VIII sedmica nastave

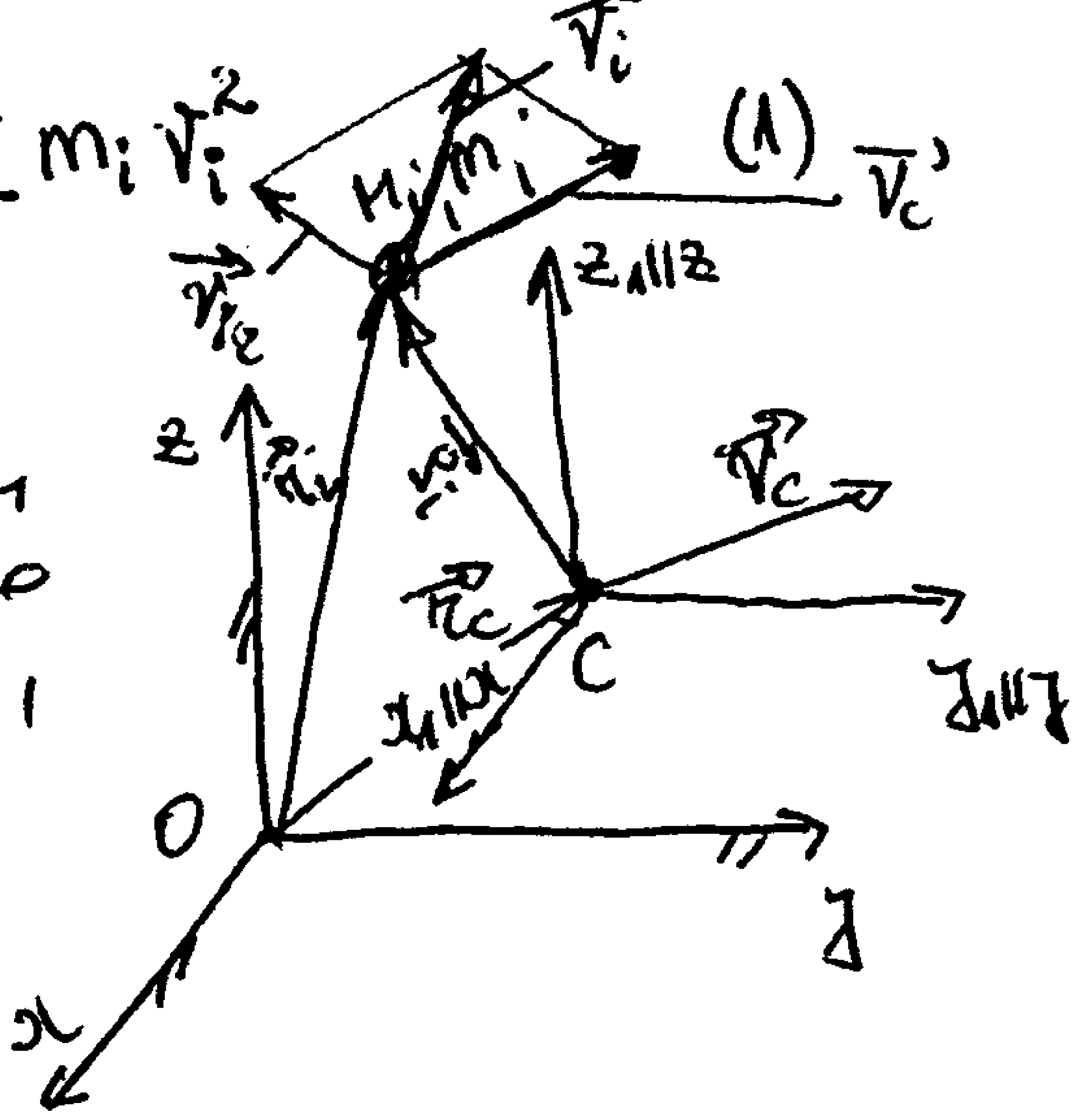
-predavanja i primjeri-

9. Zakon o promjeni kinetičke energije sistema

9.1 Kinetička energija sistema. Kenigova teorema

Kinetička energija sistema E_k jednaka je zbiru kinetičkih energija svih materijalnih tačaka iz kojih se sastoji sistem

$$E_k = \sum E_{ki} = \frac{1}{2}\sum m_i v_i^2 \qquad (1)$$



Posmatrajmo kretanje sistema kako u odnosu na nepokretni koordinatni sistem $Oxyz$ tako i u odnosu na translatorno pokretni koordinatni sistem $Cx_1y_1z_1$ vezan za centar inercije sistema.

$$\vec{r}_i = \vec{r}_c + \vec{\rho}_i \qquad (2)$$

$$\frac{d}{dt}(2) \to \vec{v}_i = \vec{v}_c + \underbrace{\dot{\vec{\rho}}_i}_{\vec{v}_{ir}} \qquad (3)$$

