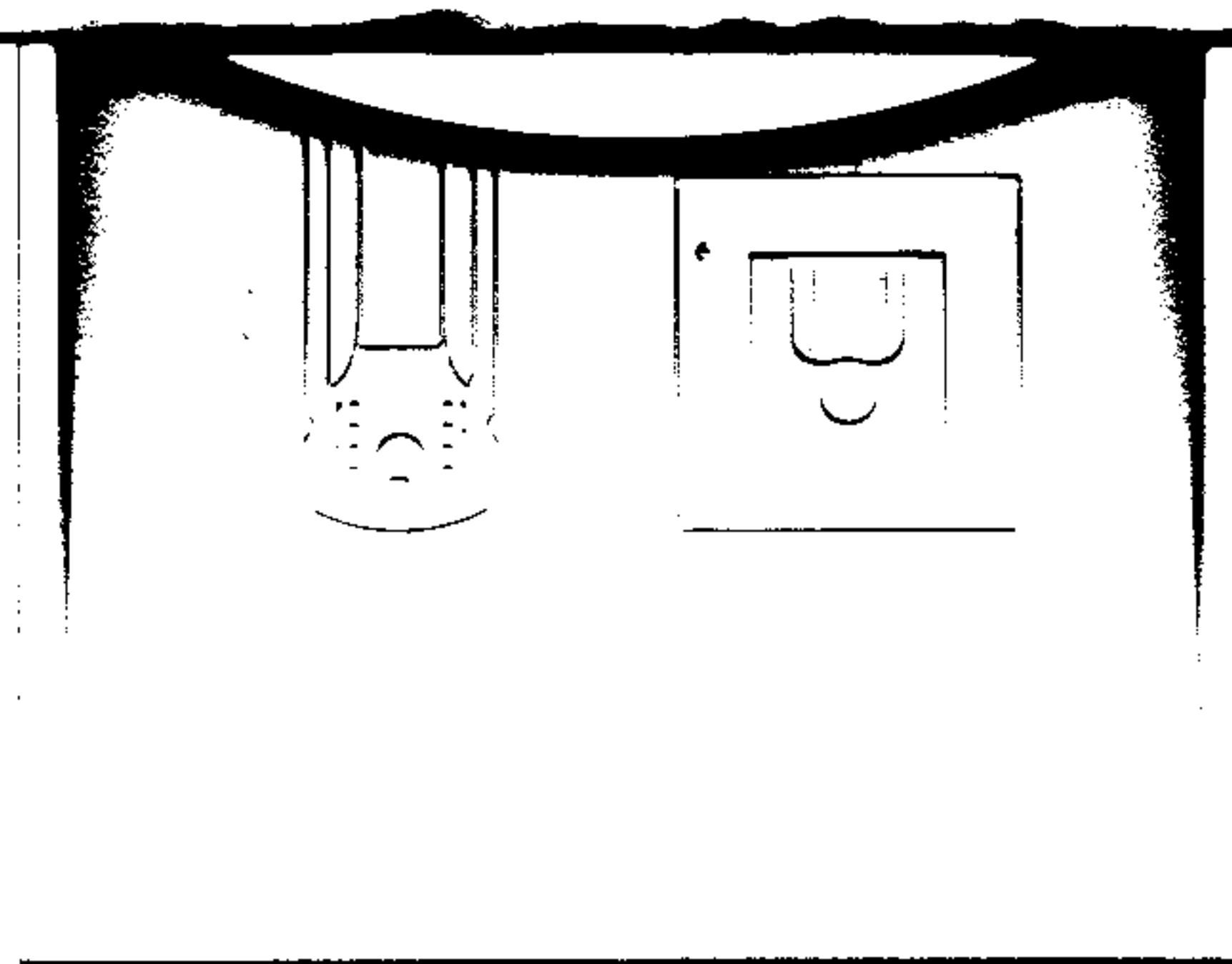
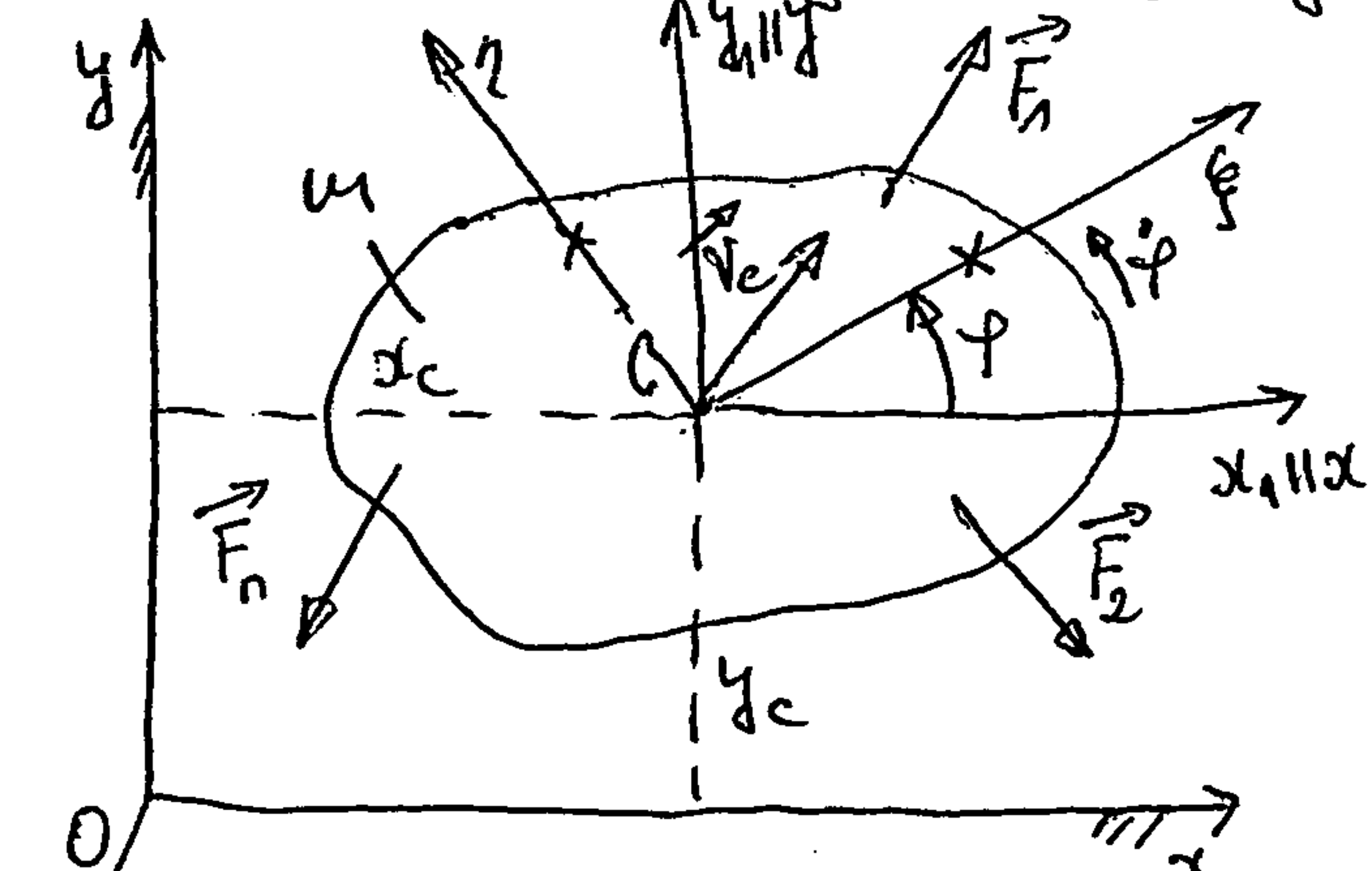


