kretanja krutog tijela, na osnovu kojih se, analogno dinamici tačke, mogu rešavati dva osnovna zadatka dinamike (prvi zadatak – određivanje sila na osnovu zadanog zakona kretanja tijela; drugi zadatak – određivanje kretanja, a u slučaju neslobodnog tijela i reakcija veza, pri zadanim silama).

7.1 Translatorno kretanje krutog tijela

Pri translatornom kretanju tijela trajektorije svih tačaka su kongruentne (podudarne) krive i sve tačke imaju jednake brzine i ubrzanja. Zato je za poznavanje translatornog kretanja tijela dovoljno znati zakon kretanja jedne tačke tijela, a za tu tačku podesno je uzeti centar inercije C tijela.



$$\vec{a}_C = \ddot{\vec{r}}_C = \ddot{x}_C\vec{i} + \ddot{y}_C\vec{j} + \ddot{z}_C\vec{k}$$

U odnosu na translatorno pokretni koordinatni sistem $Cx_1y_1z_1$, vezan za centar inercije tijela, brzine tačaka tijela su jednake nuli pa je

$$\vec{L}_C = \vec{L}_{Cr} = 0$$

Ako primijenimo zakon o kretanju centra inercije sistema (5.4.1) i zakon o promjeni momenta količine kretanja sistema za centar inercije (6.3.2), imaćemo

$$m\ddot{\vec{r}}_C = \sum \vec{F}_i^s \qquad (1)$$

$$\frac{d\vec{L}_C}{dt} = 0 = \sum \vec{M}_C^{\vec{F}_i^s} \qquad (2)$$

Poslednja vektorska jednačina pokazuje da je pri translatornom kretanju tijela glavni moment sila koje djeluju na tijelo, za centar inercije, jednak nuli. Tijelo će izvoditi translatorno kretanje ako sile koje na njega djeluju zadovoljavaju uslov (2) i ako je početna ugaona brzina tijela jednaka nuli.

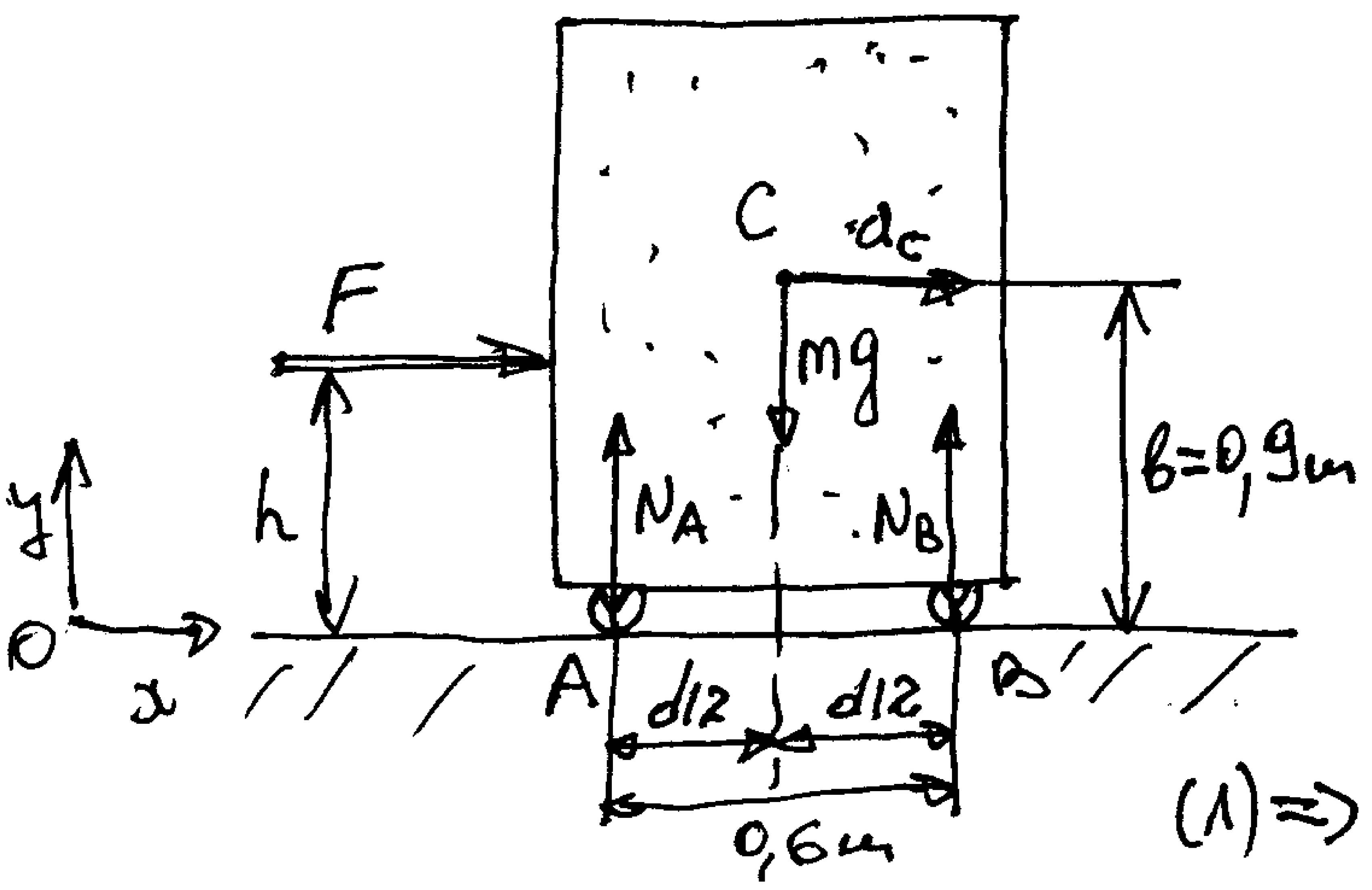
Vektorskoj jednačini (1), koja je identična sa osnovnom jednačinom dinamike tačke, odgovara sledeći sistem skalarnih jednačina

$$m\ddot{x}_C = \sum F_{ix}^s, \quad m\ddot{y}_C = \sum F_{iy}^s, \quad m\ddot{z}_C = \sum F_{iz}^s \qquad (1')$$

koje predstavljaju diferencijalne jednačine translatornog kretanja krutog tijela.

Translatorno kretanje k.t. (zadaci)

1. Ormar mase $m = 20\,kg$, montiran na točkiće koji mu omogućavaju da se kreće bez trenja po horizontalnom podu, gura se horizontalnom silom $F = 100\,N$ (v. sl.). Odrediti: a) ubrzanje ormara; b) Uslov koji treba da zadovoljava rastojanje h da se ormar ne prevrne. Dimenzije točkića zanemariti.



$$m\vec{a}_C = \vec{F} + m\vec{g} + \vec{N}_A + \vec{N}_B$$

$x: \quad m a_C = F \qquad (1)$

$y: \quad m \cdot 0 = -mg + N_A + N_B \quad (2)$

Sanduk se kreće translatorno, pa mora biti zadovoljen uslov:

$$\sum M_C^{\vec{F}_i^s} = 0 \Rightarrow N_A \frac{d}{2} - N_B \frac{d}{2} - F(b-h) = 0 \quad (3)$$