$\vec{v}_{ir}$ – brzina i-te tačke u odnosu na $Cx_1y_1z_1$ (relativna brzina)

$$v_i^2 = \vec{v}_i \cdot \vec{v}_i \overset{(3)}{=} v_c^2 + 2\vec{v}_c \cdot \dot{\vec{\rho}}_i + \dot{\vec{\rho}}_i^{\,2} = v_{ir}^2$$

$$\Rightarrow E_k = \frac{1}{2}\underbrace{(\sum m_i)}_{m} v_c^2 + \vec{v}_c \cdot \underbrace{(\sum m_i \dot{\vec{\rho}}_i)}_{= \frac{d}{dt}\sum m_i \vec{\rho}_i = \frac{d}{dt}(m\cancel{\vec{\rho}_c}^{\,0}) = 0} + \frac{1}{2}\sum m_i v_{ir}^2$$

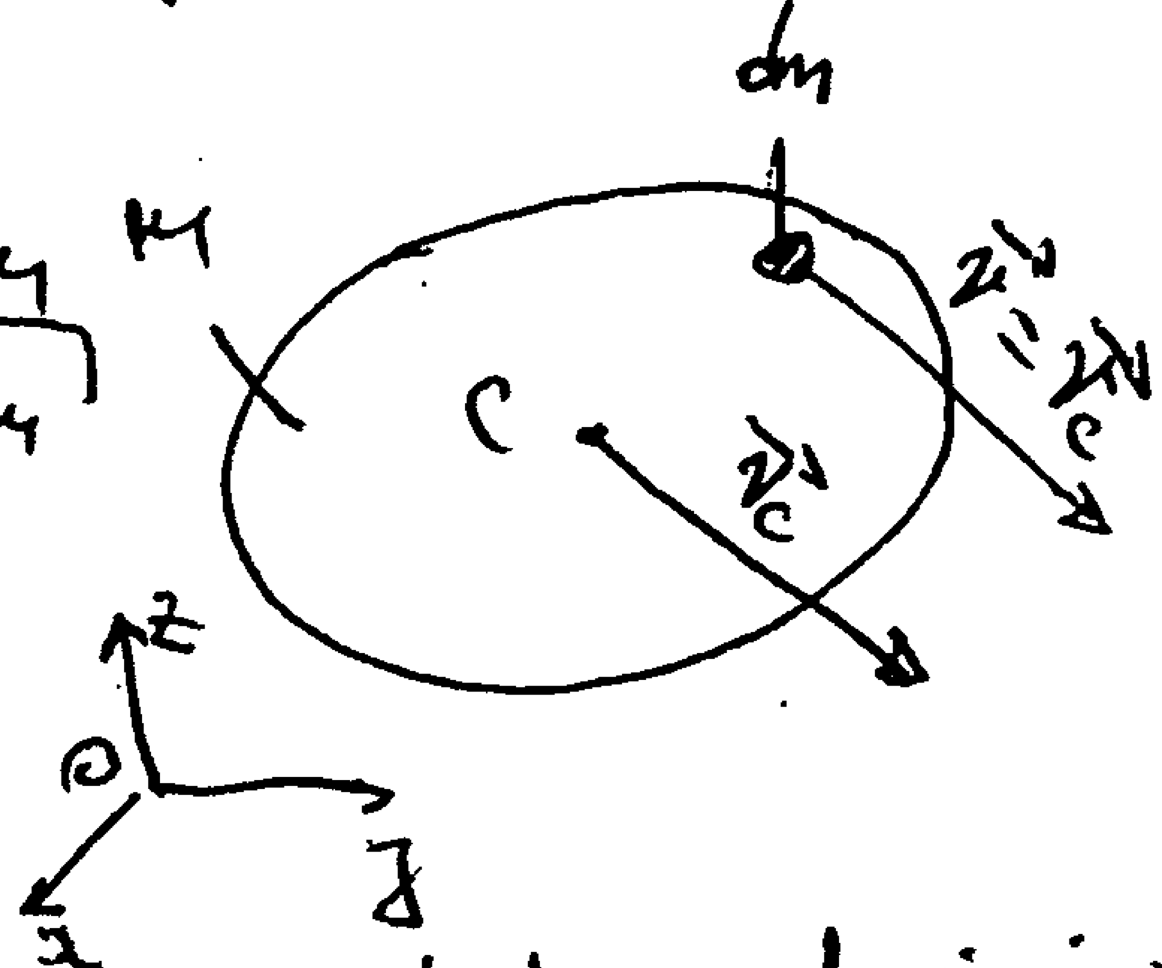
$$\Rightarrow \boxed{E_k = \frac{1}{2} m v_c^2 + E_{kr}, \quad E_{kr} = \frac{1}{2}\sum m_i v_{ir}^2} \qquad (4)$$

Formulom (4) se izražava Kenigova teorema: Kinetička energija sistema jednaka je zbiru kinetičke energije centra inercije, pod pretpostavkom da je u njemu skoncentrisana masa sistema, i kinetičke energije relativnog kretanja u odnosu na translatorno pokretni koordinatni sistem vezan za centar inercije.