VII sedmica nastave
- predavanja sa primerima -



7.3 Ravno kretanje krutog tijela



Pretpostavke:

- tijelo ima ravan materijalne simetrije (Ozj ravna)
 - sve sile koje djeluju na tijelo leže u ovoj ravni
 - početne brzine svih točaka tijela simetrično su raspoređene u odnosu na ravan OZj.
- Pod ovim uslovima slobodno kruto tijelo će izvoditi ravno kretanje. Takođe, posredstvom veza tijelo može biti prinudeno da izvrši ravno kretanje.

Položaj krutog tijela koje izvrši ravno kretanje određen je u svakom trenutku položajem pola i uglom obrotanja tijela oko pola. Dinamički zadatak ravnog kretanja najprije se rješava oko za pol izabere centar inercije C tijela; u tom slučaju položaj tijela

Cx_1y_1 - translatorno pokretni koordinatni sistem vezan za centar inercije tijela.
 $C\xi\eta$ - koordinatni sistem čvrsto vezan za tijelo (ravni hipen-prsjek tijela i ravni mat. sim.)

je određen koordinatama x_c, y_c i uglom obrotanja φ .

Sustavljanje diferencijalnih jednačina kretanja krutog tijela bazirano je na primjeni zakona o kretanju centra inercije i o promjeni kinetičkog momenta za centralni osi Cz upravnim na ravan kretanja.

$$m\vec{a}_c = \sum \vec{F}_i, \quad \vec{a}_c = \ddot{\vec{r}}_c = \ddot{x}_c \vec{i} + \ddot{y}_c \vec{j}$$

$$\frac{dL_{cz}}{dt} = \sum M_{cz}^{\vec{F}_i}, \quad L_{cz} = L_{crz} = J_c \dot{\varphi}, \quad J_c = J_{cz} \text{ - moment inercije oko } cz$$

Projicirajući prvu jednačinu na koordinatne osi, konačno dobijamo dif. jed. ravnog kretanja tijela

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{x}_c &= \sum F_{ix} \\ m\ddot{y}_c &= \sum F_{iy} \\ J_c \ddot{\varphi} &= \sum M_c^{\vec{F}_i} \end{aligned} \right\} (1)$$

Kada su poznate jednačine kretanja tijela $x_c = x_c(t), y_c = y_c(t), \varphi = \varphi(t)$, iz jednačina (1) određujemo glavni vektor $\vec{F}_R = \sum \vec{F}_i$ i glavni moment za osi Cz, $M_{cz} = \sum M_c^{\vec{F}_i}$ spopušnijih sila, koje djeluju na tijelo. S druge strane, ako su poznate spopušnije sile i početni uslovi: $x_c(t_0) = x_{c0}, y_c(t_0) = y_{c0}, \varphi(t_0) = \varphi_0, \dot{x}_c(t_0) = \dot{x}_{c0}, \dot{y}_c(t_0) = \dot{y}_{c0}, \dot{\varphi}(t_0) = \dot{\varphi}_0$, integriranjem jednačina (1) određujemo zakon ravnog kretanja $x_c = x_c(t), y_c = y_c(t), \varphi = \varphi(t)$.

Ako je tijelo neslobodno, postije primijene principa oslobađanja od veza, primijenjujemo jednačine (1), podrazumijevajući pod spopušnijim silama i aktivne sile i reakcije veza. Druga jednačina (1) kada je poznata putanja centra inercije C tijela, jednačine ravnog kretanja pišemo u obliku

$$m \frac{dv_c}{dt} = \sum F_{it}, \quad m \frac{v_c^2}{R_k} = \sum F_{in}, \quad J_c \dot{\varphi} = \sum M_c^{\vec{F}_i} \quad (2)$$