$$(1) \Rightarrow \boxed{a_C = \frac{F}{m} = 5\,\frac{m}{s^2}}$$

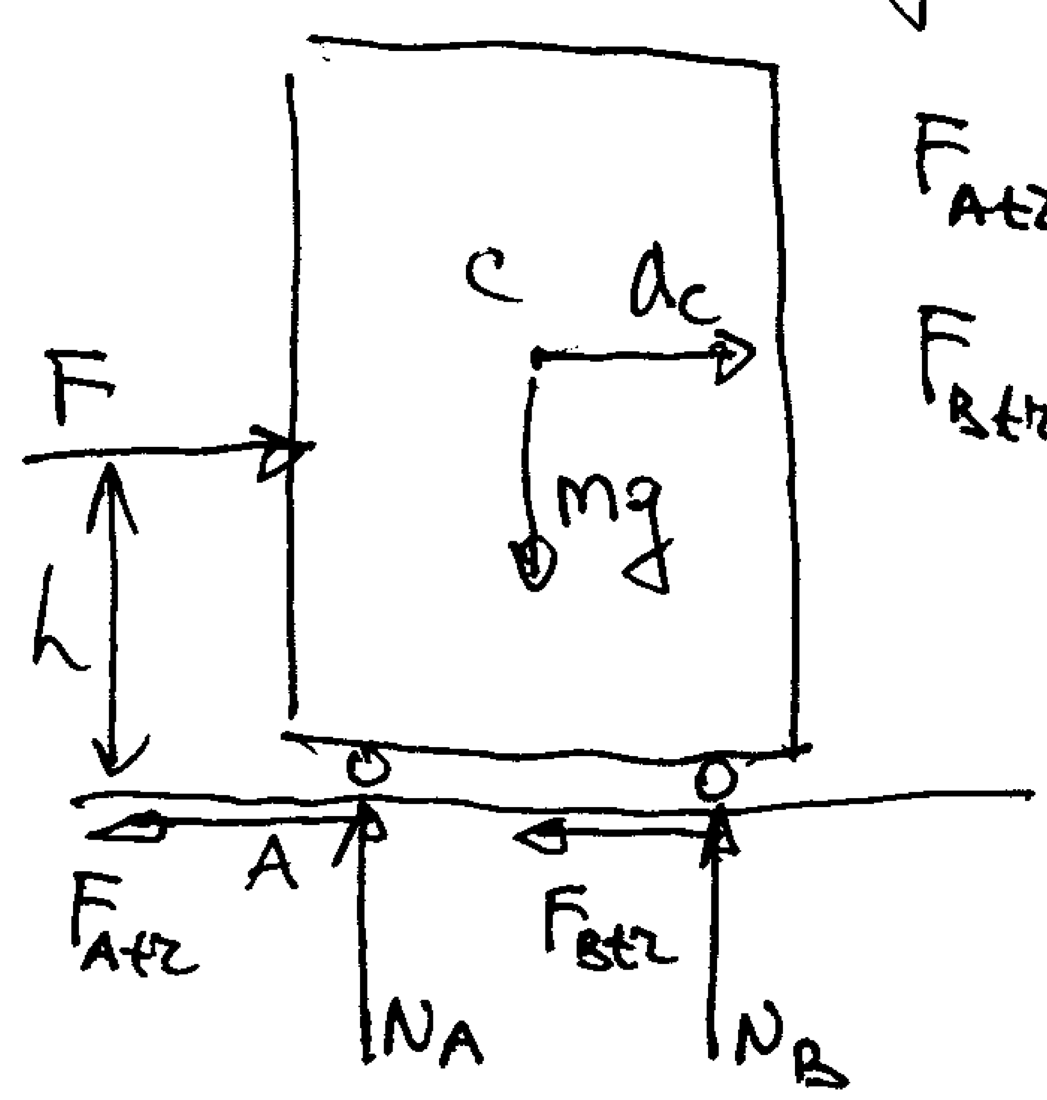
$$(2),(3) \Rightarrow \quad N_A = \frac{mg}{2} + \frac{b-h}{d}F, \quad N_B = \frac{mg}{2} - \frac{b-h}{d}F$$

Uslovi neprevrtanja: $N_A > 0, \; N_B > 0$

$$\Rightarrow \quad b - \frac{d}{2}\frac{mg}{F} < h < b + \frac{d}{2}\frac{mg}{F}$$

$$\boxed{0{,}31\,m < h < 1{,}49\,m}$$

2. Riješiti prethodni zadatak pretpostavljajući da su točkići blokirani i da se klizaju po podu pri čemu je $\mu = 0{,}25$

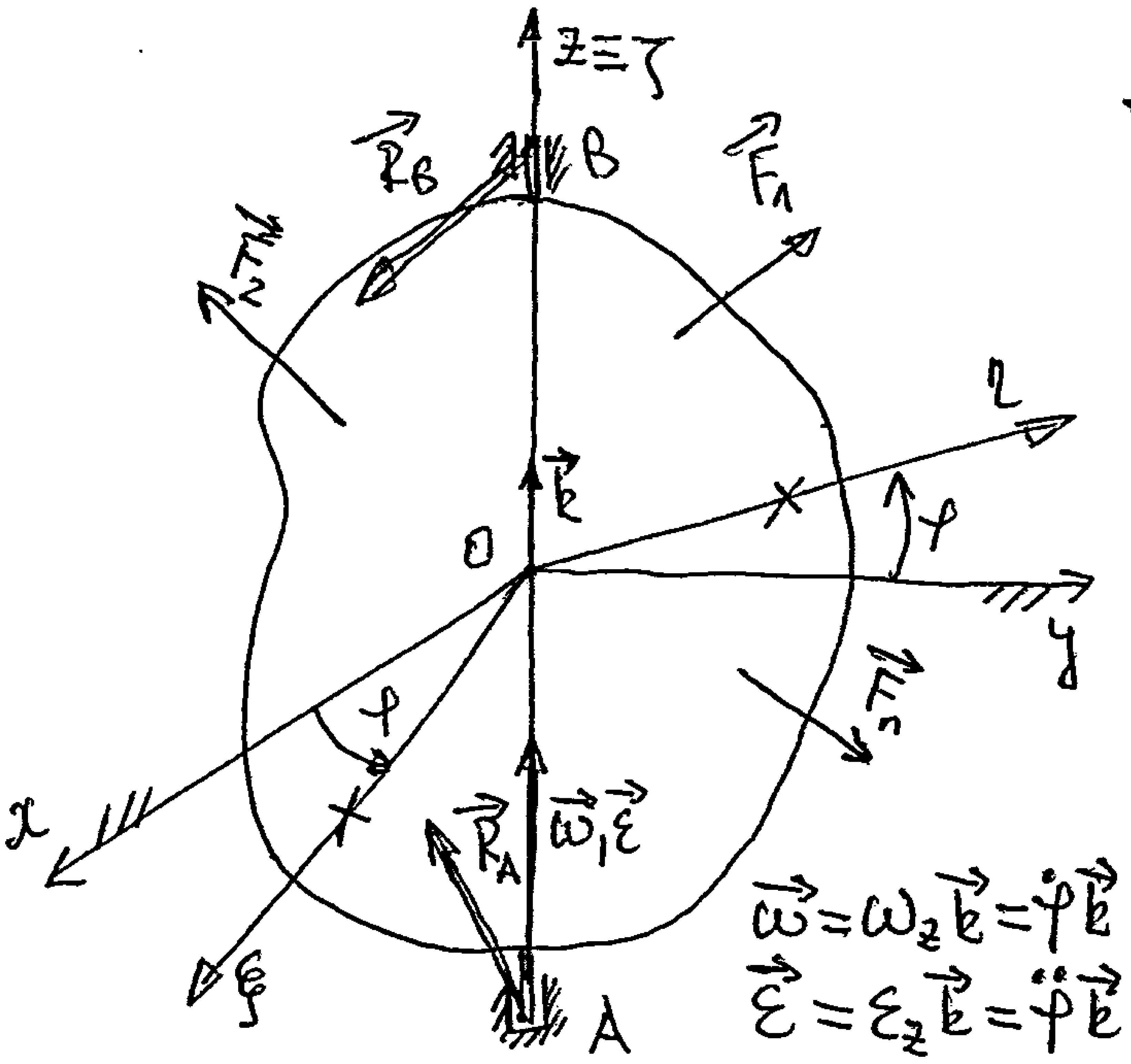


$F_{Atr} = \mu N_A$

$F_{Btr} = \mu N_B$

R: $\quad h < 1{,}05\,m$

7.2 Diferencijalna jednačina obrtanja krutog tijela oko nepokretne ose



Neka se tijelo pod dejstvom datog sistema sila $\vec{F}_1, \dots, \vec{F}_n$ obrće oko nepokretne ose z, pri čemu je nepokretnost ose obrtanja obezbijeđena sa dva ležišta. Položaj tijela je određen uglom φ između koordinatnih ravni xOz i ξOz (v. sl., $Oxyz$ - nepokretni koordinatni sistem; $O\xi\eta\zeta$ - pokretni koordinatni sistem čije su ose čvrsto vezane za tijelo).

Pošto je tijelo neslobodno, saglasno principu oslobađanja od veza, uticaje ležišta A i B zamijenjujemo reakcijama $\vec{R}_A$ i $\vec{R}_B$, koje zajedno sa datim silama $\vec{F}_i$ čine sistem spoljašnjih sila za posmatrano tijelo.

Ako primijenimo zakon o promjeni momenta količine kretanja za osu z, uzimajući u obzir da je $M_z^{\vec{R}_A} = 0$ i $M_z^{\vec{R}_B} = 0$, dobijamo

$$\frac{dL_z}{dt} = M_z^s = \sum M_z^{\vec{F}_i},$$

odnosno

$$J_z \ddot{\varphi} = \sum M_z^{\vec{F}_i}, \qquad (1)$$

jer je $L_z = J_z \omega_z = J_z \dot{\varphi}$ i J_z konstantna veličina.

