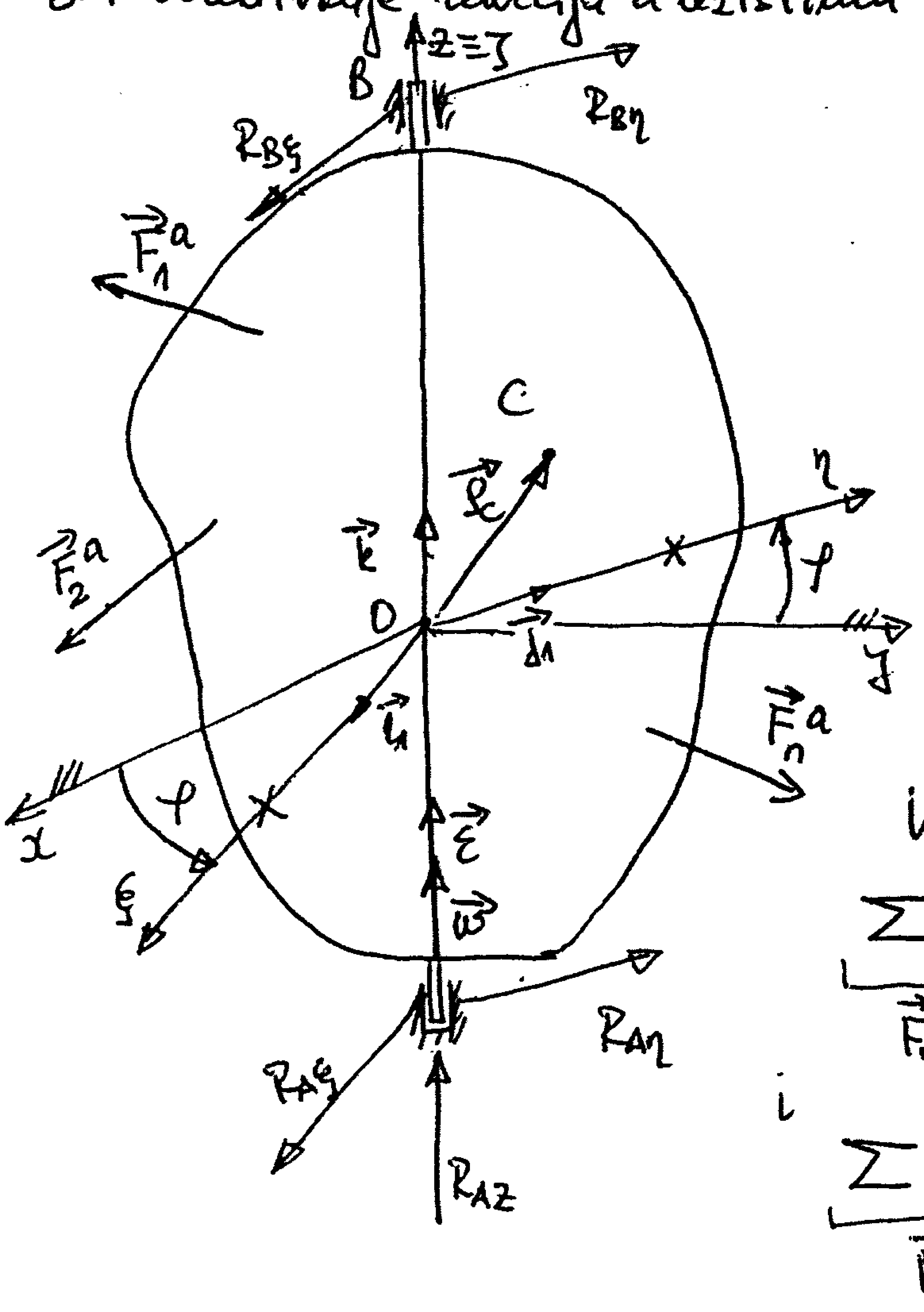
VIII sedmica nastave
– predavanja i primjeri –

8.4 Određivanje reakcija u ležištima tijela koje se obrće oko nepokretne ose



$O\xi\eta z$ – pokretni koordinatni sistem vezan za tijelo

$\vec F_i^a$ $(i=1,\dots,n)$ – aktivne sile

$$\left.\begin{aligned}\vec R_A &= R_{A\xi}\vec i_1 + R_{A\eta}\vec j_1 + R_{Az}\vec k\\ \vec R_B &= R_{B\xi}\vec i_1 + R_{B\eta}\vec j_1\end{aligned}\right\}\text{reakcije ležišta A i B}$$

$\vec\rho_C = \xi_C\vec i_1 + \eta_C\vec j_1 + z_C\vec k$ – vektor položaja centra inercije

$\vec\omega = \omega_z\vec k, \quad \omega_z = \dot\varphi$

$\vec\varepsilon = \varepsilon_z\vec k, \quad \varepsilon_z = \dfrac{d\omega_z}{dt} = \ddot\varphi$