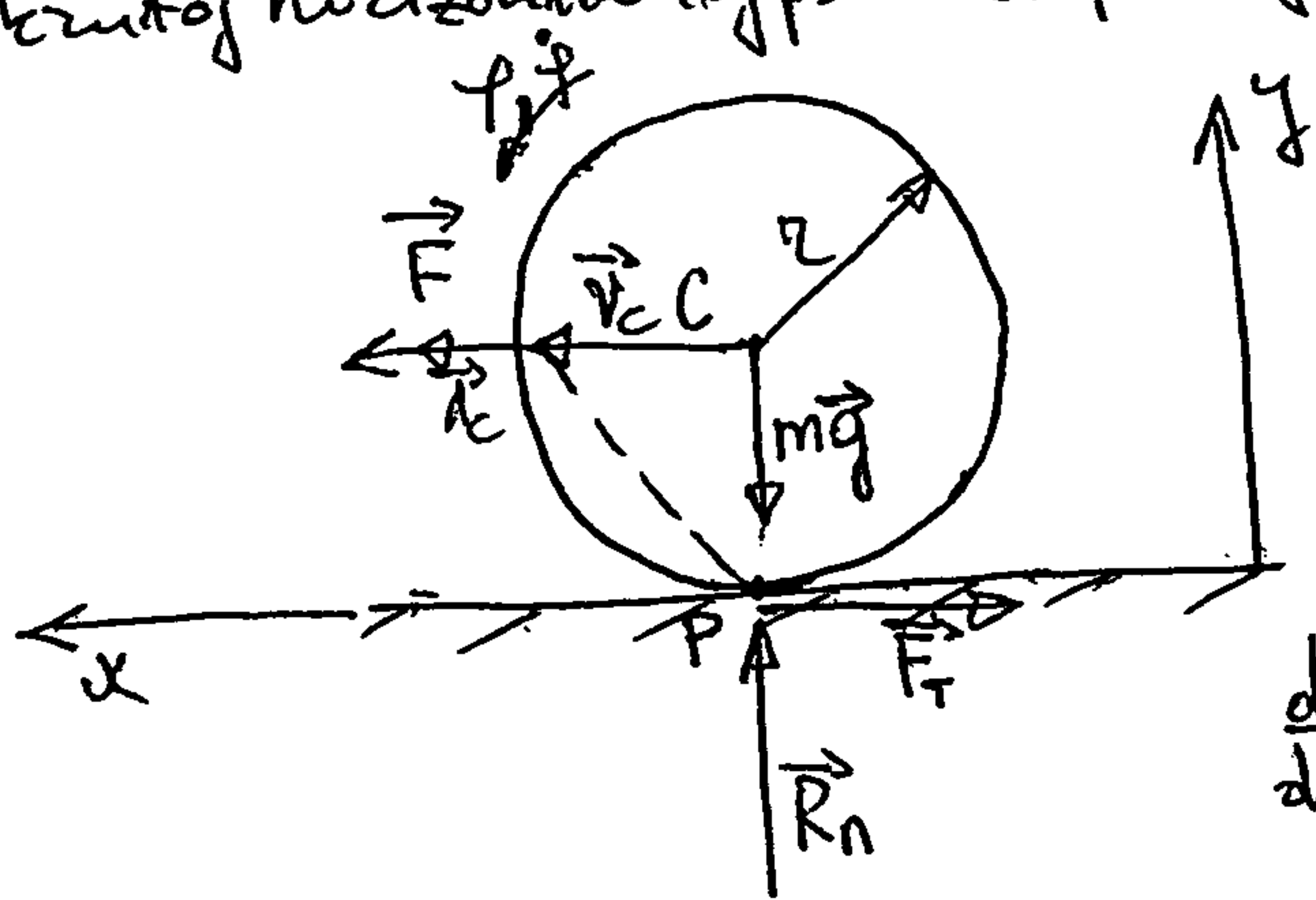
gdje su $\sum F_{it}$ i $\sum F_{in}$ zbirski projekcija spopušnijih sila na pravce tangente i normale putanje centra inercije, a R_k poluprečnik krivine iste putanje.

7.3.1 Kotrljanje tijela po podlozi

U probleme ravnog kretanja spadaju prostiji slucajevi kotrljanja tijela. Pri tome osnovni ulogu imaju sile trenja sa svim svojim specifičnim osobinama koje su proučene u statici.

a) Kotrljanje po idealno krutoj podlozi.

Neka se cilindar poluprečnika r i mase m kotrlja bez klizanja po idealno krutoj horizontalnoj podlozi pod dejstvom horizontalne sile F .



$$\vec{v}_c = \dot{\alpha} \vec{r}, \quad \vec{a}_c = \ddot{\alpha} \vec{r}$$

U slucaju kotrljanja bez klizanja tačka dodira P između cilindra i horizontalne ravni je trenutni pol brzine, pa je

$$\dot{\alpha} = \dot{\alpha}_c = r \dot{\varphi} \quad (1) - \text{kinematički uslov kotrljanja bez klizanja}$$

$$\frac{d}{dt}(1) \Rightarrow \ddot{\alpha} = r \ddot{\varphi} \quad (2)$$

Na cilindar djeluju sile koje su mg , sila F i reakcija podloge koja se razlaže na dvije komponente: normalnu R_n i silu trenja F_T u pravcu. Dif. jed. ravnog kretanja m :

$$\left. \begin{aligned} m \ddot{\alpha}_c &= F - F_T \\ 0 &= -mg + R_n \\ J_c \ddot{\varphi} &= F_T \cdot r \end{aligned} \right\} (3)$$

$$(3) \xrightarrow{(2)} \ddot{\alpha}_c = \frac{F}{m + J_c/r^2}, \quad F_T = \frac{J_c}{mr^2 + J_c} F, \quad R_n = mg$$