Ovo je diferencijalna jednačina obrtanja krutog tijela oko nepokretne ose i glasi:

Proizvod momenta inercije tijela za nepokretnu osu i ugaonog ubrzanja jednak je zbiru momenata svih spoljašnjih sila za tu osu.

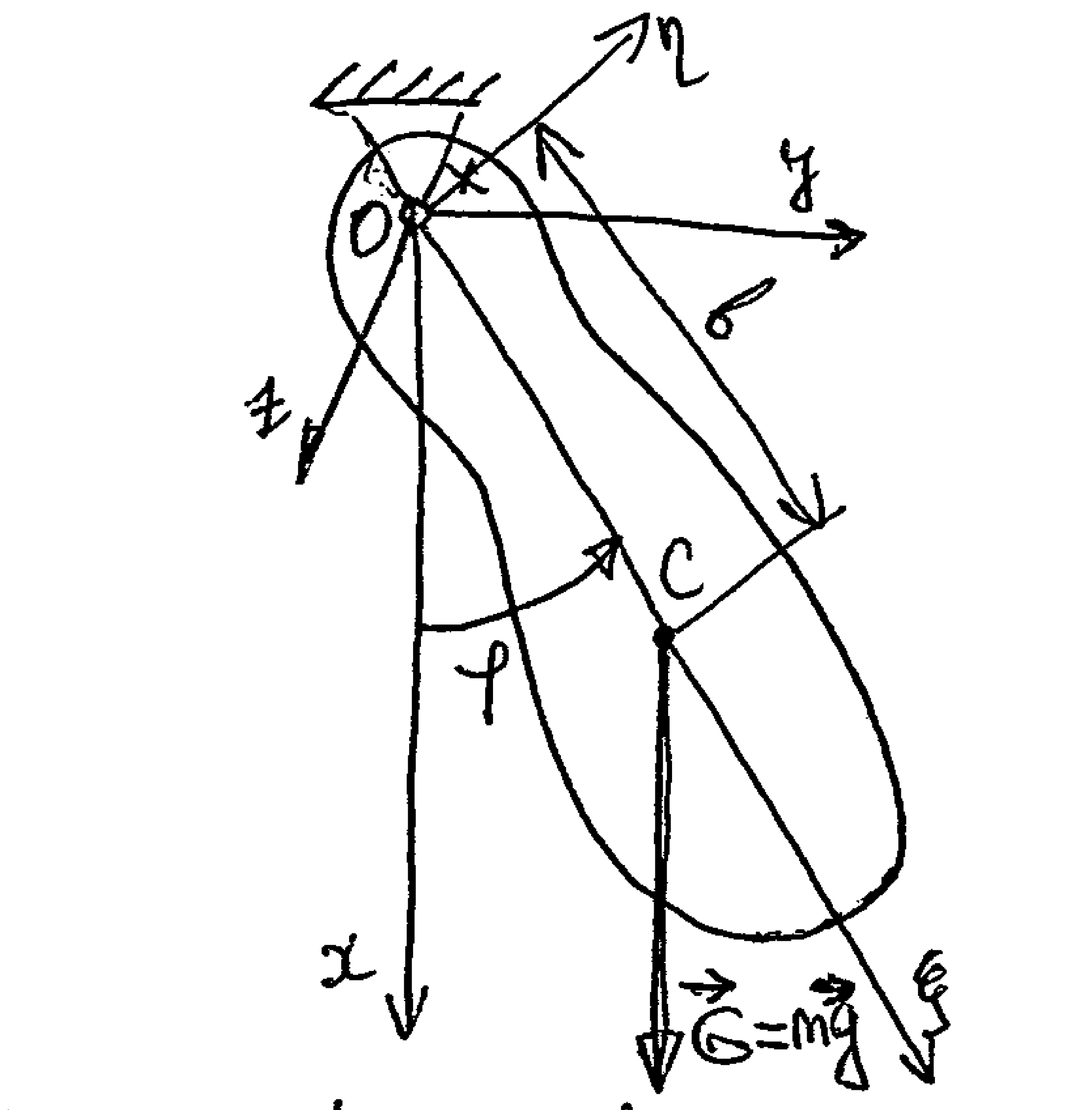
N: Obično se veličina M_z^s zove obrtni moment.

Jednačina (1) omogućuje da:

1) znajući zakon obrtanja tijela $\varphi = \varphi(t)$ i moment inercije J_z, odredimo obrtni moment M_z^s;

2) znajući obrtni moment, moment inercije i početne uslove $(\varphi(t_0) = \varphi_0, \dot{\varphi}(t_0) = \dot{\varphi}_0)$, odredimo zakon obrtanja tijela $\varphi = \varphi(t)$.

7.2.1 Fizičko klatno



Fizičko klatno je kruto tijelo koje se obrće oko nepokretne horizontalne ose samo pod dejstvom sopstvene težine.

Diferencijalna jednačina kretanja (obrtanja) je

$$J_z\ddot{\varphi} = M_z^{\vec{G}}, \quad M_z^{\vec{G}} = -mgb\sin\varphi,$$

odnosno

$$\ddot{\varphi} + \omega_F^2\sin\varphi = 0, \qquad (1)$$

gdje je $\omega_F^2 = \dfrac{mgb}{J_z}$

Ako se zadržimo samo na malim kretanjima klatna oko ravnotežnog položaja $\varphi=0$, možemo uzeti da je $\sin\varphi \approx \varphi$ i jednačinu (1) zamijeniti prostijom linearnom diferencijalnom jednačinom

$$\ddot{\varphi} + \omega_F^2\varphi = 0, \qquad (2)$$

koja opisuje harmonijsko oscilatorno kretanje sa kružnom frekvencijom ω_F i periodom

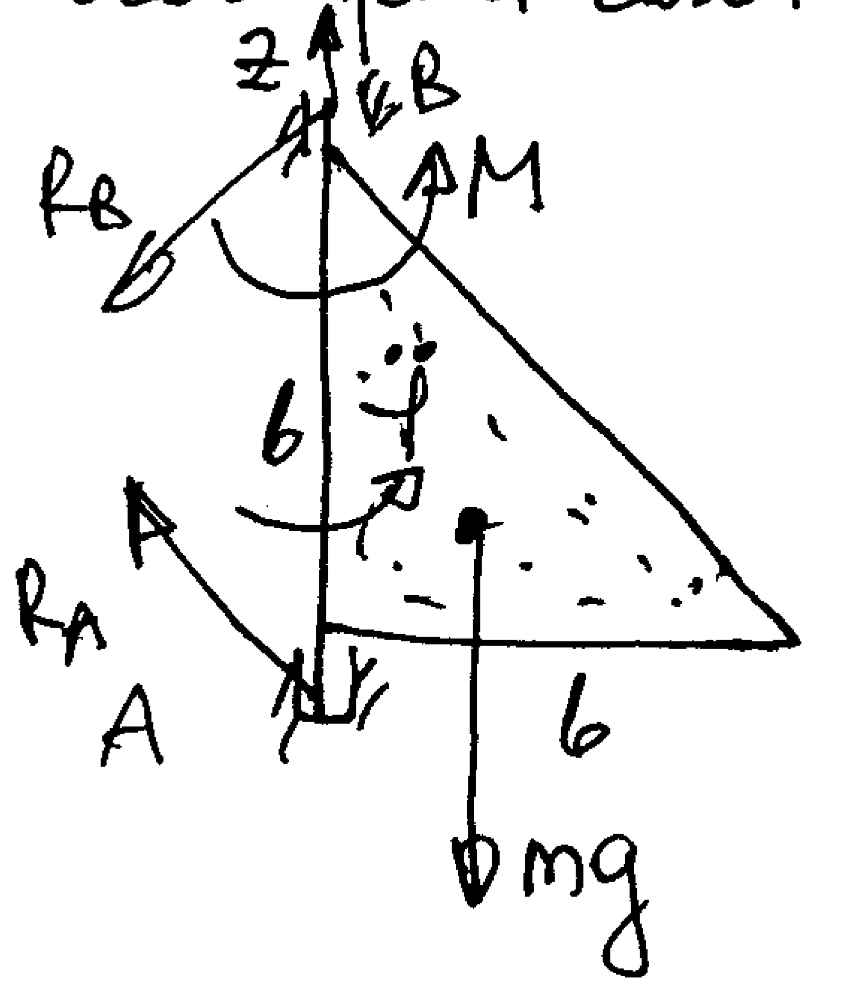
$$T_F = \frac{2\pi}{\omega_F} = 2\pi\sqrt{\frac{J_z}{mgb}} \qquad (3)$$

Na formuli (3) počiva jedan od eksperimentalnih metoda za određivanje momenta inercije tijela. Opitno tijelo postavi se tako da može da osciluje kao fizičko klatno oko ose za koju treba odrediti moment inercije. Mjereći period oscilovanja, pod uslovom da nam je poznato rastojanje b težišta od obrtne ose (ono može biti određeno, takođe, mjerenjem, npr. metodom vaganja), iz obrasca (3) dobijamo

$$J_z = \frac{mgbT_F^2}{4\pi^2}$$

· Obrtanje k.t. oko nepokretne ose (zadaci)

1. Homogena tanka ploča oblika jednakokrakog pravouglog trougla, mase m i katete dužine b, obrće se iz stanja mirovanja pod dejstvom sprega konstantnog momenta M oko vertikalne ose za koju je vezana svojom katetom. Zanemarujući otpor kretanju, odrediti zakon kretanja ploče. Uzeti da je moment inercije ploče za osu koja prolazi kroz njenu katetu $mb^2/6$.