U skladu sa Dalamberovim principom je

$$\underbrace{\sum \vec F_i^a}_{\vec F_r^a} + \underbrace{\vec R_A + \vec R_B}_{\vec R_r} + \vec F_r^{in} = 0 \qquad (1)$$

i

$$\underbrace{\sum \vec M_O^{\vec F_i^a}}_{\vec M_O^a} + \underbrace{\vec M_O^{\vec R_A} + \vec M_O^{\vec R_B}}_{\vec M_O^R} + \vec M_O^{in} = 0 \qquad (2)$$

gdje su, na osnovu (8.3.5-6)),

$$\vec{F}_z^{in} = m(\eta_C \ddot{\varphi} + \xi_C \dot{\varphi}^2)\vec{i}_1 + m(-\xi_C \ddot{\varphi} + \eta_C \dot{\varphi}^2)\vec{j}_1 \,, \qquad (3)$$

$$\vec{M}_O^{in} = (J_{\xi z}\ddot{\varphi} - J_{\eta z}\dot{\varphi}^2)\vec{i}_1 + (J_{\eta z}\ddot{\varphi} + J_{\xi z}\dot{\varphi}^2)\vec{j}_1 - J_z \ddot{\varphi}\vec{k} \,, \qquad (4)$$

i

$$\vec{M}_O^{\vec{R}_A} = \vec{OA} \times \vec{R}_A = \begin{vmatrix} \vec{i}_1 & \vec{j}_1 & \vec{k} \\ 0 & 0 & -\overline{OA} \\ R_{A\xi} & R_{A\eta} & R_{Az} \end{vmatrix} = R_{A\eta}\overline{OA}\,\vec{i}_1 - R_{A\xi}\overline{OA}\,\vec{j}_1 \,; \quad \vec{M}_O^{\vec{R}_B} = \vec{OB} \times \vec{R}_B = -R_{B\eta}\overline{OB}\,\vec{i}_1 + R_{B\xi}\overline{OB}\,\vec{j}_1 \,, \quad (5)$$

Skalarni oblici jednačina (1) i (2), uzimajući u obzir (3)-(5), su

$$\left.\begin{aligned}
&\sum F_{i\xi}^a + R_{A\xi} + R_{B\xi} + m(\eta_C \ddot{\varphi} + \xi_C \dot{\varphi}^2) = 0 \\
&\sum F_{i\eta}^a + R_{A\eta} + R_{B\eta} + m(-\xi_C \ddot{\varphi} + \eta_C \dot{\varphi}^2) = 0 \\
&\sum F_{iz}^a + R_{Az} = 0 \\
&\sum M_\xi^{\vec{F}_i^a} + R_{A\eta}\overline{OA} - R_{B\eta}\overline{OB} + J_{\xi z}\ddot{\varphi} - J_{\eta z}\dot{\varphi}^2 = 0 \\
&\sum M_\eta^{\vec{F}_i^a} - R_{A\xi}\overline{OA} + R_{B\xi}\overline{OB} + J_{\eta z}\ddot{\varphi} + J_{\xi z}\dot{\varphi}^2 = 0 \\
&\sum M_z^{\vec{F}_i^a} - J_z \ddot{\varphi} = 0
\end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

Posledнja jednačina gornjeg sistema je, već ranije izvedena, diferencijalna jednačina obrtanja. Iz nje, uz poznate početne uslove, određuje se zakon kretanja $\varphi = \varphi(t)$, a na osnovu njega i zakon promjene ugaone brzine $\dot{\varphi} = \dot{\varphi}(t)$.

Ako su ugaono ubrzanje i ugaona brzina poznati, a oni se, pri datim silama $\vec{F}_i^a$, nalaze na osnovu jednačine $(6)_6$, problem pronalaženja reakcija ležišta svodi se na rješavanje prvih pet jednačina (6) po pet nepoznatih: $R_{A\xi}, R_{A\eta}, R_{Az}, R_{B\xi}, R_{B\eta}$.

Pada u oči da reakcije ležišta zavise kako od aktivnih sila tako i od dinamičkog stanja tijela, tj. od $\ddot{\varphi}$ i $\dot{\varphi}^2$. Svaku od reakcija ležišta možemo razložiti na dvije komponente: statičku (koja zavisi samo od aktivnih sila) i dinamičku (koja je posledica kretanja, tj zavisi od inercijalnih sila).

$$\vec{R}_A = \vec{R}_A^{st} + \vec{R}_A^d \,, \quad \vec{R}_B = \vec{R}_B^{st} + \vec{R}_B^d \qquad (7)$$

Statičke reakcije dobićemo iz jednačina $(6)_{1-5}$, ako u njih stavimo $\ddot{\varphi} = \dot{\varphi} = 0$, tj

$$\left.\begin{aligned}
&\sum F_{i\xi}^a + R_{A\xi}^{st} + R_{B\xi}^{st} = 0 \,; \quad \sum M_\xi^{\vec{F}_i^a} + R_{A\eta}^{st}\overline{OA} - R_{B\eta}^{st}\overline{OB} = 0 \,; \\
&\sum F_{i\eta}^a + R_{A\eta}^{st} + R_{B\eta}^{st} = 0 \,; \quad \sum M_\eta^{\vec{F}_i^a} - R_{A\xi}^{st}\overline{OA} + R_{B\xi}^{st}\overline{OB} = 0 \,; \\
&\sum F_{iz}^a + R_{Az}^{st} = 0 \,;
\end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

Dakle, statičke reakcije su one koje bi postojale i kad bi se tijelo zaustavilo i bilo u ravnoteži pod dejstvom datog sistema sila.

Ako (7) unesemo u $(6)_{1-5}$, uzimajući u obzir (8), dobijamo sledeći sistem jednačina

$$\left.\begin{aligned}
&R^d_{A\xi} + R^d_{B\xi} + m(\eta_c\ddot{\varphi} + \xi_c\dot{\varphi}^2) = 0\\
&R^d_{A\eta} + R^d_{B\eta} + m(-\xi_c\ddot{\varphi} + \eta_c\dot{\varphi}^2) = 0\\
&R^d_{Az} = 0\\
&R^d_{A\eta}\overline{OA} - R^d_{B\eta}\overline{OB} + J_{\xi z}\ddot{\varphi} - J_{\eta z}\dot{\varphi}^2 = 0\\
&-R^d_{A\xi}\overline{OA} + R^d_{B\xi}\overline{OB} + J_{\eta z}\ddot{\varphi} + J_{\xi z}\dot{\varphi}^2 = 0
\end{aligned}\right\} \quad (9)$$

iz kojih određujemo dinamičke komponente reakcija ležišta.