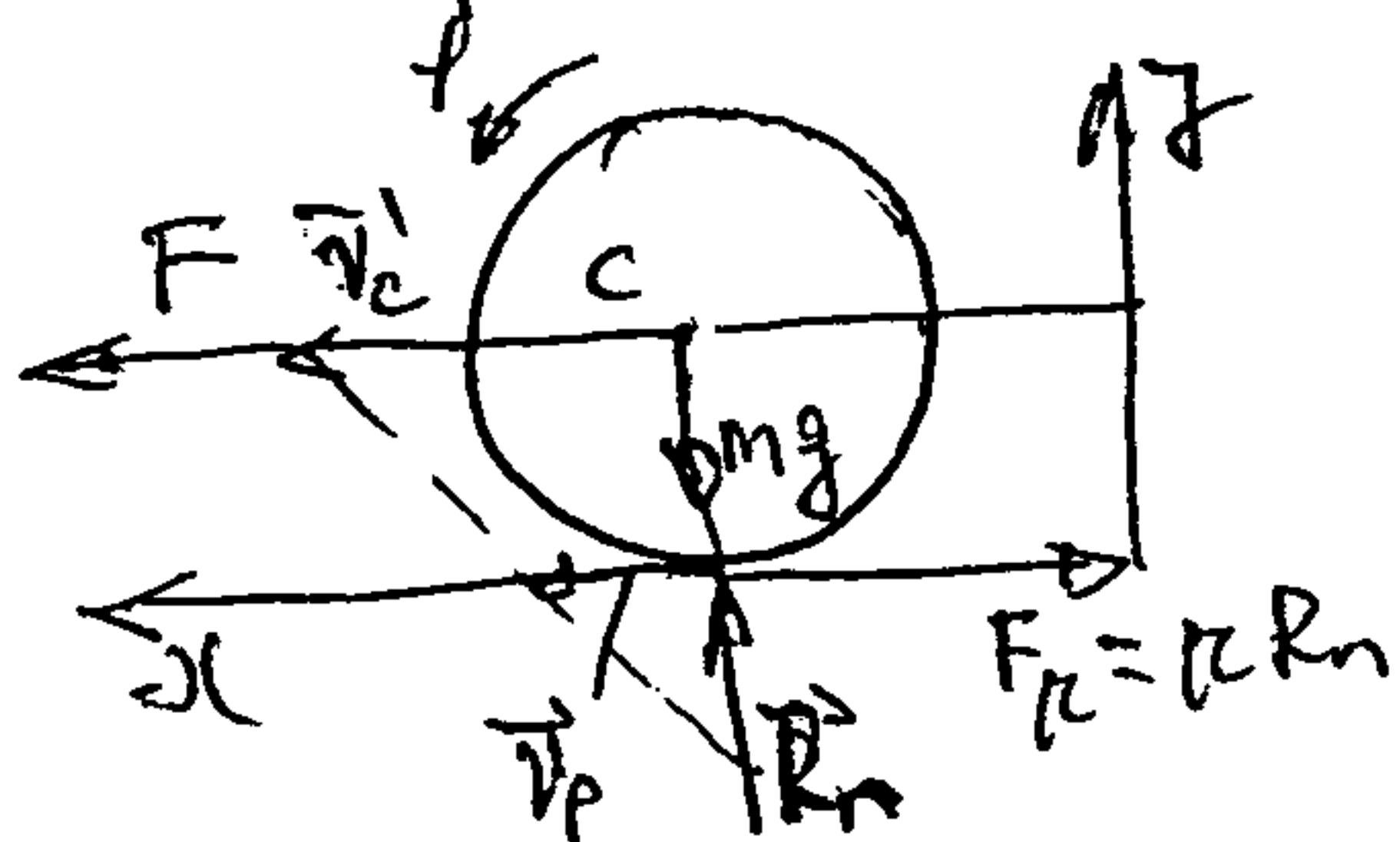
Posto m proučavamo trenutnu tačku P cilindra ne klizi po horizontalnoj ravni to je sila trenja F_T (sila trenja pri kotrljanju) identična sa silom trenja pri klizanju koja se definiše u statici. Ona mora biti manja od granicne sile trenja, koja je prema Kulonovu zakonu $F_{Tgr} = R_n \mu$ (μ - koeficijent trenja klizanja), tj.

$$F_T < \mu R_n \quad (4)$$

Uslov (4) predstavlja dinamički uslov kotrljanja bez klizanja. U našem slucaju on dovodi do uslova koji mora zadovoljavati pogonka sila F da bi se cilindar kotrljao bez klizanja, tj.

$$F < \mu \frac{mr^2 + J_c}{J_c} mg$$

Ako ovaj uslov nije zadovoljen nemoguće je ostvariti čisto kotrljanje i tada tačka P nije pol brzina, odnosno, nevaži veza (1). U slucaju kotrljanja sa klizanjem, dif. jed. kretanja m



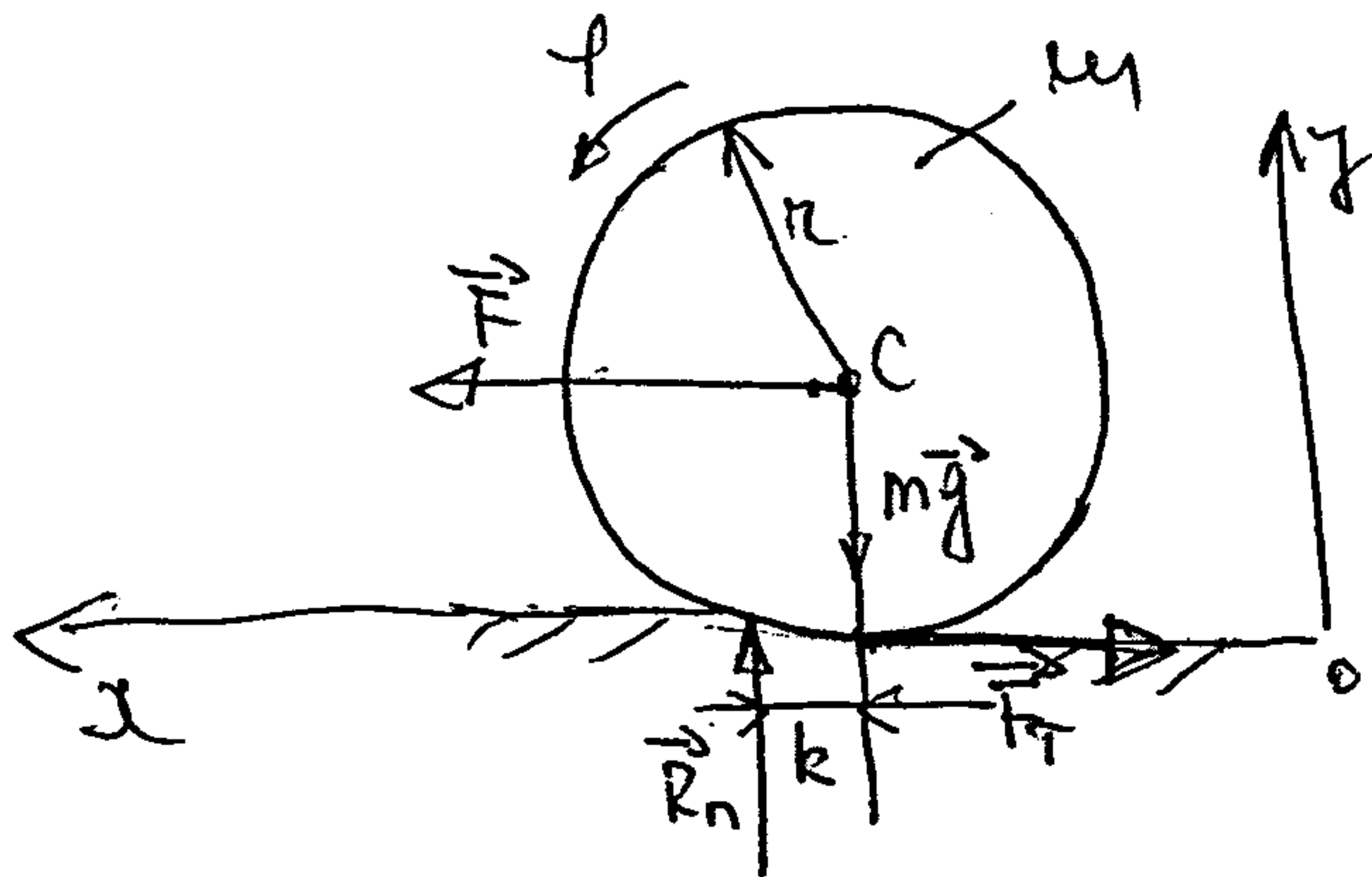
$$m \ddot{\alpha}_c = F - F_T, \quad F_T = \mu R_n$$