Dif. jed. obrtanja krutog tijela oko nepokretne ose z:

$$J_z \ddot{\varphi} = \sum M_z^{\vec{F}_i^s} \Rightarrow J_z \ddot{\varphi} = M$$

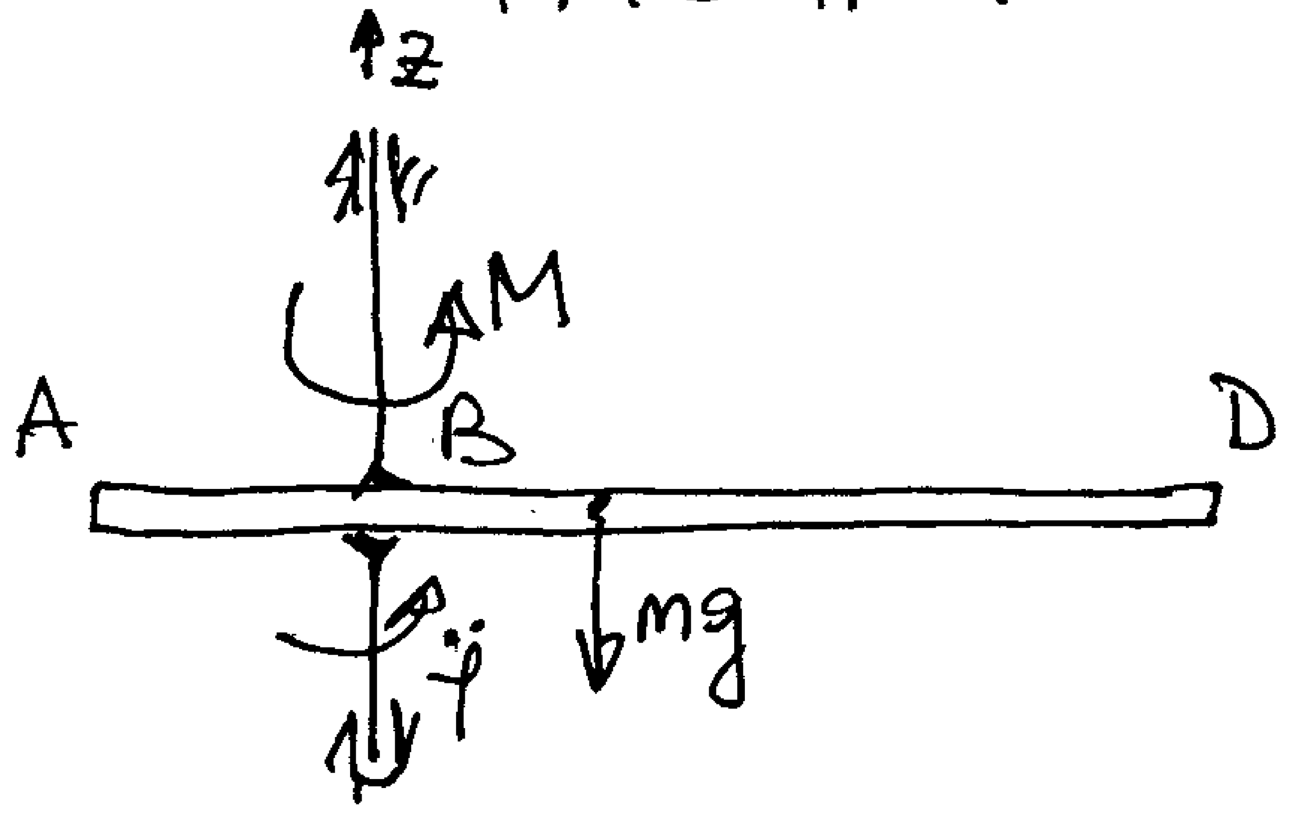
$$J_z = \frac{mb^2}{6}$$

$$\ddot{\varphi} = \frac{6M}{mb^2} = \varepsilon = const$$ – jednakopromjenljivo obrtanje

$$\varphi = \varphi_0 + \dot{\varphi}_0 t + \varepsilon \frac{t^2}{2}, \quad \varphi_0 = 0, \ \dot{\varphi}_0 = 0$$

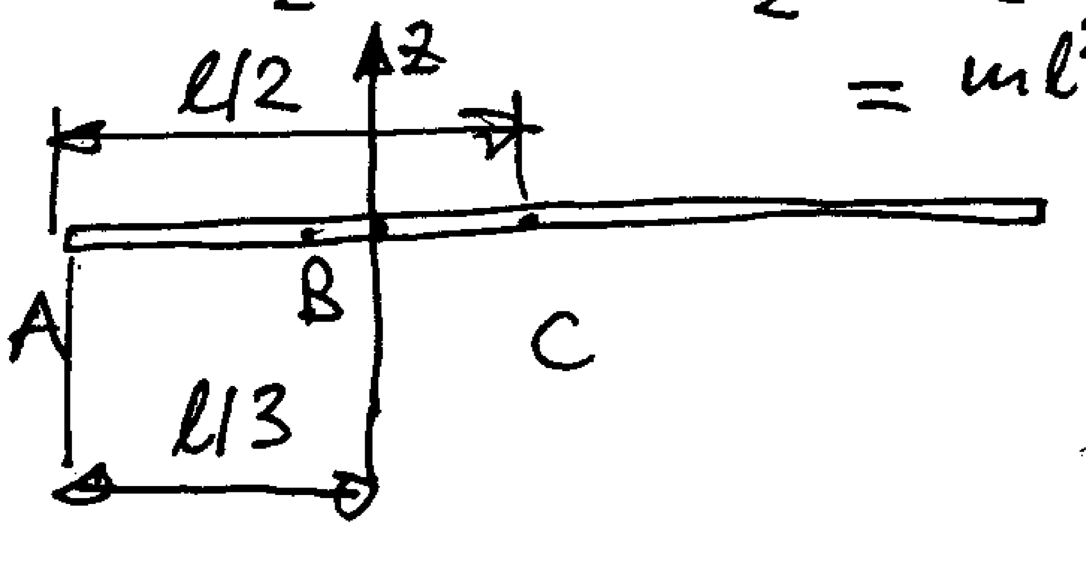
$$\Rightarrow \boxed{\varphi = \frac{3M}{mb^2} t^2}$$ – zakon (konačne jednačine) obrtanja

2. Homogeni štap AD, mase $m = 1kg$ i dužine $l = 2m$ kruto je vezan pod pravim uglom za vertikalnu osovinu tako da je: $\overline{AB} = l/3$. Zanemarujući trenje, odrediti ugaono ubrzanje štapa pod dejstvom sprega momenta $M = 4Nm$.