Sada se može postaviti pitanje: Pod kojim uslovima će dinamičke reakcije ležišta biti jednake nuli?

Ako stavimo $\vec{R}^d_A = \vec{R}^d_B = 0$, u (9) prve dvije jednačine sistema (9), daju

$$\left.\begin{aligned}
&\xi_c\dot{\varphi}^2 + \eta_c\ddot{\varphi} = 0\\
&\eta_c\dot{\varphi}^2 - \xi_c\ddot{\varphi} = 0
\end{aligned}\right\} \quad (10)$$

što možemo posmatrati kao homogeni sistem algebarskih jednačina po ξ_c i η_c, čiji je determinanta

$$\Delta = \begin{vmatrix} \dot{\varphi}^2 & \ddot{\varphi} \\ -\ddot{\varphi} & \dot{\varphi}^2 \end{vmatrix} = \dot{\varphi}^4 + \ddot{\varphi}^2 \neq 0$$

pa će uslovi (10) biti zadovoljeni samo onda kada je

$$\xi_c = 0, \quad \eta_c = 0 \qquad (11)$$

tj., kada se centar inercije tijela nalazi na obrtnoj osi.

Posljednje dvije jednačine sistema (9) svode se na

$$\left.\begin{aligned}
&J_{\xi z}\ddot{\varphi} - J_{\eta z}\dot{\varphi}^2 = 0\\
&J_{\xi z}\dot{\varphi}^2 + J_{\eta z}\ddot{\varphi} = 0
\end{aligned}\right\} \quad (12)$$

što možemo tretirati kao sistem jednačina po $J_{\xi z}$ i $J_{\eta z}$, čija je determinanta

$$\Delta = \begin{vmatrix} \ddot{\varphi} & -\dot{\varphi}^2 \\ \dot{\varphi}^2 & \ddot{\varphi} \end{vmatrix} = \ddot{\varphi}^2 + \dot{\varphi}^4 \neq 0$$

pa će uslovi (12) biti zadovoljeni samo kada je

$$J_{\xi z} = 0, \quad J_{\eta z} = 0, \qquad (13)$$

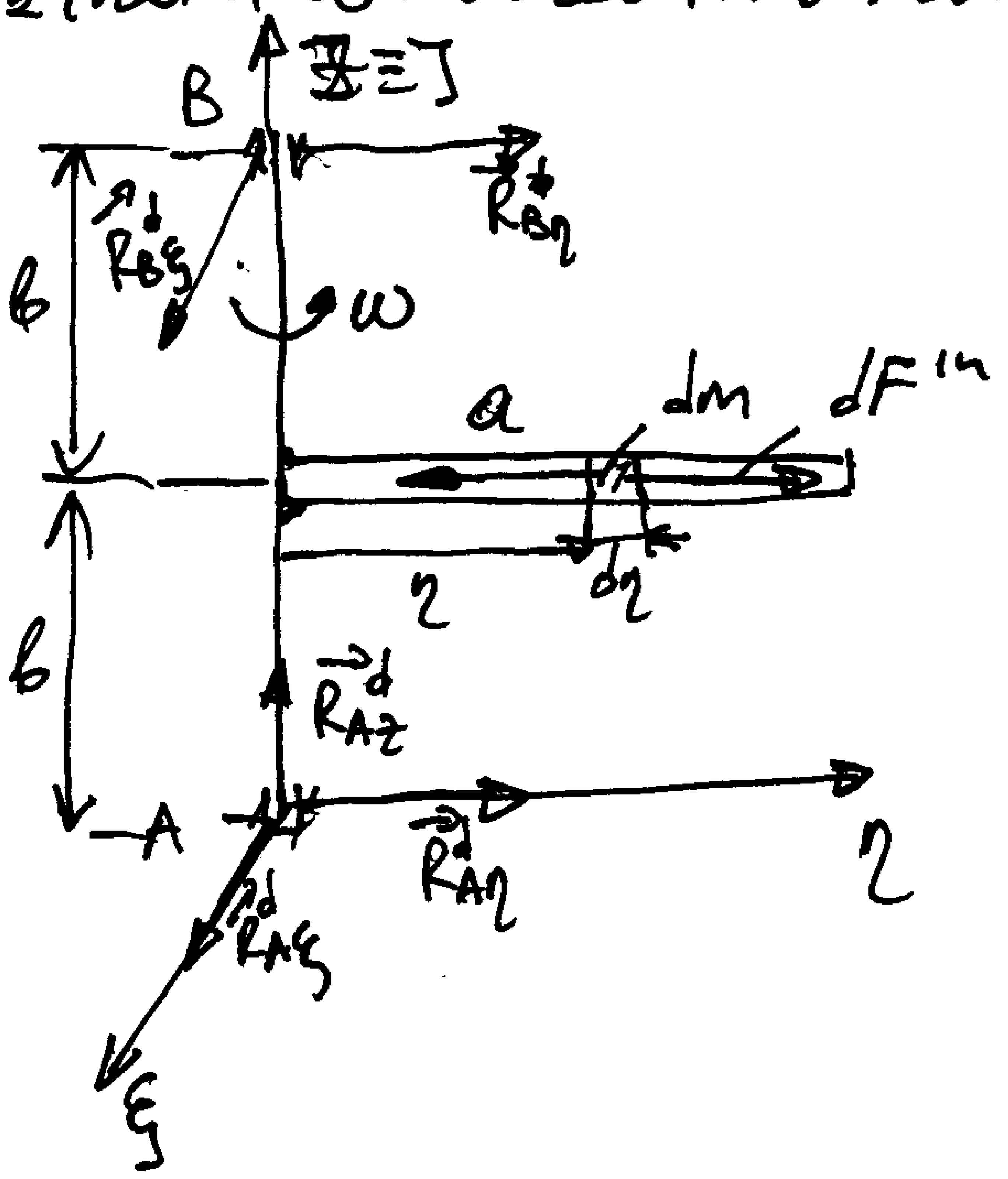
odnosno kada je obrtna osa glavna osa inercije tijela.