9.1.1 Kinetička energija krutog tijela

a) translatorno kretanje

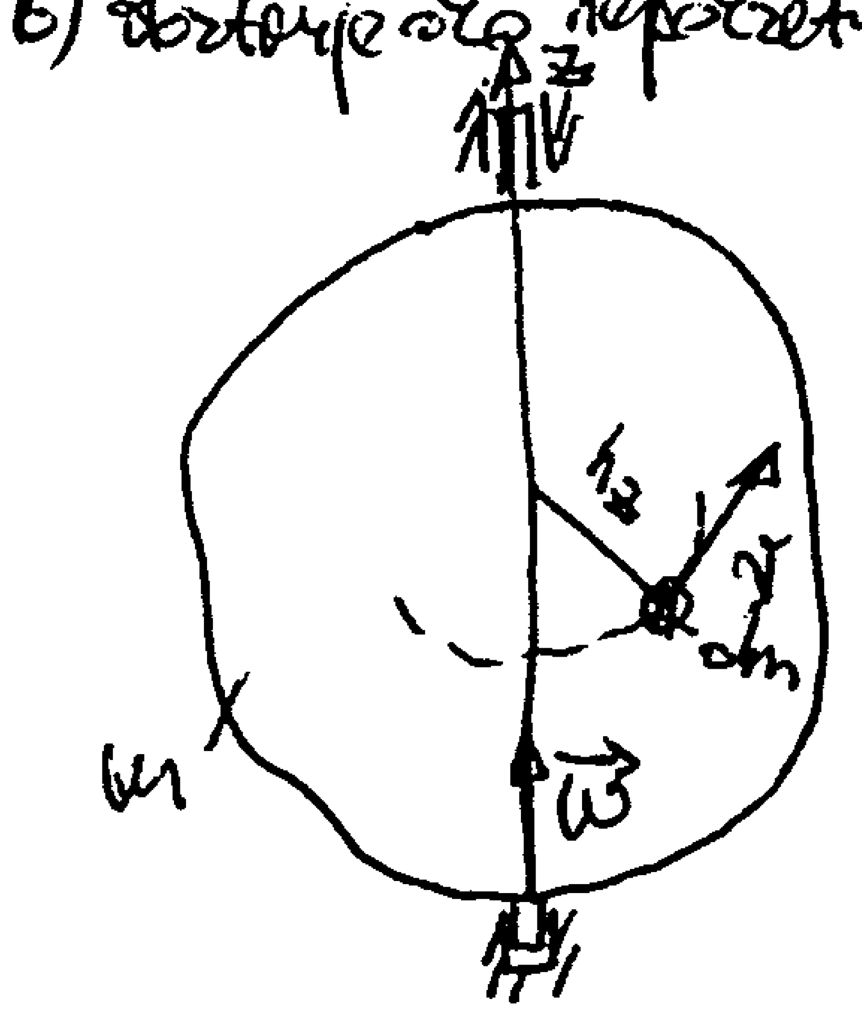
$$E_k = \frac{1}{2}\int_{(m)} v^2\,dm = \frac{1}{2}\int_{(m)} v_c^2\,dm = \frac{1}{2} v_c^2 \underbrace{\int_{(m)} dm}_{=m}$$



$$\boxed{E_k = \frac{1}{2} m v_c^2}$$

Kinetička energija tijela pri translatornom kretanju jednaka je polovini proizvoda mase tijela i kvadrata brzine centra inercije (brzine tijela).