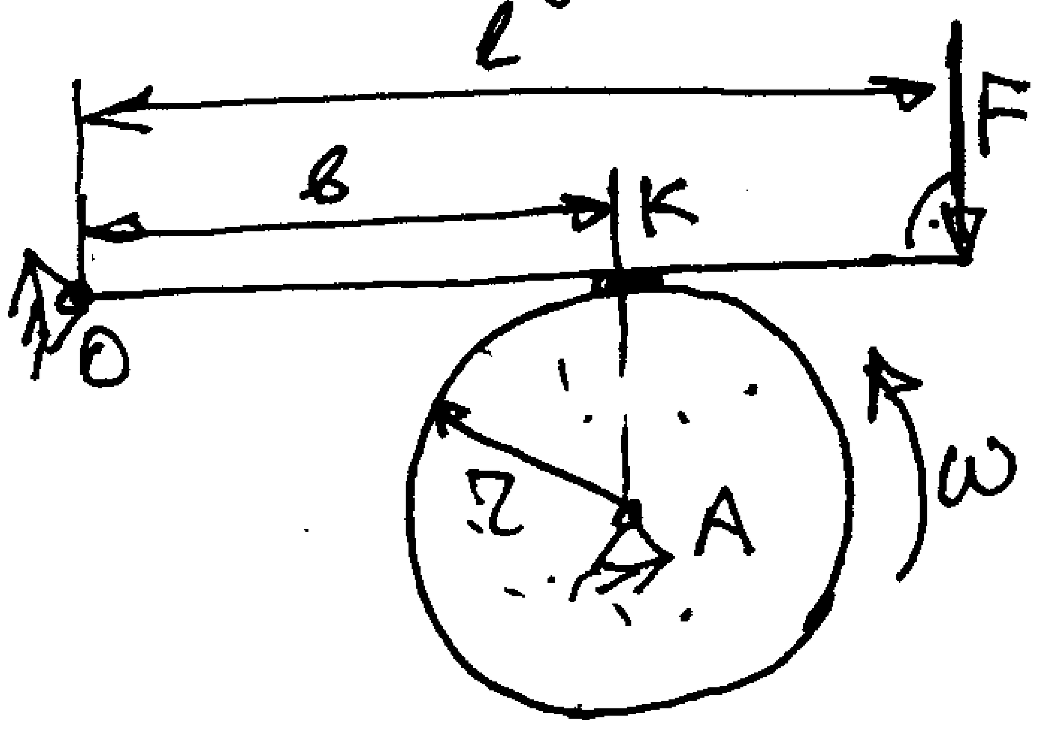
$$J_z \ddot{\varphi} = M$$

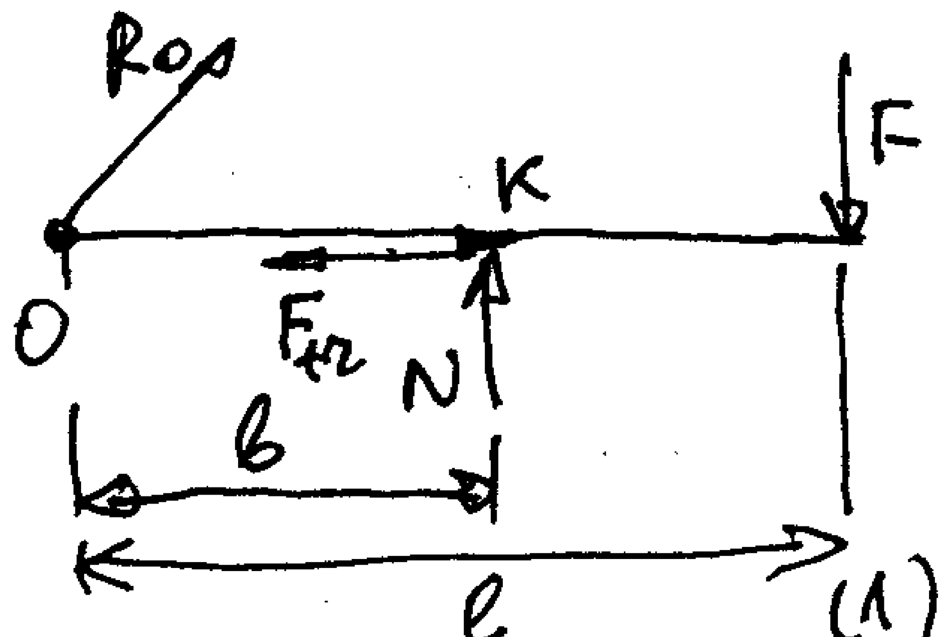
$$J_z = ? \quad J_z = J_{Cz} + m\overline{BC}^2 = ml^2/12 + m\left(\frac{l}{2} - \frac{l}{3}\right)^2 = \frac{ml^2}{9}$$

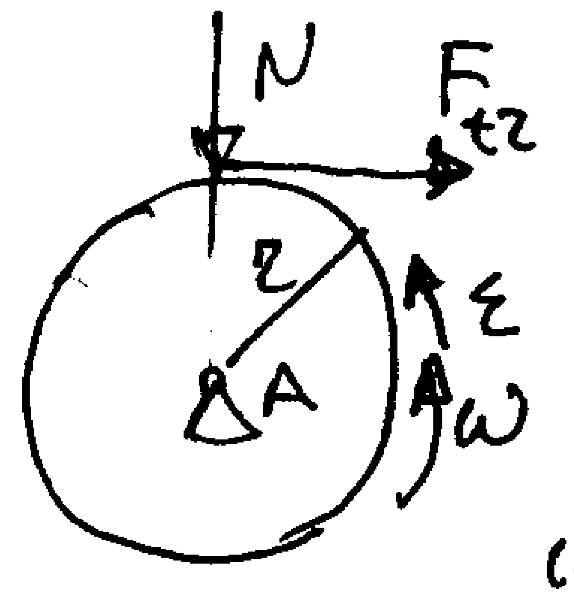


$$\Rightarrow \varepsilon = \ddot{\varphi} = \frac{9M}{ml^2} = \boxed{9 \frac{rad}{s^2}}$$

3. Točak A koji se obrće konstantnom ugaonom brzinom ω_0 počinje da se koči pomoću ručne kočnice. Kolikom silom F treba djelovati na ručicu da bi se točak zaustavio za vrijeme T, ako je koeficijent trenja između točka i papučice μ, dužina ručice l, $\overline{OK}=b$, moment inercije točka za obrtnu osu J a poluprečnik r. Masu ručice i dimenzije papučice zanemariti.







$\Sigma M_O = 0:\ Nb - Fl = 0$ (1)

$J\varepsilon = -F_{tr} r$ (2), $F_{tr} = \mu N$ (3)

$(1) \Rightarrow N = F\dfrac{l}{b}$, $(2) \Rightarrow \varepsilon = -\mu\dfrac{Flr}{bJ} = \text{const}$

$\varepsilon = \dfrac{d\omega}{dt} \rightarrow \omega(t) = \omega_0 + \varepsilon t$,

uslov zadatka: $\omega(t=T) = 0 \Rightarrow 0 = \omega_0 - \dfrac{\mu F l r}{bJ} T = 0$

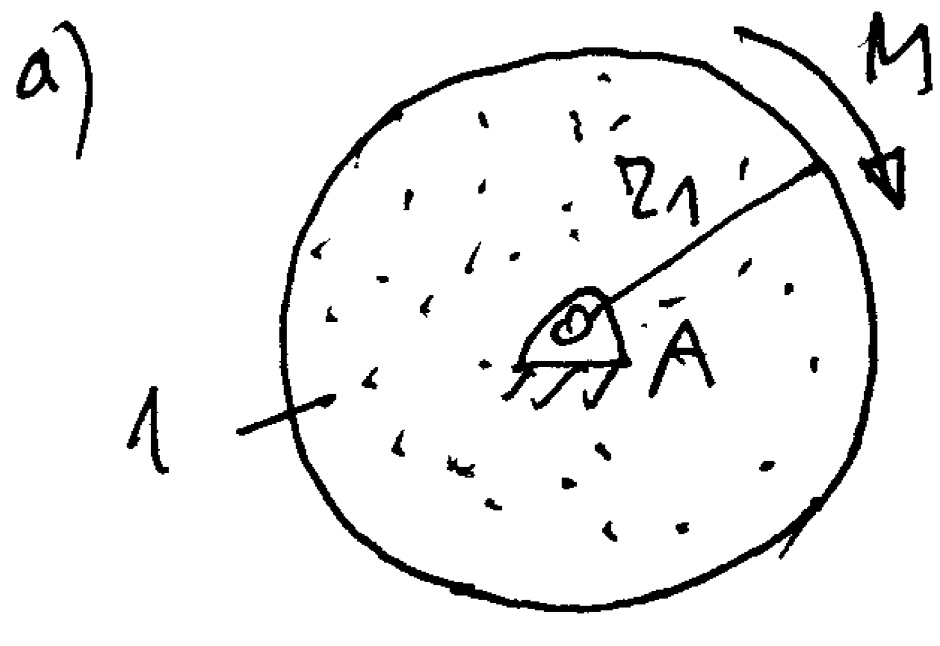
$$\boxed{F = \frac{bJ\omega_0}{\mu T l r}}$$

4. Zupčanik 1, mase $m_1 = 10$ kg i poluprečnika $r_1 = 20$ cm, obrće se oko nepokretne horizontalne ose A pod dejstvom obrtnog momenta $M = 1$ Nm.