Ako je ispunjen uslov (11) kaže se da je tijelo statički uravnoteženo, a ako su ispunjeni uslovi (11) i (13) dinamičke reakcije ležišta su jednake nuli i kaže se da je tijelo dinamički uravnoteženo.

Prema tome, kruto tijelo koje se okreće oko nepokretne ose biće dinamički uravnoteženo ako je obrtna osa <u>glavna</u> <u>centralna</u> <u>osa</u> <u>inercije</u>.

Mala odstupanja od uslova (11) i (13), tj. postojanje male neuravnoteženosti, kod obrtnih elemenata u mašinama, pri velikim ugaonim brzinama izazivaju značajne dinamičke reakcije, odnosno dinamička opterećenja u ležištima. Otklanjanje ove neuravnoteženosti (balansiranje) može se postići dodavanjem ili odstranjivanjem koncentrisanih masa (najčešće dvije) tako da obrtna osa postane glavna centralna osa inercije

7. Homogeni štap, mase m i dužine l, zavaren je pod pravim uglom za vertikalnu osovinu koja se obrće konstantnom ugaonom brzinom ω. Odrediti dinamičke reakcije u ležištima A i B.



- Prvi (direktni) način.

Postavimo koordinatni sistem $A\xi\eta z$ koji se obrće zajedno sa štapom tako da štap leži u ravni $A\eta z$.

- Uočimo elementarni djelić štapa i pridružimo mu inercijalnu silu, a uticaj ležišta zamijenimo dinamičkim reakcijama.

$dF^{in} = a\,dm$, $a = \eta\omega^2$ jer je $\omega = const$

$dm = \rho'' d\eta$, $\rho'' = \frac{m}{l}$

$\Rightarrow dF^{in} = \frac{m}{l}\omega^2 \eta\, d\eta \quad (*)$

Uslovi ravnoteže (inercijalne sile + dinamičke reakcije):

"$\sum F_{\xi i} = 0$" $\quad R^d_{A\xi} + R^d_{B\xi} = 0 \quad (1)$

"$\sum F_{\eta i} = 0$" $\quad R^d_{A\eta} + R^d_{B\eta} + \int_{(m)} dF^{in} = 0 \quad (2)$

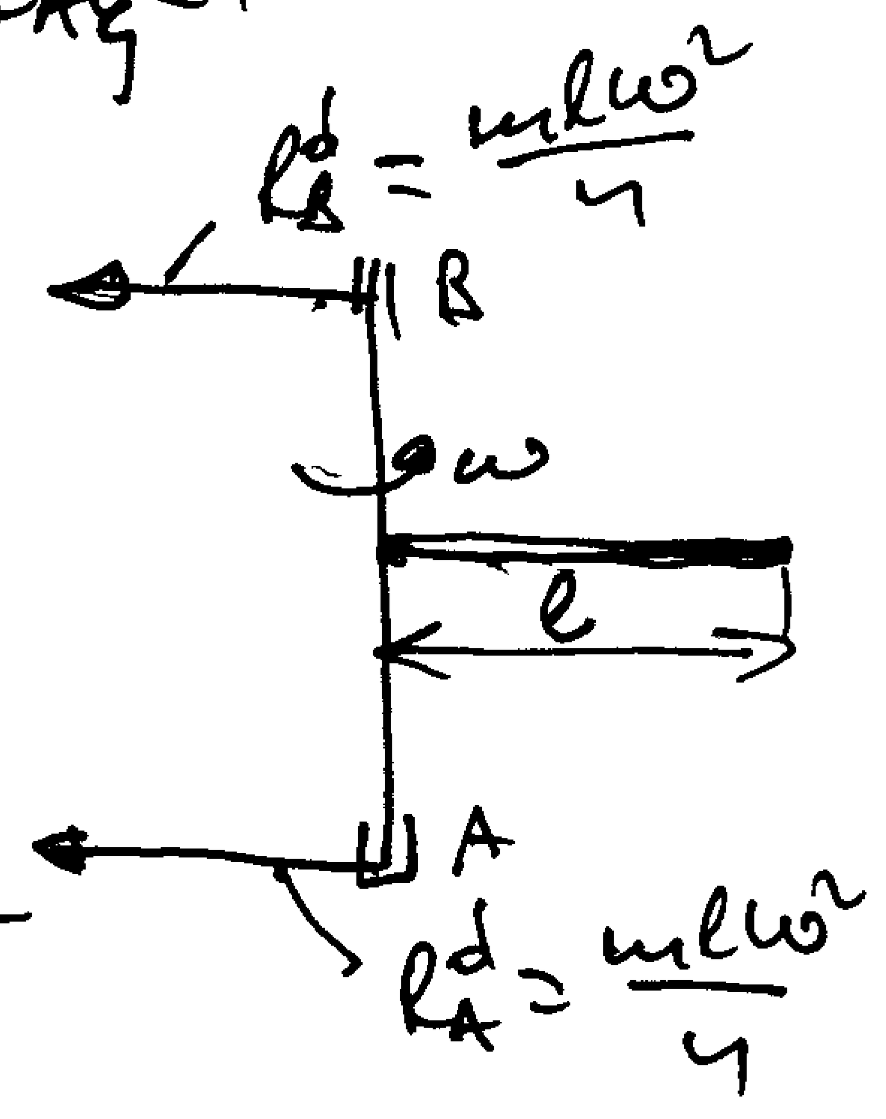
"$\sum F_{z i} = 0$" $\quad R^d_{Az} = 0 \quad (3)$