b) obrtanje oko nepokretne ose



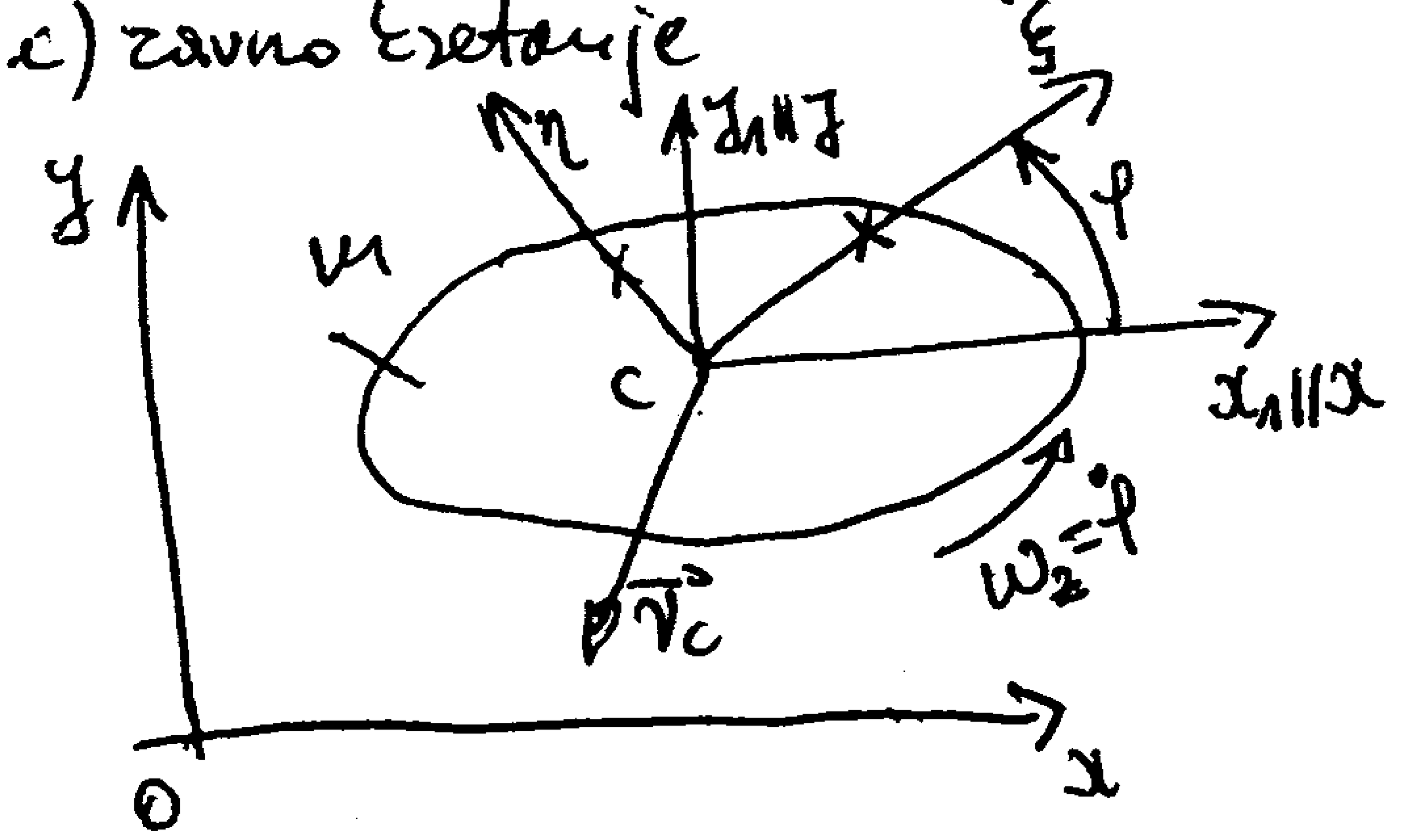
$$dE_k = E_k(dm) = \frac{1}{2}\, dm\, v^2, \quad v^2 = h_z^2 \omega^2$$

$$E_k = \frac{1}{2}\int_{(m)} dm\, v^2 = \frac{1}{2}\,\omega^2 \underbrace{\int_{(m)} h_z^2\, dm}_{= J_z}$$

$$\boxed{E_k = \frac{1}{2} J_z \omega^2}$$

Kinetička energija tijela pri njegovom obrtanju oko nepokretne ose jednaka je polovini proizvoda momenta inercije za obrtnu osu i kvadrata ugaone brzine.