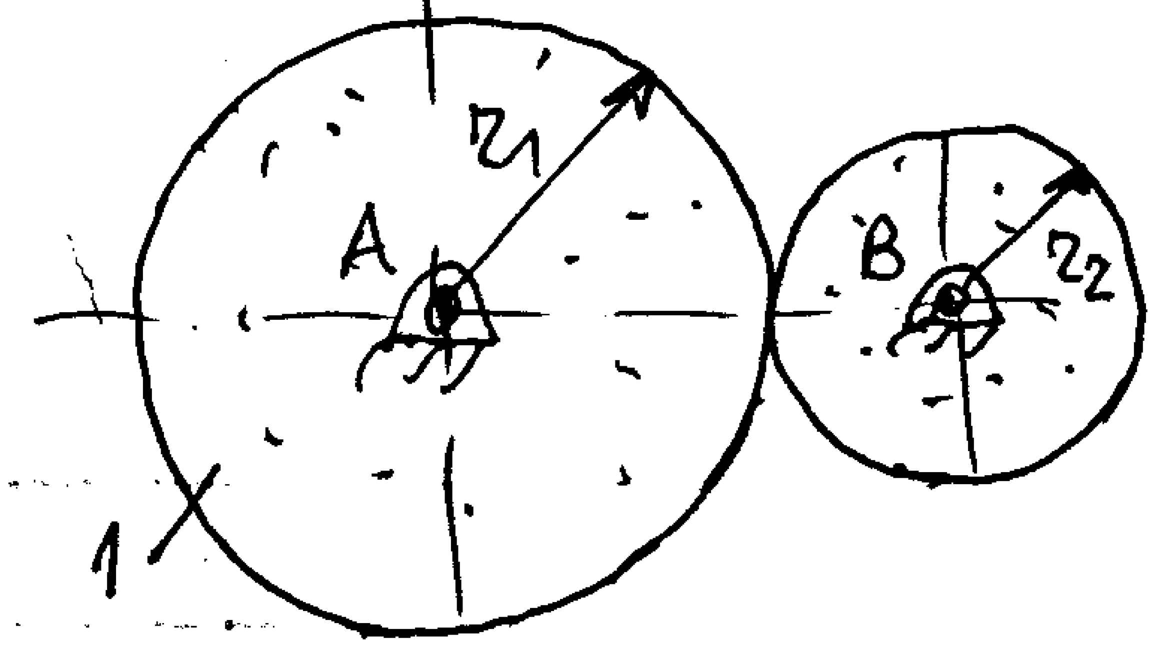
a) Odrediti ugaono ubrzanje, ugaonu brzinu i broj obrtaja zupčanika 1 nakon 3 sekunde od početka kretanja.

b) Koliko je ugaono ubrzanje zupčanika 1 i tangencijalna komponenta sile u tački dodira, nakon što se zupčanik 2, mase $m_2 = 5$ kg i poluprečnika $r_2 = 10$ cm, spregne sa zupčanikom 1. Obrtanju zupčanika 2 se suprostavlja konstantni otporni moment $M_{ot} = 0{,}2$ Nm. Zupčanike smatrati homogenim kružnim diskom.

a)

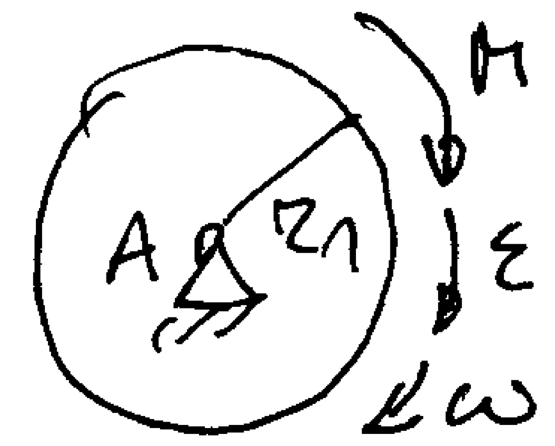


b)



---

a)



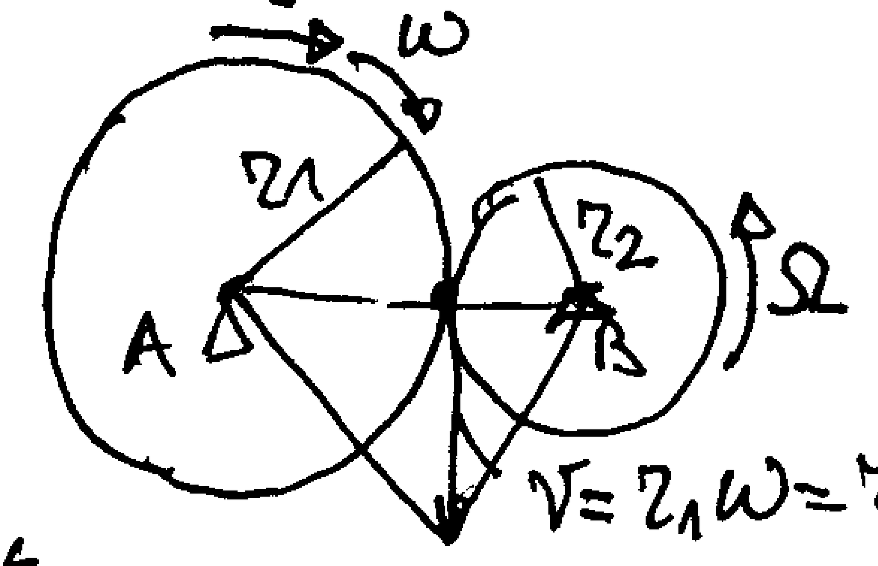
$J_A \varepsilon = M \Rightarrow \varepsilon = \frac{2M}{m_1 r_1^2} = \frac{2\cdot 1}{10\cdot 0{,}2^2} = \boxed{5\ s^{-2}}$

$J_A = \frac{m_1 r_1^2}{2}$

$\varepsilon = const \Rightarrow \omega = \overset{0}{\omega_0} + \varepsilon t, \quad \varphi = \overset{0}{\varphi_0} + \overset{0}{\omega_0} t + \varepsilon \frac{t^2}{2}$

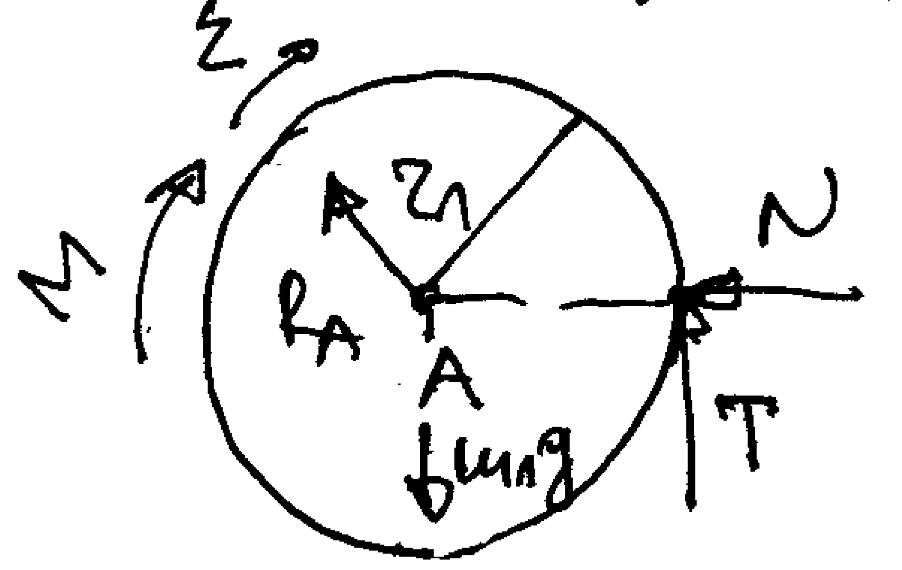
za $t = t_1 = 3$ s, $\boxed{\omega_1 = 15\ s^{-1}}$, $\varphi_1 = 5\cdot\frac{3^2}{2} = 22{,}5$ rad, $n_1 = \frac{\varphi_1}{2\pi} = \boxed{3{,}58 \text{ obrta}}$