$$0 = -mg + R_n$$

$$J_c \ddot{\varphi} = F_T \cdot r$$

b) Kotaljenje bez klizanja tijela po deformabilnoj podlozi

U realnijem modelu kotaljenja tijela uzima se u obzir izvjesna deformabilnost podloge, tako da se deformacije podloge nastaju moment otpora protiv kotaljenja čiji je smjer suprotan od smjera obrtanja cilindra.



$M_k = R_n \cdot k$, k - koeficijent kotaljenja pri kotaljenju koje obestuje eksperimentalno, a ima dimenziju dužine.

$$\ddot{x}_c = r \ddot{\varphi}$$

$$m \ddot{x}_c = -F$$

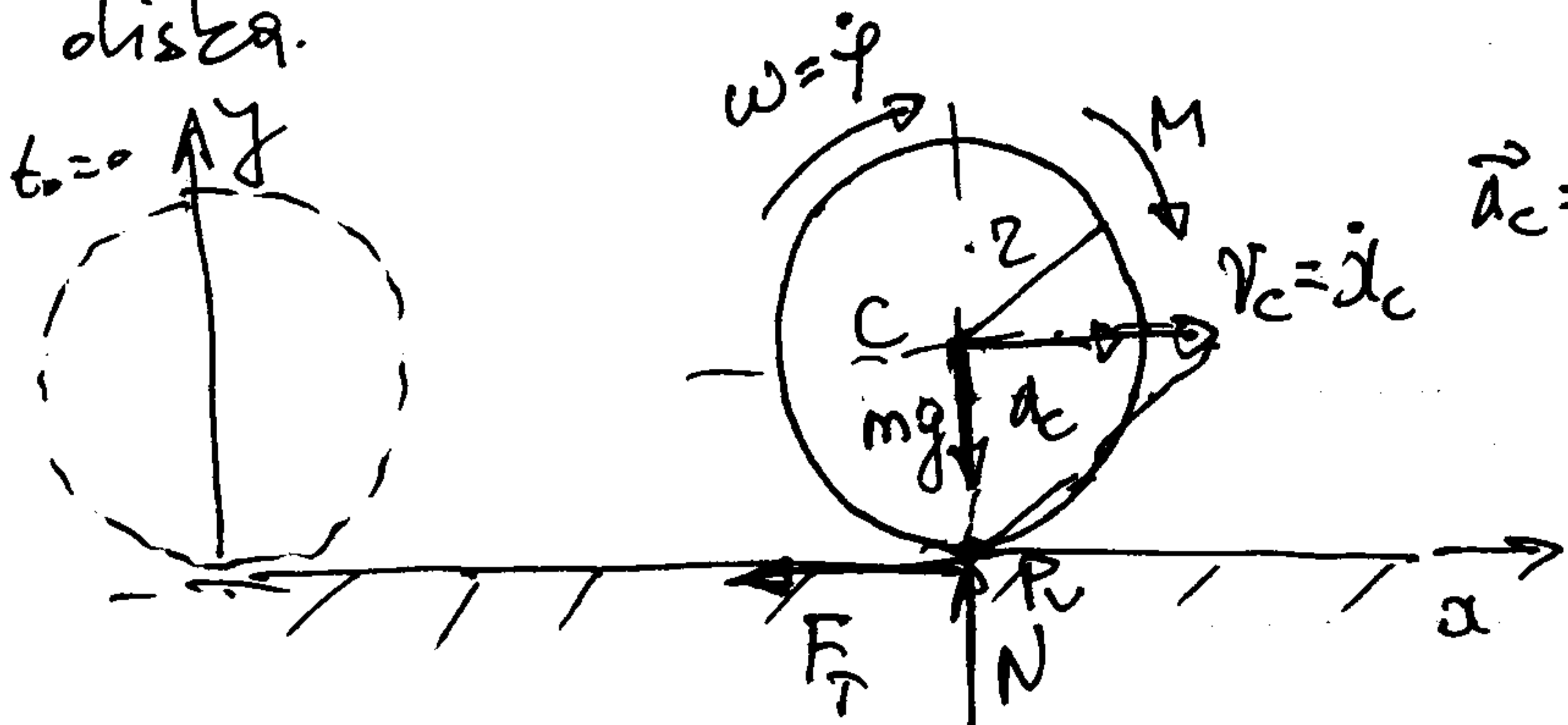
$$0 = -mg + R_n$$

$$J_c \ddot{\varphi} = F r - R_n \cdot k$$

N: U stvarnijem slučaju treba se uzeti da je statički koeficijent trenja μ_s veći od kinematičkog μ_k , a relacija (4) je μ i stat. koef. trenja.

ravno kretanje k-^o (zadaci)

1. Homogeni disk, mase m i poluprečnika r , počinje kretanje bez početne brzine kotrljajući se bez klizanja po horizontalnoj ravni pod dejstvom sptega konstantnog momenta M . Ako je disk u početnom trenutku miravao, odrediti jednačinu kretanja centra mase diska.