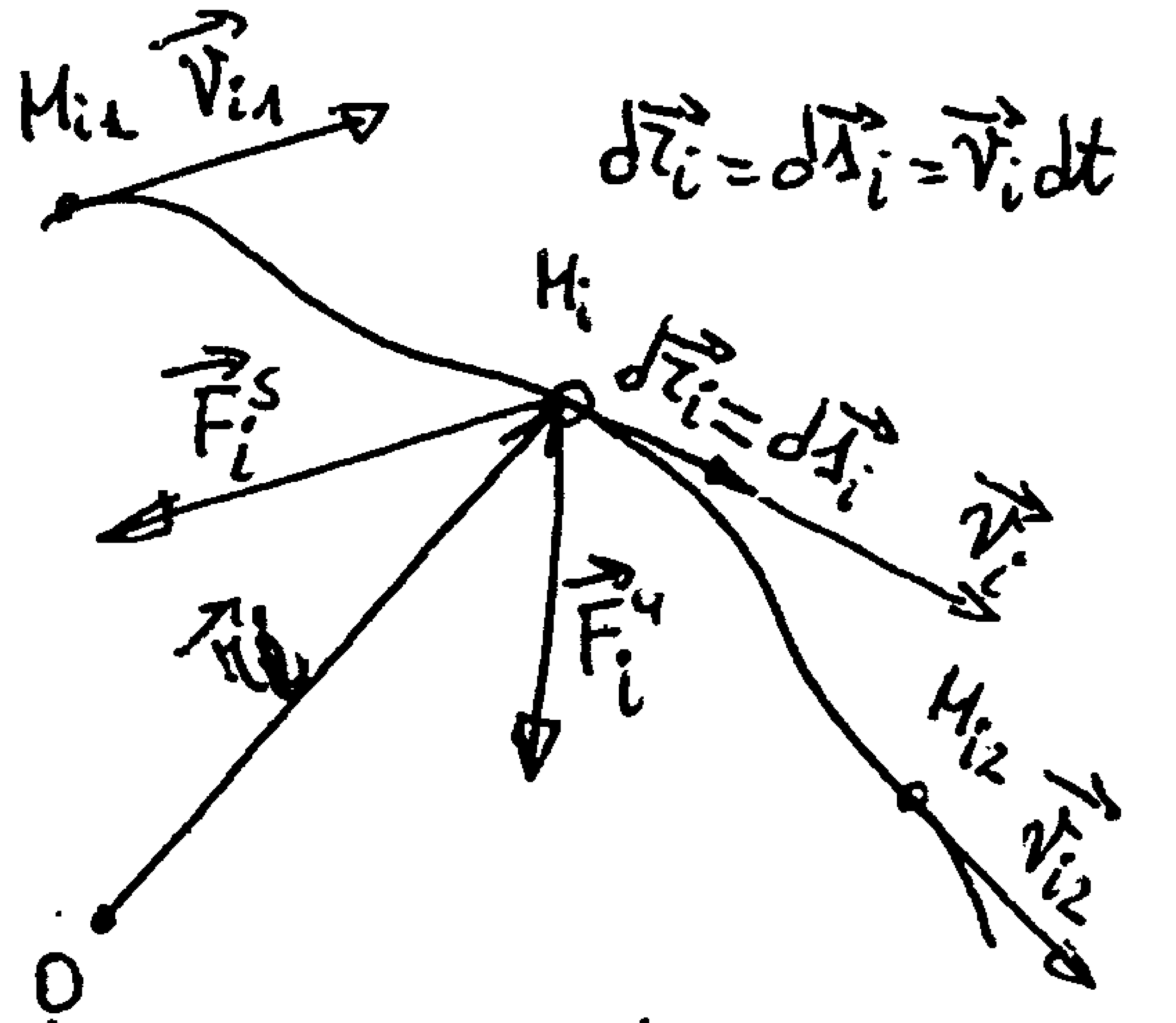
c) ravno kretanje



$$(4) \Rightarrow E_k = \frac{1}{2} m v_C^2 + \frac{1}{2} J_C \omega^2$$

J_C – moment inercije tijela za centralnu osu upravnu na ravan kretanja

9.2 Zakon o promjeni kinetičke energije sistema



Ako na svaku tačku sistema primijenimo diferencijalni oblik zakona o promjeni kinetičke energije materijalne tačke dobićemo

$$dE_{ki} = d'A(\vec{F}_i^s) + d'A(\vec{F}_i^u) \qquad (i = 1, \dots, n)$$

gdje su $d'A(\vec{F}_i^s) = \vec{F}_i^s \cdot d\vec{r}_i$, $d'A(\vec{F}_i^u) = \vec{F}_i^u \cdot d\vec{r}_i$ – elementarni radovi i-te spoljašnje i unutrašnje sile.

Sabirajući ove izraze dobijamo diferencijalni oblik zakona o promjeni kin. en. sistema

$$\boxed{dE_K = d'A^s + d'A^u}, \quad d'A^s = \sum d'A(\vec{F}_i^s), \; d'A^u = \sum d'A(\vec{F}_i^u) \qquad (1)$$

koji glasi: Diferencijal kinetičke energije sistema jednak je zbiru elementarnih radova svih spoljašnjih i unutrašnjih sila, koje djeluju na sistem.

Integracijom jednačine (1) dolazi se do integralnog oblika ovog zakona

$$\boxed{E_{K2} - E_{K1} = A^s_{(1,2)} + A^u_{(1,2)}}, \qquad (2)$$

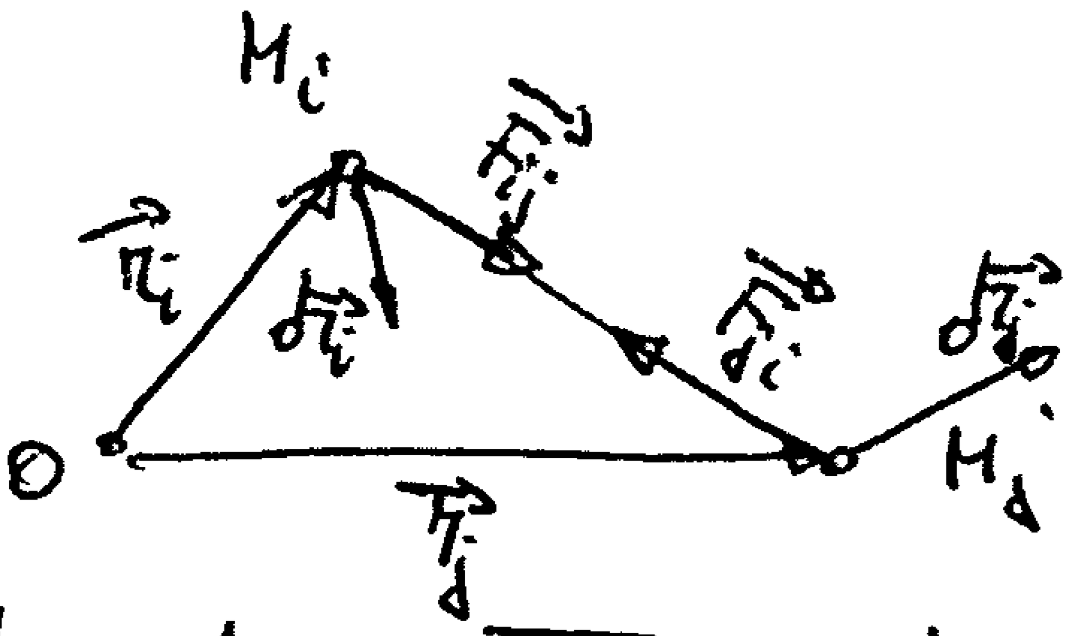
tj. priraštaj kinetičke energije sistema na konačnom pomjeranju jednak je zbiru radova svih spoljašnjih i unutrašnjih sila na odgovarajućim pomjeranjima.