"$\sum M_{\xi} = 0$" $\quad R^d_{B\eta} \cdot 2b + \int_{(m)} b \cdot dF^{in} = 0 \quad (4)$

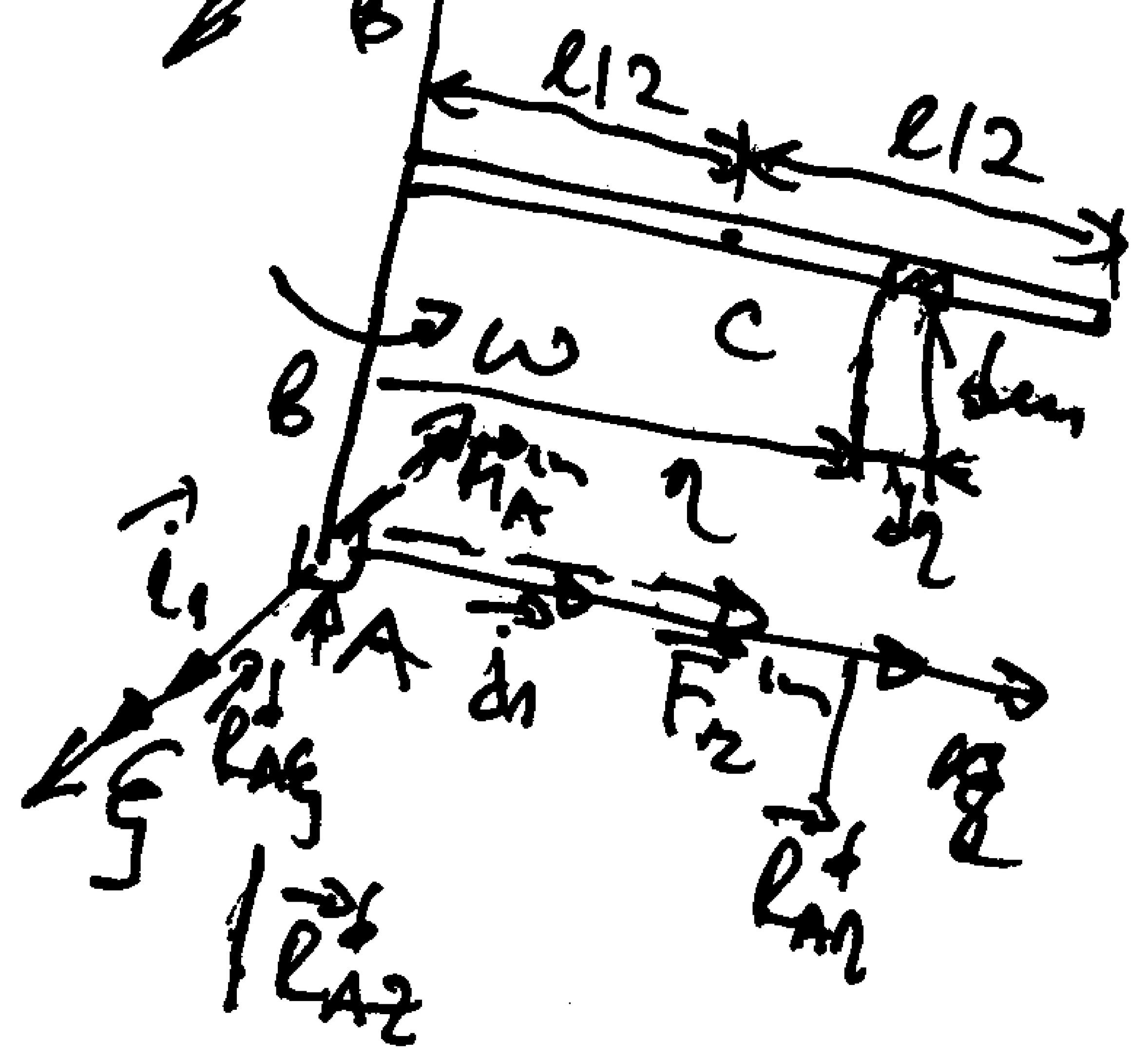
"$\sum M_{\eta} = 0$" $\quad R^d_{B\xi} \cdot 2b = 0 \Rightarrow R^d_{B\xi} = 0 \xRightarrow{(1)} R^d_{A\xi} = 0$

$$\int_{(m)} dF^{in} = \frac{m}{l}\omega^2 \int_0^l \eta\, d\eta = m\frac{l}{2}\omega^2$$

$$\int_{(m)} b\,dF^{in} = b\int_{(m)} dF^{in} = m\frac{lb\omega^2}{2}$$



$(4),(2) \Rightarrow R^d_{B\eta} = -\frac{ml\omega^2}{4}$, $R^d_{A\eta} = -\frac{ml\omega^2}{4}$