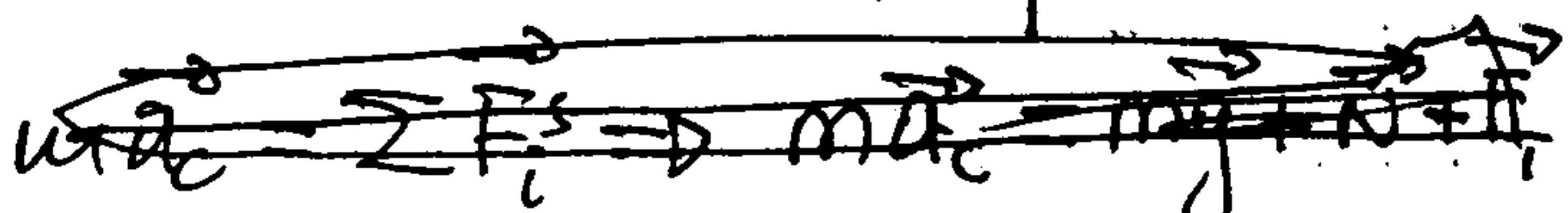


$$\vec{v}_c = v_c \vec{e} = \dot{x}_c \vec{e}$$

$$\vec{a}_c = a_c \vec{e} = \ddot{x}_c \vec{e}$$

$$\dot{x}_c = r \dot{\varphi} \text{ - kinematički uslov kotrljanja bez klizanja}$$

$$\ddot{x}_c = r \ddot{\varphi} \quad (*)$$



$$m \ddot{x}_c = \sum F_{ix}^s \Rightarrow m \ddot{x}_c = -F_T \quad (1)$$

$$m \ddot{y}_c = \sum F_{iy}^s \Rightarrow m \cdot 0 = -mg + N \quad (2)$$

$$J_c \ddot{\varphi} = \sum M_c^{F_i^s} \Rightarrow J_c \ddot{\varphi} = F_T r + M \quad (3), \quad J_c = \frac{m r^2}{2}$$

$$(1)(3) \stackrel{(*)}{\Rightarrow} \ddot{x}_c = \frac{2M}{3mr} = \text{const} \stackrel{(**)}{\Rightarrow} \dot{x}_c = \dot{x}_{c0} + \dot{\varphi} \cot t + \frac{2M}{3mr} \frac{t^2}{2}$$

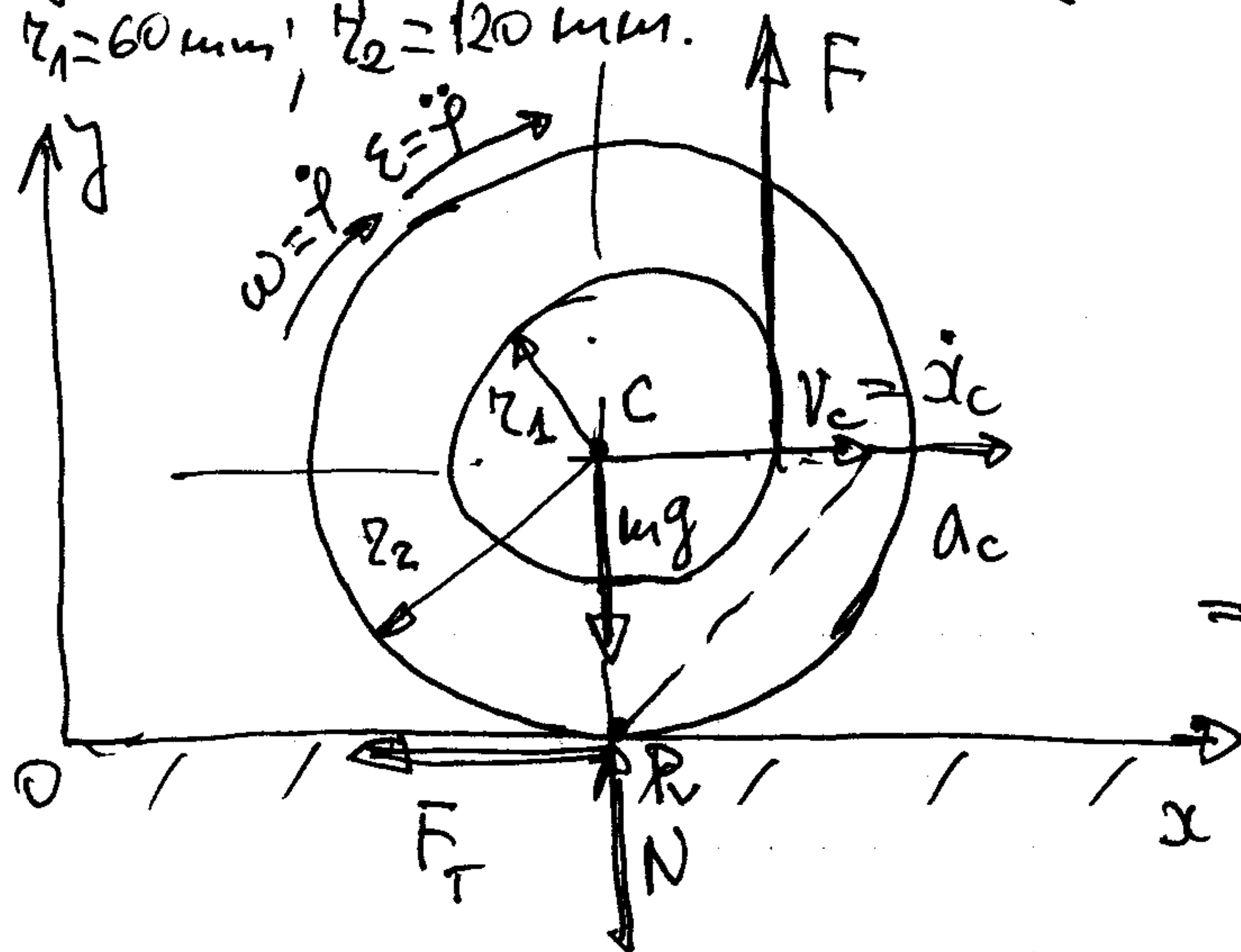
$$\boxed{x_c = \frac{M t^2}{3mr}} \text{ - jednačina kretanja centra diska}$$

Količi mora biti minimalni ^{statički} koeficijent trenja između diska i ravni u prethodnom zadatku da bi se ostvarilo kotrljanje bez klizanja!