Ako se (1) podijeli sa dt dobija se sledeći alternativni oblik tog zakona

$$\frac{dE_k}{dt} = P^s + P^u, \quad P^s = \sum \vec{F}_i^s \cdot \vec{v}_i, \quad P^u = \sum \vec{F}_i^u \cdot \vec{v}_i \qquad (3)$$

koji glasi: Izvod kinetičke energije sistema po vremenu jednak je zbiru snaga spoljašnjih i unutrašnjih sila.

U opštem slučaju, rad unutrašnjih sila sistema je različit od nule. Ali, u slučaju neizmenljivog sistema, a to je takav sistem kod koga rastojanja između njegovih tačaka ostaju nepromjenljiva tokom kretanja (npr. kruto tijelo), rad unutrašnjih sila jednak je nuli. Zaista, budući da se unutrašnje sile javljaju u parovima međusobno suprotnih sila, za jedan takav par $\vec{F}_{ij}$ i $\vec{F}_{ji}$ biće



$$\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}$$

$$\delta A(\vec{F}_{ij}) + \delta A(\vec{F}_{ji}) = \vec{F}_{ij}\cdot d\vec{r}_i + \vec{F}_{ji}\cdot d\vec{r}_j$$

$$= \vec{F}_{ji}\,(d\vec{r}_j - d\vec{r}_i) = \vec{F}_{ji}\cdot d(\vec{r}_j - \vec{r}_i)$$

$$= \vec{F}_{ji}\cdot d(\overrightarrow{M_iM_j}) = 0,$$ jer je za neizmenljiv sistem $\overline{M_iM_j} = const$, pa je $d(\overrightarrow{M_iM_j}) \perp \overrightarrow{M_iM_j}$

Kada su neke sile $\vec{F}_i$ (bilo spoljašnje ili unutrašnje) konzervativne tada su njihove projekcije na ose Dekartovog koordinatnog sistema:

$$F_{ix} = -\frac{\partial E_p}{\partial x_i}, \quad F_{iy} = -\frac{\partial E_p}{\partial y_i}, \quad F_{iz} = -\frac{\partial E_p}{\partial z_i} \qquad (i=1,\dots,n)$$

gdje je $E_p = E_p(x_1, y_1, z_1, \dots, x_n, y_n, z_n)$ potencijalna energija polja tih sila. Elementarni rad tog sistema sila je

$$\delta A = \sum \vec{F}_i\cdot d\vec{r}_i = -\sum \frac{\partial E_p}{\partial x_i}dx_i + \frac{\partial E_p}{\partial y_i}dy_i + \frac{\partial E_p}{\partial z_i}dz_i = -dE_p,$$

tj. elementarni rad konzervativnih sila jednak je negativnom diferencijalu potencijalne energije.

Kada su sve sile koje vrše rad konzervativne, na osnovu (1) je

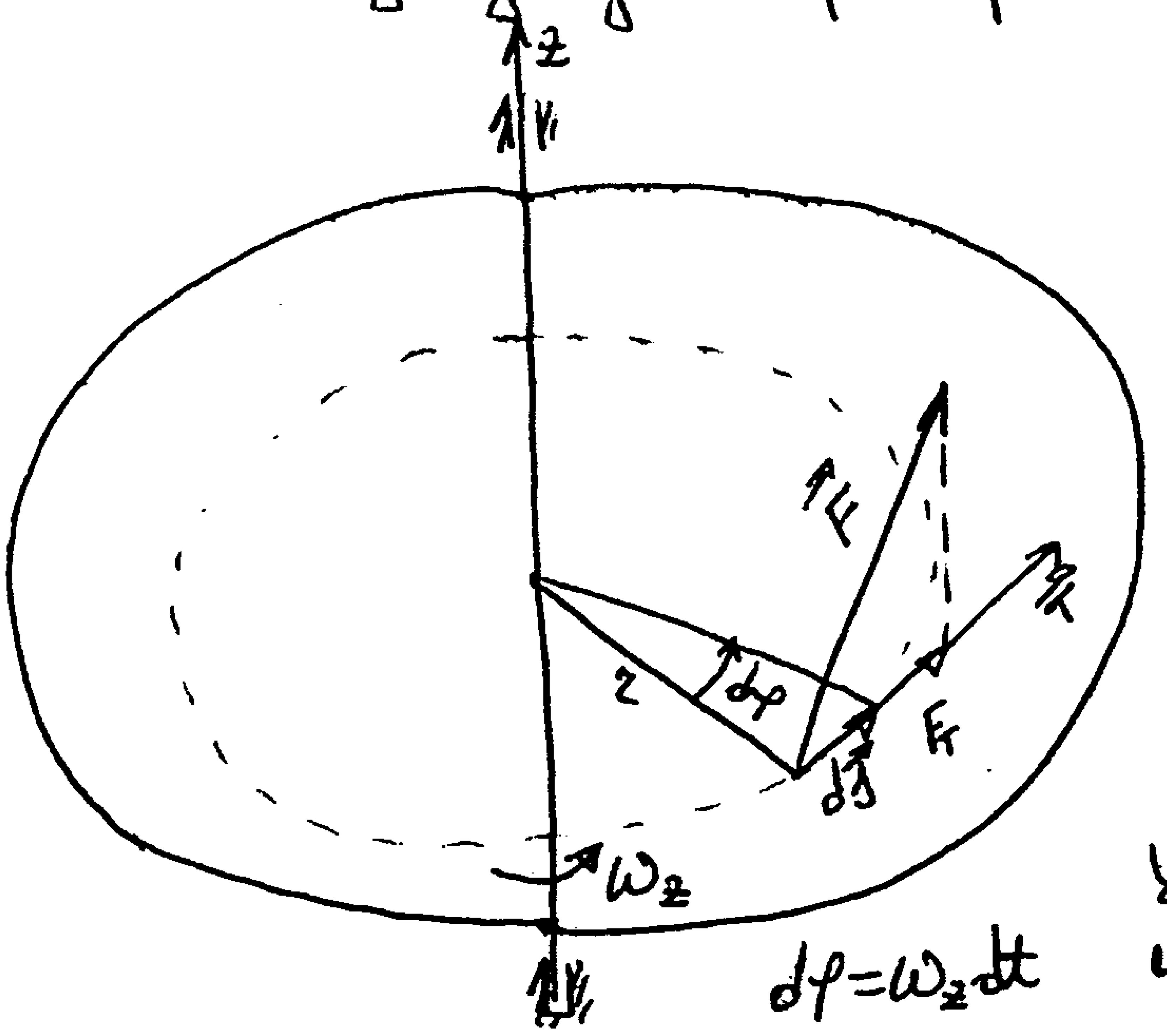
$$d(E_k + E_p) = 0 \iff E_k + E_p = const.,$$