[illegible]

$$\vec F_\eta^{in} = m(\eta_c\varepsilon + \xi_c\omega^2)\vec i_1 + m(-\xi_c\varepsilon + \eta_c\omega^2)\vec j_1$$

$$\vec M_A^{in} = (J_{\xi z}\varepsilon - J_{\eta z}\omega^2)\vec i_1 + (J_{\eta z}\varepsilon + J_{\xi z}\omega^2)\vec j_1 - J_z\varepsilon\vec k$$

$$\omega = const \Rightarrow \varepsilon = 0$$

$$\xi_c = 0,\ \eta_c = \frac{l}{2},\ J_{\xi z} = \int_{(m)} \overset{0}{\xi} z\,dm = 0$$

$$J_{\eta z} = \int_{(m)} \eta \overset{b}{z}\,dm,\quad dm = \rho'' d\eta = \frac{m}{l}d\eta$$

$$J_{\eta z} = b\frac{m}{l}\int_0^l \eta\,d\eta = m\frac{bl}{2}$$

$$\Rightarrow \vec F_\eta^{in} = m\frac{l}{2}\omega^2\vec j_1,\quad \vec M_A^{in} = -\frac{mbl}{2}\omega^2\vec i_1$$

$$\vec R_A^d + \vec R_B^d + \vec F_\eta^{in} = 0 \Rightarrow \begin{cases} R^d_{A\xi} + R^d_{B\xi} = 0 \\ R^d_{A\eta} + R^d_{B\eta} + m\frac{l}{2}\omega^2 = 0 \\ R^d_{Az} = 0 \end{cases}$$

$$\vec M_A^{\vec R_B} + \vec M_A^{in} = 0 \Rightarrow \begin{cases} -R^d_{B\eta}\cdot 2b - \frac{mbl}{2}\omega^2 = 0 \\ R^d_{B\xi}\cdot 2b = 0 \end{cases}$$

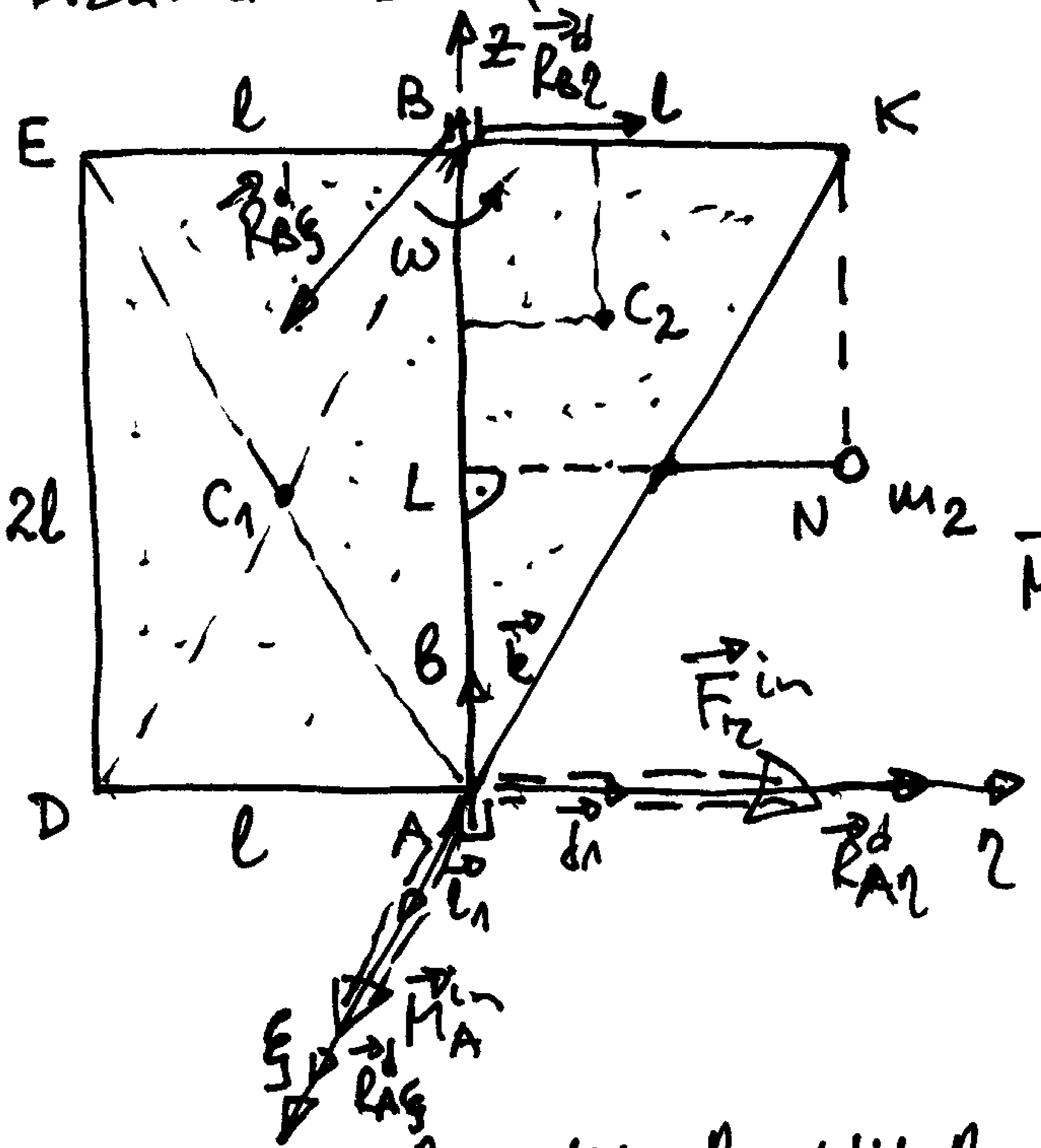
$$R^d_{A\xi} = R^d_{B\xi} = R^d_{Az} = 0$$

$$R^d_{B\eta} = -\frac{ml\omega^2}{4},\quad R^d_{A\eta} = -\frac{ml\omega^2}{4}$$

8. Homogena tanka ploča oblika trapeza, mase m_1 i dimenzija prikazanih na slici, obrće se oko ose AB konstantnom ugaonom brzinom ω. Za ploču, u ravni ploče, posredstvom lakog štapa, čvrsto je vezana kugla N, zanemarljivih dimenzija, mase m_2 tako da je $\overline{AL}=b$.

a) Odrediti dinamičke reakcije ležišta A i B.

b) Kolika treba da je masa m_2 i rastojanje b pa da dinamičke reakcije budu jednake nuli, tj. da ploča bude dinamički uravnotežena.