$$(1) \stackrel{(**)}{\Rightarrow} F_T = \frac{2M}{3r} \quad (2) \Rightarrow N = mg$$

$$F_T = \mu_{smin} N \Rightarrow \boxed{\mu_{smin} = \frac{2M}{3mgr}}$$

2. Konopac namotan na doboš kalena vuče se vertikalnom silom $F=20\text{N}$. Kalen je mase $m=6\text{kg}$, a njegov poluprečnik inercije za centralnu osu upravan na zavon vretanja $i_c = 90\text{mm}$. Ako se kalen kotrlja bez klizanja po horizontalnoj ravni, odrediti: a) ugaono ubrzanje kalena i ubrzanje njegovog centra C ; b) minimalnu vrijednost statičkog koeficijenta trenja μ_s saglasnu sa ovakvim vretanjem. Dato je: $r_1=60\text{mm}$; $r_2=120\text{mm}$.



$$\vec{v}_c = v_c \vec{e} = \dot{x}_c \vec{e}$$

$$\vec{a}_c = a_c \vec{e} = \ddot{x}_c \vec{e}$$

Kotrljanje bez klizanja:

$$\dot{x}_c = r_2 \dot{\varphi}$$

$$\Rightarrow \ddot{x}_c = r_2 \ddot{\varphi} \quad (*)$$

$$m \ddot{x}_c = \sum F_{ix}^s \Rightarrow m \ddot{x}_c = -F_T \quad (1)$$

$$m \ddot{y}_c = \sum F_{iy}^s \Rightarrow m \cdot 0 = -mg + F + N \quad (2)$$

$$J_c \ddot{\varphi} = \sum M_c^{F_i^s} \Rightarrow m i_c^2 \ddot{\varphi} = F_T r_2 - F \cdot r_1 \quad (3)$$

$$(1), (3) \xrightarrow{(*)} \ddot{x}_c = -\frac{F r_1 r_2}{m(i_c^2 + r_2^2)} = -1,067 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}, \quad a_c = 1,07 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

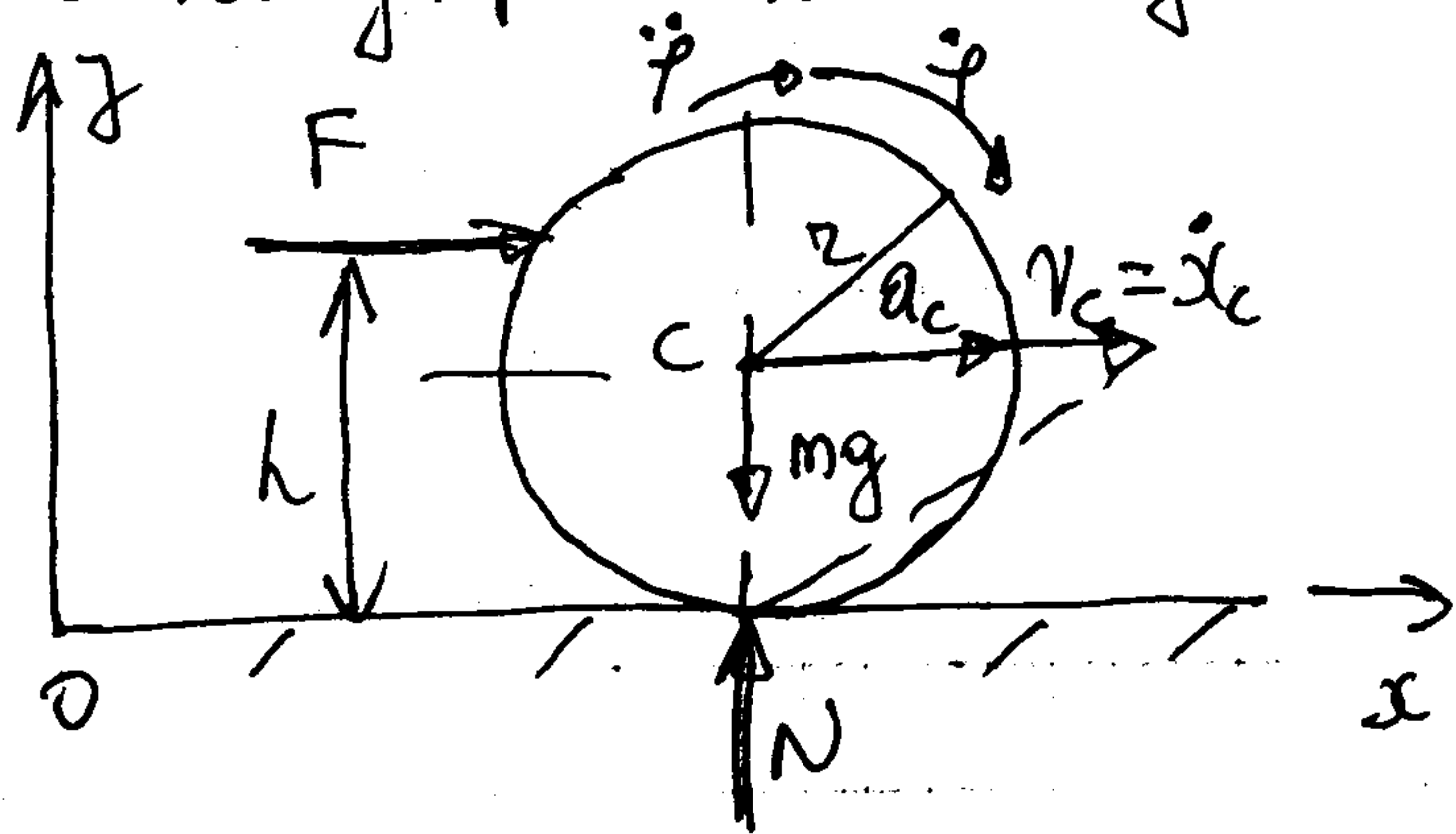
$$\epsilon = \frac{\ddot{x}_c}{r_2} = 8,89 \text{ s}^{-2}$$

$$b) (2) \Rightarrow N = mg - F = 38,86 \text{ N}$$

$$F_T = \mu_{s \min} N; \quad (1) \Rightarrow F_T = 6,4 \text{ N}$$

$$\mu_{s \min} = \frac{F_T}{N} = \boxed{0,165}$$

3. Na kom rastojanju h od horizontalne glatke ravni treba djelovati silom F , konstantnog inteziteta i horizontalnog pravca, na homogeni disk mase m i poluprečnika r da bi se disk kotio bez klizanja po horizontalnoj ravni.