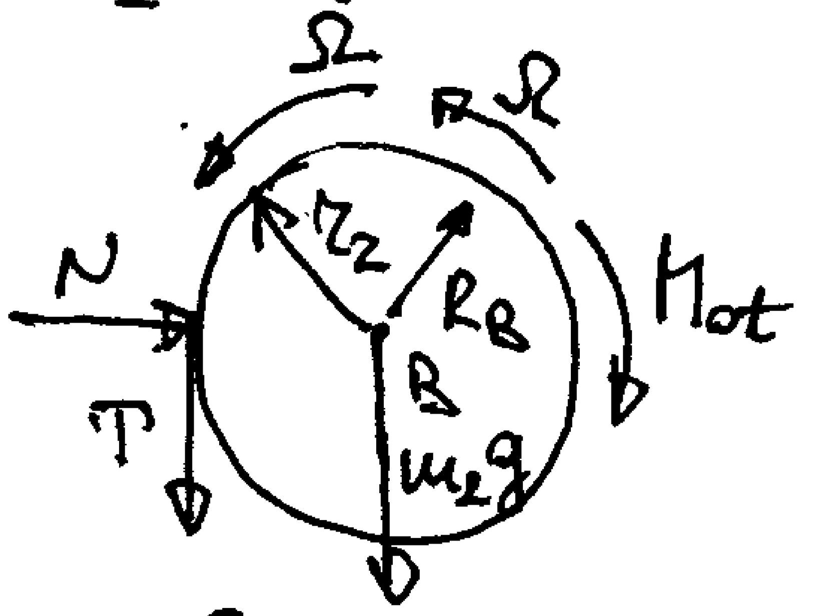
b)



Kinematičke veze: $r_2 \Omega = r_1 \omega \to \Omega = \frac{r_1}{r_2}\omega \to \dot{\Omega} = \frac{r_1}{r_2}\dot{\omega}$

$\dot{\Omega} = \frac{r_1}{r_2}\varepsilon \quad (*)$





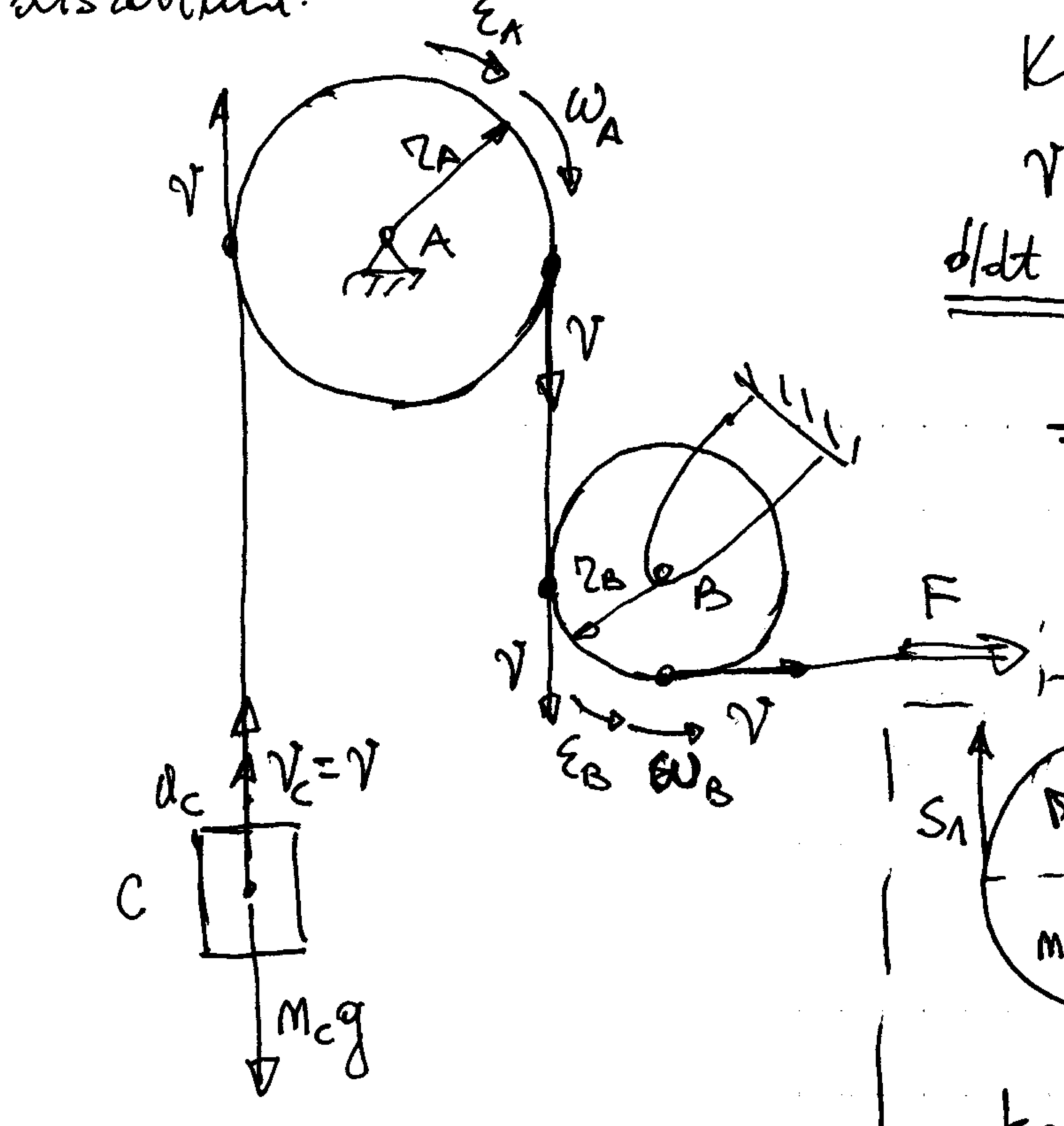
$J_A \varepsilon = M - T r_1, \quad J_B \dot{\Omega} = T r_2 - M_{ot}, \quad J_B = \frac{m_2 r_2^2}{2}$

$\Downarrow$

$\frac{m_1 r_1^2}{2}\varepsilon = M - T r_1; \quad \frac{m_2 r_2^2}{2}\cdot\frac{r_1}{r_2}\varepsilon = T r_2 - M_{ot} \Rightarrow \varepsilon = \frac{2}{(m_1+m_2) r_1}\left(\frac{M}{r_1} - \frac{M_{ot}}{r_2}\right)$

$\varepsilon = 2\ s^{-2}$

5. Teret C, mase $m_C = 20\,\mathrm{kg}$, podiže se pomoću nerastegljivog užeta prebačenog preko koturova A i B, masa $m_A = 10\,\mathrm{kg}$ i $m_B = 5\,\mathrm{kg}$ i poluprečnika $r_A = 30\,\mathrm{cm}$ i $r_B = 20\,\mathrm{cm}$, a čiji se slobodni kraj vuče u horizontalnom pravcu silom $F = 310\,\mathrm{N}$. Zanemarajući masu užeta i smatrajući da nema proklizavanja između užeta i koturova, odrediti: a) ugaono ubrzanje kotura B; b) ubrzanje tereta C; c) silu u užetu u dijelu između tereta i kotura A. Koturove smatrati homogenim kružnim diskovima.



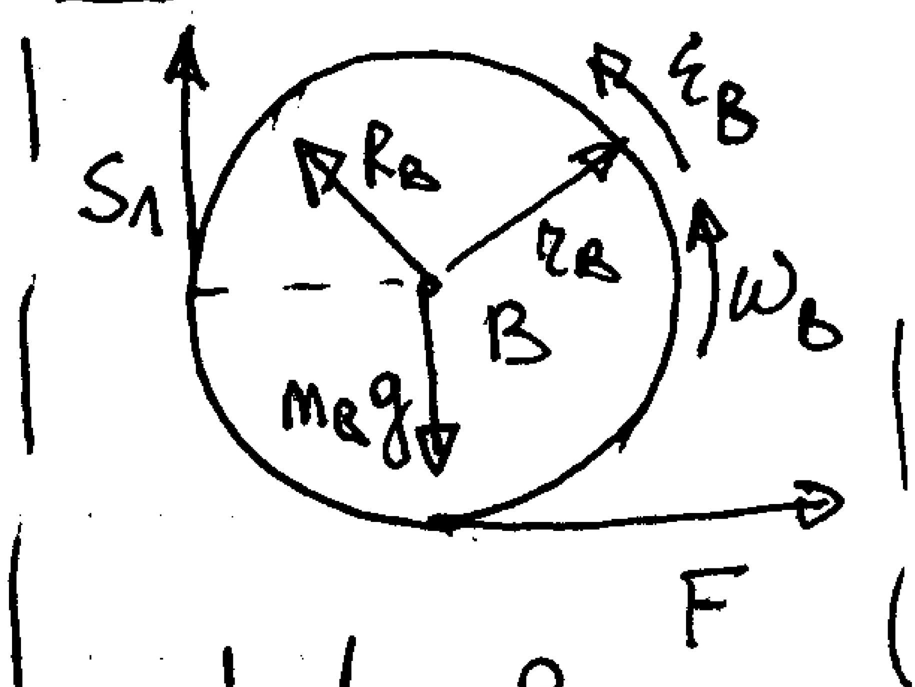
Kinematičke veze u datom sistemu:

$$v = r_B\omega_B = r_A\omega_A = v_C$$

$$\xrightarrow{d/dt} r_B\varepsilon_B = r_A\varepsilon_A = a_C$$

$$\Rightarrow \varepsilon_A = \frac{r_B}{r_A}\varepsilon_B,\quad a_C = r_B\varepsilon_B \quad (1)$$