Kada se određuju dinamičke reakcije, osim njih uzimaju se u obzir još samo inercijalne sile, koje redukovane na tačku A se svode na glavni vektor i glavni moment određen formulama

$$\vec F_R^{in} = m(\eta_C\varepsilon+\xi_C\omega^2)\vec i_1 + m(-\xi_C\varepsilon+\eta_C\omega^2)\vec j_1$$

$$\vec M_A^{in} = (J_{\xi z}\varepsilon - J_{\eta z}\omega^2)\vec i_1 + (J_{\eta z}\varepsilon + J_{\xi z}\omega^2)\vec j_1 - J_z\varepsilon\vec k$$

U našem slučaju je $\xi_C=0$, $\varepsilon=0$, $m=m_1+m_2$

$$J_{\xi z}=\int \xi z\,dm = 0$$

$$\Rightarrow \vec F_R^{in} = (m_1+m_2)\eta_C\omega^2\vec j_1$$

$$\vec M_A^{in} = -J_{\eta z}\omega^2\vec i_1; \quad \eta_C,\ J_{\eta z}\ ?$$

$$\eta_C = \frac{m_{1P}\eta_{C1}+m_{1T}\eta_{C2}+m_2\eta_N}{m_1+m_2}, \quad m_{1P}=\frac{2}{3}m_1,\ m_{1T}=\frac{m_1}{3},\ \eta_{C1}=-l,\ \eta_{C2}=\frac{l}{3},\ \eta_N=l$$

$$\boxed{\eta_C=\frac{9m_2-2m_1}{9(m_1+m_2)}l}, \quad J_{\eta z}=J_{\eta z}^{(m_1)}+J_{\eta z}^{(m_2)}, \quad J_{\eta z}^{(m_2)}=m_2\eta_N z_N = m_2 l b$$

$$J^{(m_1)}_{\eta z}=\int_{(m_1)}\eta z\,dm = \int_{(m_{1P})}\eta z\,dm+\int_{(m_{1T})}\eta z\,dm; \quad dm=\rho'\,d\eta\,dz, \quad \rho'=\frac{m_1}{A}=\frac{m_1}{3l^2}$$

$$J^{(m_1)}_{\eta z} = \frac{m_1}{3l^2}\left[\int_{-l}^{0}\eta\,d\eta\int_0^{2l} z\,dz + \int_0^{2l} z\,dz\int_0^{z/2}\eta\,d\eta\right] = -\frac{m_1 l^2}{6}$$

$$\Rightarrow J_{\eta z} = -\frac{m_1l^2}{6}+m_2lb$$

$$\Rightarrow \vec F_R^{in} = \frac{9m_2-2m_1}{9}l\omega^2\vec j_1, \quad \vec M_A^{in}=\left(\frac{m_1l^2}{6}-m_2lb\right)\omega^2\vec i_1$$

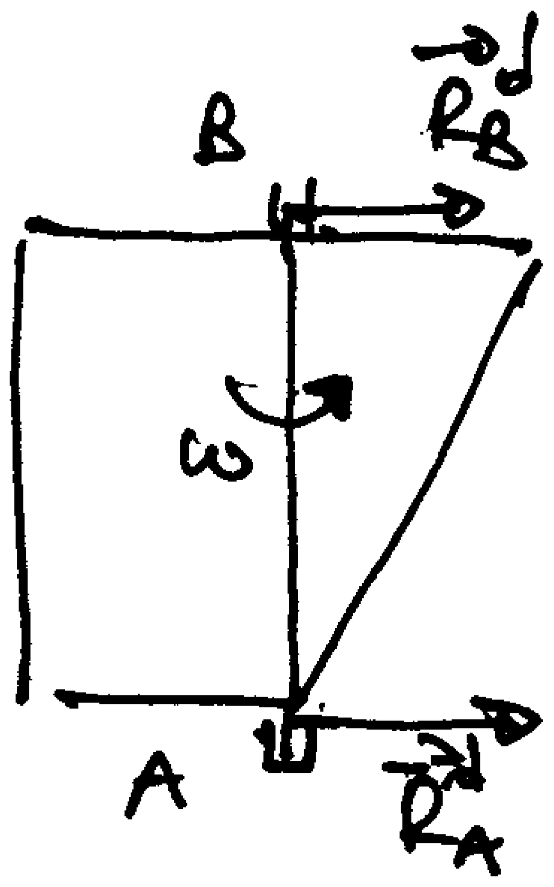
$$\vec R_A^d = R^d_{A\xi}\vec i_1 + R^d_{A\eta}\vec j_1 + R^d_{Az}\vec k; \quad \vec R_B^d = R^d_{B\xi}\vec i_1+R^d_{B\eta}\vec j_1$$

Dalamberov princip:

$$\vec{R}_A^d + \vec{R}_B^d + \vec{F}_r^{in} = 0 \Longrightarrow \begin{cases} R_{A\xi}^d + R_{B\xi}^d = 0 & (1) \\ R_{A\eta}^d + R_{B\eta}^d + \dfrac{9m_2 - 2m_1}{9} \ell \omega^2 = 0 & (2) \\ R_{Az}^d = 0 & (3) \end{cases}$$

$$\vec{M}_A^{\vec{R}_B^d} + \vec{M}_A^{in} = 0 \Longrightarrow \begin{cases} -R_{B\eta}^d \cdot 2\ell + \left(\dfrac{m_1 \ell^2}{6} - m_2 \ell b\right)\omega^2 = 0 & (4) \\ R_{B\xi}^d \cdot 2\ell = 0 & (5) \end{cases}$$