što predstavlja zakon održanja mehaničke energije sistema: Ako su sve sile koje vrše rad konzervativne, ukupna mehanička energija sistema ostaje konstantna tokom kretanja.

Mehanički sistemi za koje važi ovaj zakon zovu se konzervativni sistemi. Takvi su, npr., sistemi čije su sve aktivne sile konzervativne, a veze idealne i nepokretne.

9.3 Neki slučajevi izračunavanja rada

a) Rad sile koja djeluje na tijelo koje se obrće



$$\text{đ}A = \vec{F}\cdot d\vec{s} = F_\tau \, ds$$

$$ds = r\,d\varphi$$

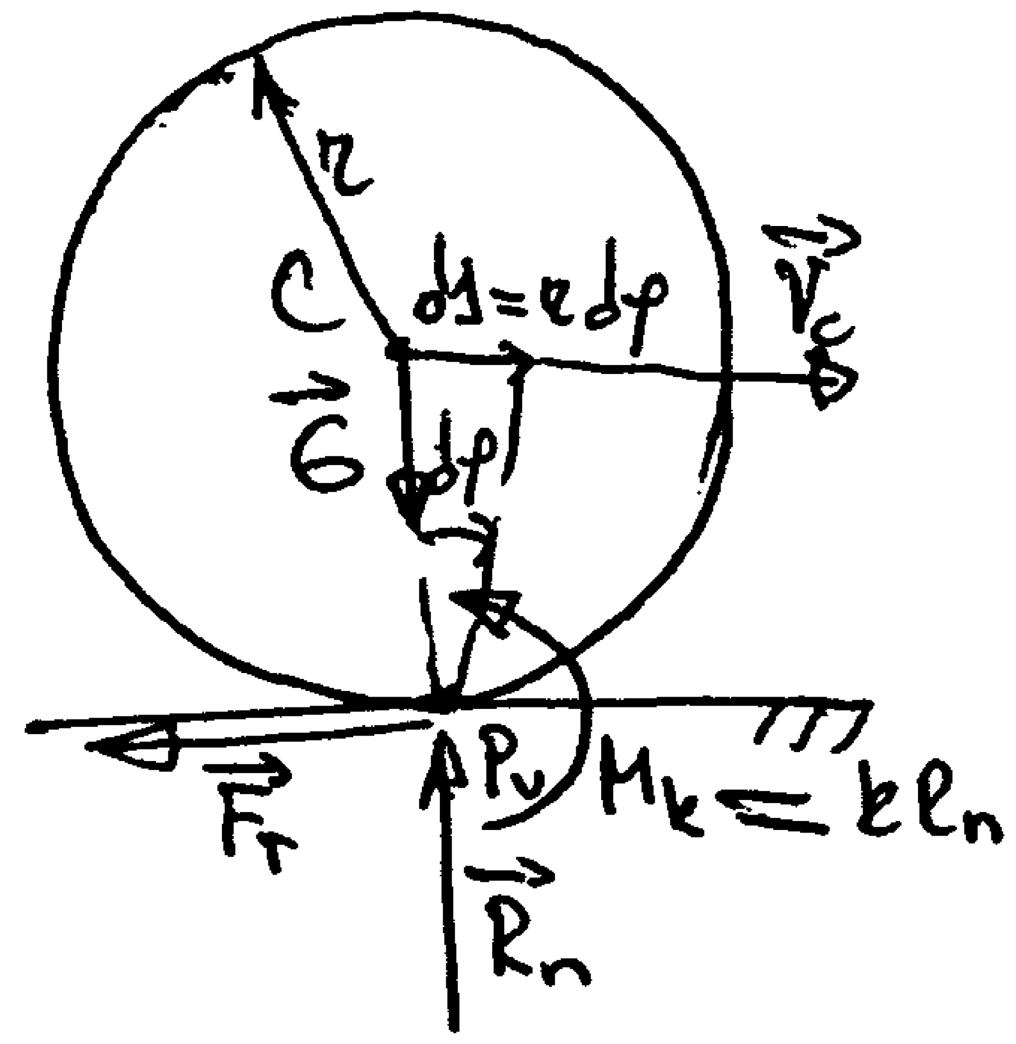
$$\text{đ}A = \underbrace{F_\tau r}_{M_z^{\vec{F}}}\, d\varphi$$