Izdvojimo tijela iz sistema

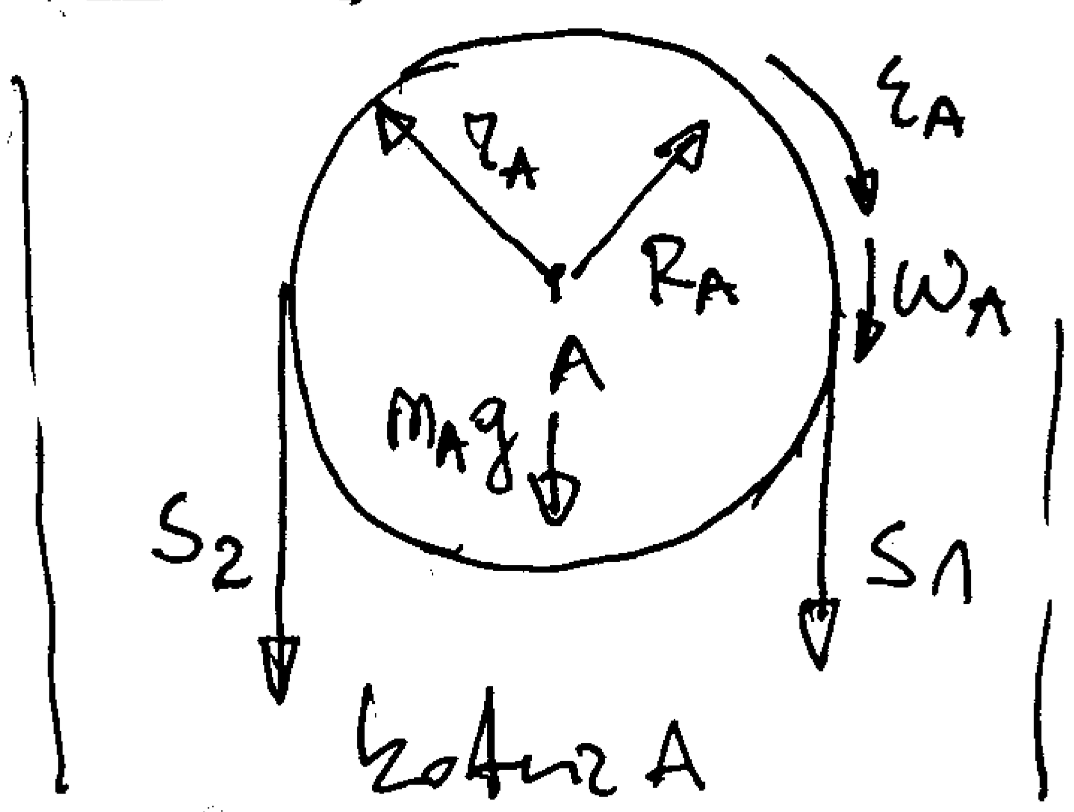


kotur B

$$J_B\varepsilon_B = F r_B - S_1 r_B \quad (2)$$

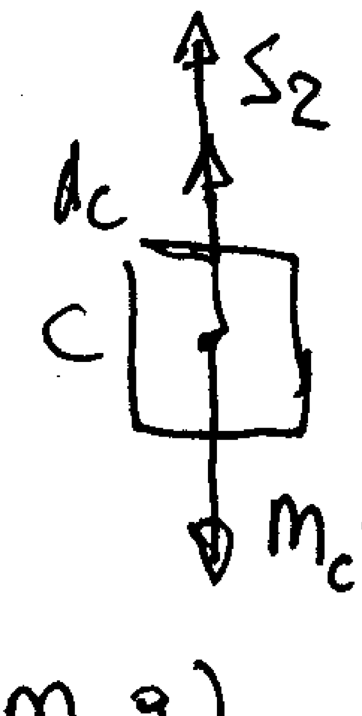
$$J_A = \frac{m_A r_A^2}{2}$$

$$J_B = \frac{m_B r_B^2}{2}$$



kotur A

$$J_A\varepsilon_A = S_1 r_A - S_2 r_A \quad (3)$$

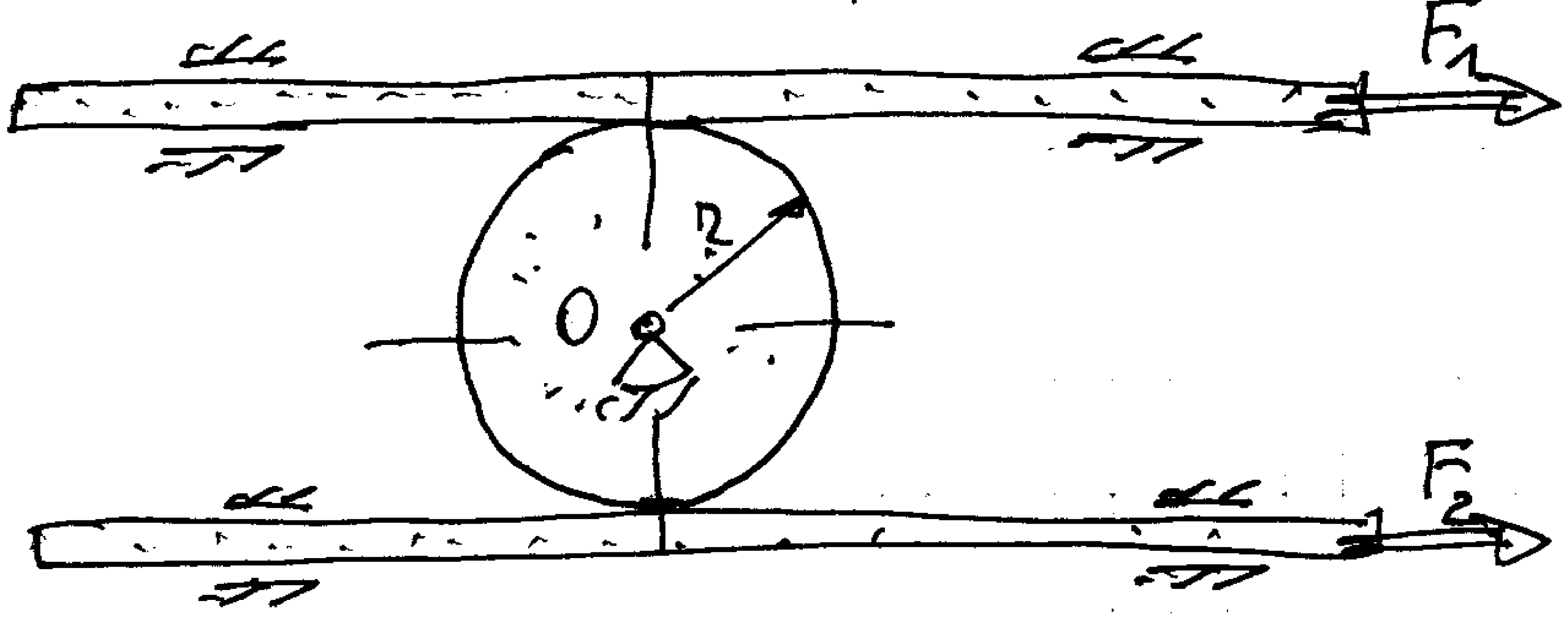


$$m_C a_C = S_2 - m_C g \quad (4)$$

$$(2),(3),(4) \xRightarrow{(1)} \varepsilon_B = \frac{2(F - m_C g)}{(m_A + m_B + 2m_C)r_B} = \boxed{20\,\frac{\mathrm{rad}}{s^2}}, \quad \boxed{a_C = r_B\varepsilon_B = 4\,\frac{m}{s^2}}$$

$$(4) \Rightarrow \boxed{S_2 = 280\,\mathrm{N}}$$

6. Sistem prikazan na slici sastoji se od dvije translatorno pokretne u horizontalnom pravcu letve, masa m_1 i m_2, spregnute sa zupčanikom 3 koji može da se obrće oko nepokretne horizontalne ose O. Ako na letve djeluju ~~sile~~ horizontalne sile F_1 i F_2 usmjerene kao na slici, odrediti ugaono ubrzanje zupčanika. Zupčanik smatrati homogenim kružnim diskom mase m_3 i poluprečnika r. Dato je: $F_1 = 100N$, $F_2 = 200N$, $m_1 = 5kg$, $m_2 = 10kg$, $m_3 = 20kg$, $r = 0,2m$.



R: $\varepsilon = 20 s^{-2}$