$(5) \Rightarrow R_{B\xi}^d = 0$, $(1) \Rightarrow R_{A\xi}^d = 0$, $(3)\ R_{Az}^d = 0$



$(4) \Rightarrow R_{B\eta}^d = \left(\dfrac{m_1 \ell}{12} - m_2 \dfrac{b}{2}\right)\omega^2$,

$(2) \Rightarrow R_{A\eta}^d = \left(\dfrac{15}{36} m_1 \ell + \dfrac{m_2}{2}(b - 2\ell)\right)\omega^2$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} \vec{R}_A^d &= \left(\frac{15}{36} m_1 \ell + \frac{m_2}{2}(b - 2\ell)\right)\omega^2 \vec{j}_1 \\ \vec{R}_B^d &= \left(\frac{m_1 \ell}{12} - m_2 \frac{b}{2}\right)\omega^2 \vec{j}_1 \end{aligned}}$$

b) $\vec{R}_A^d = 0$, $\vec{R}_B^d = 0$

$\Downarrow$ $m_2 b = \dfrac{m_1 \ell}{6}$

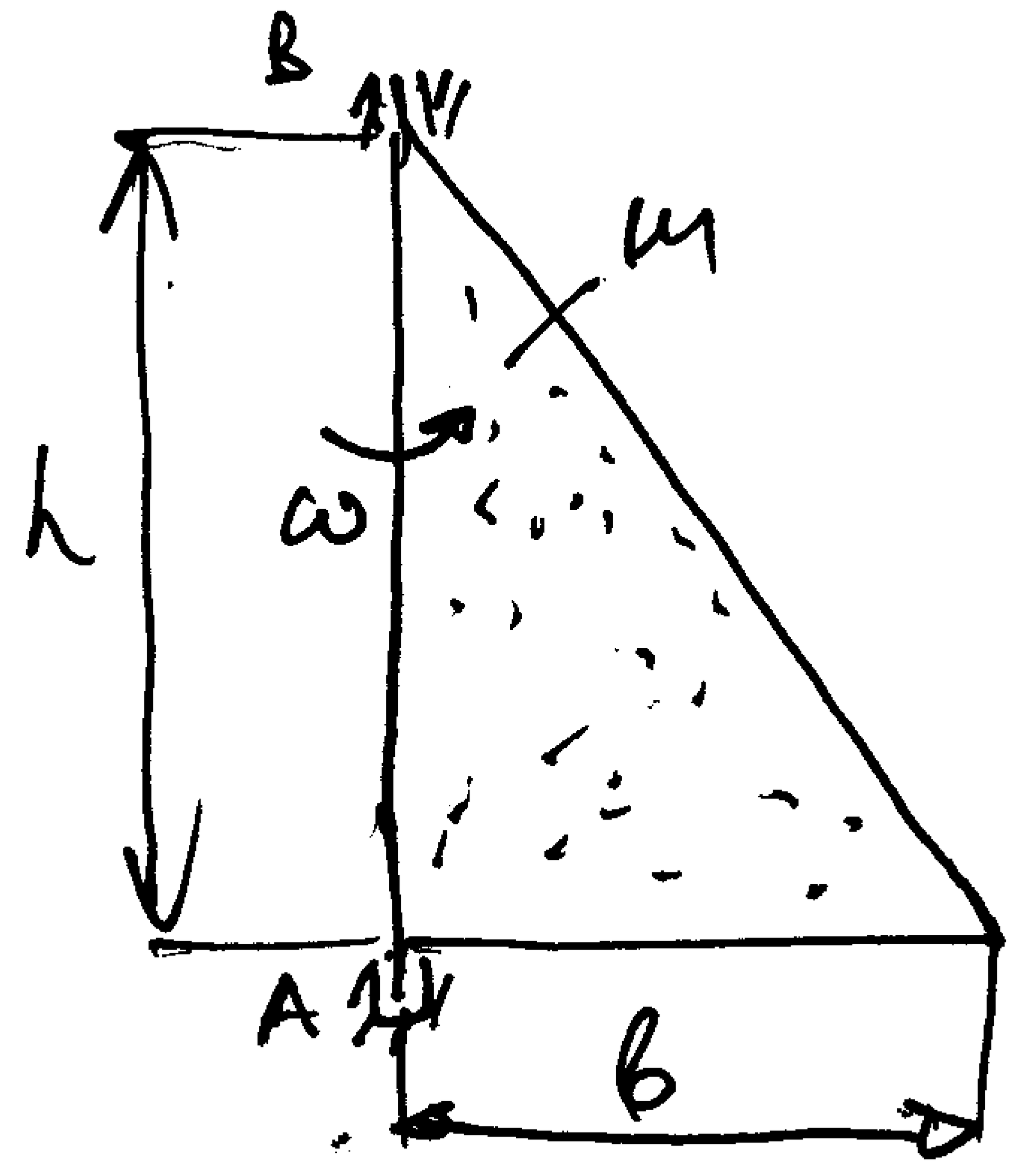
$$\boxed{m_2 = \frac{2}{9} m_1, \quad b = \frac{3}{4} \ell}$$

Drugi način, direktno postavljajući uslove da je obrtna osa glavna centralna osa inercije

$\eta_C = 0 \Longrightarrow m_2 = \dfrac{2}{9} m_1$

$J_{\eta z} = 0 \Longrightarrow b = \dfrac{3}{4} \ell$

9. Homogena ploča, mase m, u obliku pravouglog trougla zavarena je za vertikalnu osovinu koja se obrće konstantnom ugaonom brzinom ω. Odrediti dinamičke reakcije u ležištima A i B.



R: $\vec{R}_A^d = -\dfrac{mb\omega^2}{4}\vec{d}_1$

$\vec{R}_B^d = -\dfrac{mb\omega^2}{12}\vec{d}_1$