$$m\ddot{x}_c = \sum F_{ix}^s \Rightarrow m\ddot{x}_c = F \quad (1) \Rightarrow \ddot{x}_c = \frac{F}{m}$$

$$m\ddot{y}_c = \sum F_{iy}^s \Rightarrow m \cdot 0 = -mg + N \quad (2)$$

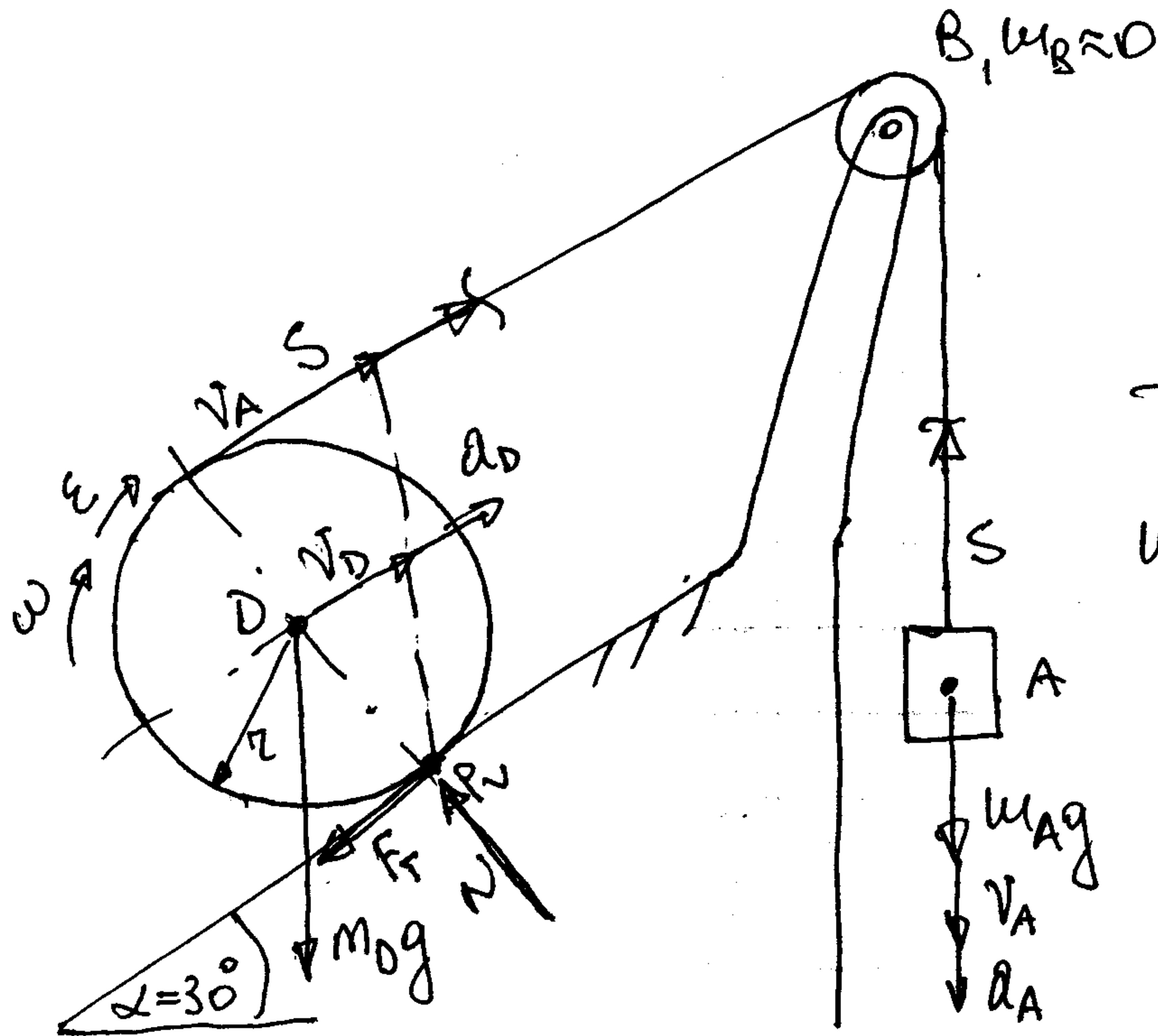
$$J_c \ddot{\varphi} = \sum M_c^{F_{is}^s} \Rightarrow \frac{mr^2}{2} \cdot \ddot{\varphi} = F(h-r) \quad (3) \Rightarrow \ddot{\varphi} = \frac{2F(h-r)}{mr^2}$$

Kotiovanje bez klizanja: $\dot{x}_c = r\dot{\varphi} \Rightarrow \ddot{x}_c = r\ddot{\varphi}$

$$\Rightarrow \frac{F}{m} = \frac{2F(h-r)}{mr^2} \cdot r \Rightarrow \boxed{h = \frac{3}{2}r}$$

Nap. (U ovom modelu nla trzaja je jednaka nuli jer je zavao glatka)

4. Teret A, mase $m_A = m$, vezan je za jedan kraj nerastegljivog užeta koje je prebačeno preko kotura B, zamenarjive mase, a zatim naučono na kotur D, mase $m_D = 2m$. Kotur smatrati homogenim diskom koji se kotrlja bez klizanja po strznoj ravni nagiba $\alpha = 30^\circ$. Odrediti ubrzanje centra kotura D.



$$m_A = m, m_D = 2m$$

$$v_A = 2v_D \xrightarrow{d/dt} a_A = 2a_D (*)$$

$$\omega = \frac{v_A}{2r} \xrightarrow{d/dt} \varepsilon = \frac{2a_D}{2r} (**)$$

Tijelo A (pravolinijska translacija):

$$m_A a_A = m_A g - S \quad (1)$$

Tijelo D (ravno kretanje): $m_D \vec{a}_D = m_D \vec{g} + \vec{S} + \vec{N} + \vec{F}_T \Rightarrow m_D a_D = -m_D g \sin \alpha - F_T + S \quad (2)$

$$m_D \cdot 0 = -m_D g \cos \alpha + N \quad (3)$$

$$J_D \varepsilon = \Sigma M_D^{F_i} \Rightarrow \frac{m_D r^2}{2} \varepsilon = F_T r + S \cdot r \quad (4)$$

(1), (2), (4) $\xrightarrow{(*), (**)}$ $\boxed{a_D = \frac{2}{7} g}$