$$\boxed{\text{đ}A = M_z^{\vec{F}}\, d\varphi} \qquad P = \frac{\text{đ}A}{dt} = M_z^{\vec{F}}\,\omega_z$$

$$d\varphi = \omega_z\, dt$$

Elementarni rad sile koja djeluje na tijelo koje se obrće jednak je proizvodu obrtnog momenta i elementarnog ugla obrtanja.

b) Rad sile trenja kada se tijelo kotrlja bez klizanja

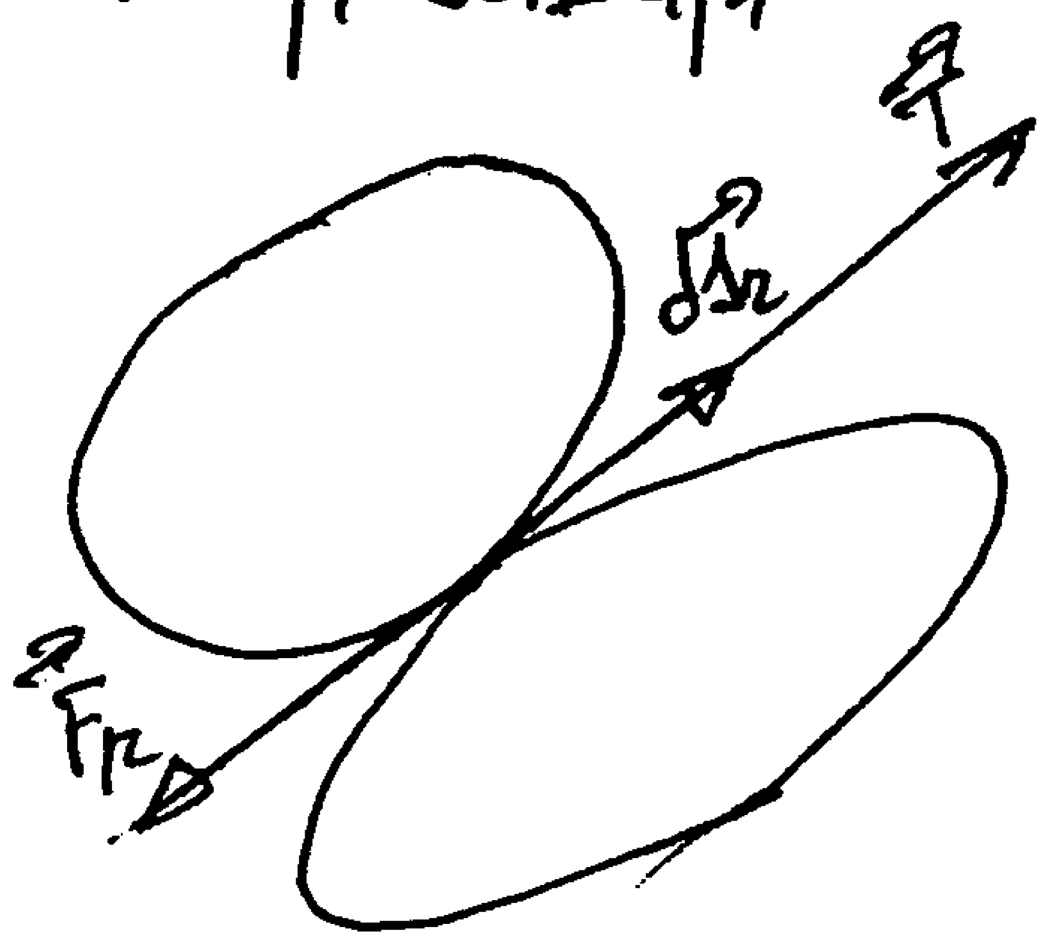


$$\text{đ}A(\vec{F}_T) = \vec{F}_T \cdot \cancelto{0}{d\vec{s}_{P_v}} = 0$$ – pri kotrljanju bez klizanja rad sile trenja je jednak nuli

$$\text{đ}A(M_k) = -M_k\, d\varphi\,, \quad d\varphi = \frac{ds}{r}$$

$$\text{đ}A(M_k) = -k\,\frac{R_n}{r}\, ds$$

c) Rad sile trenja klizanja

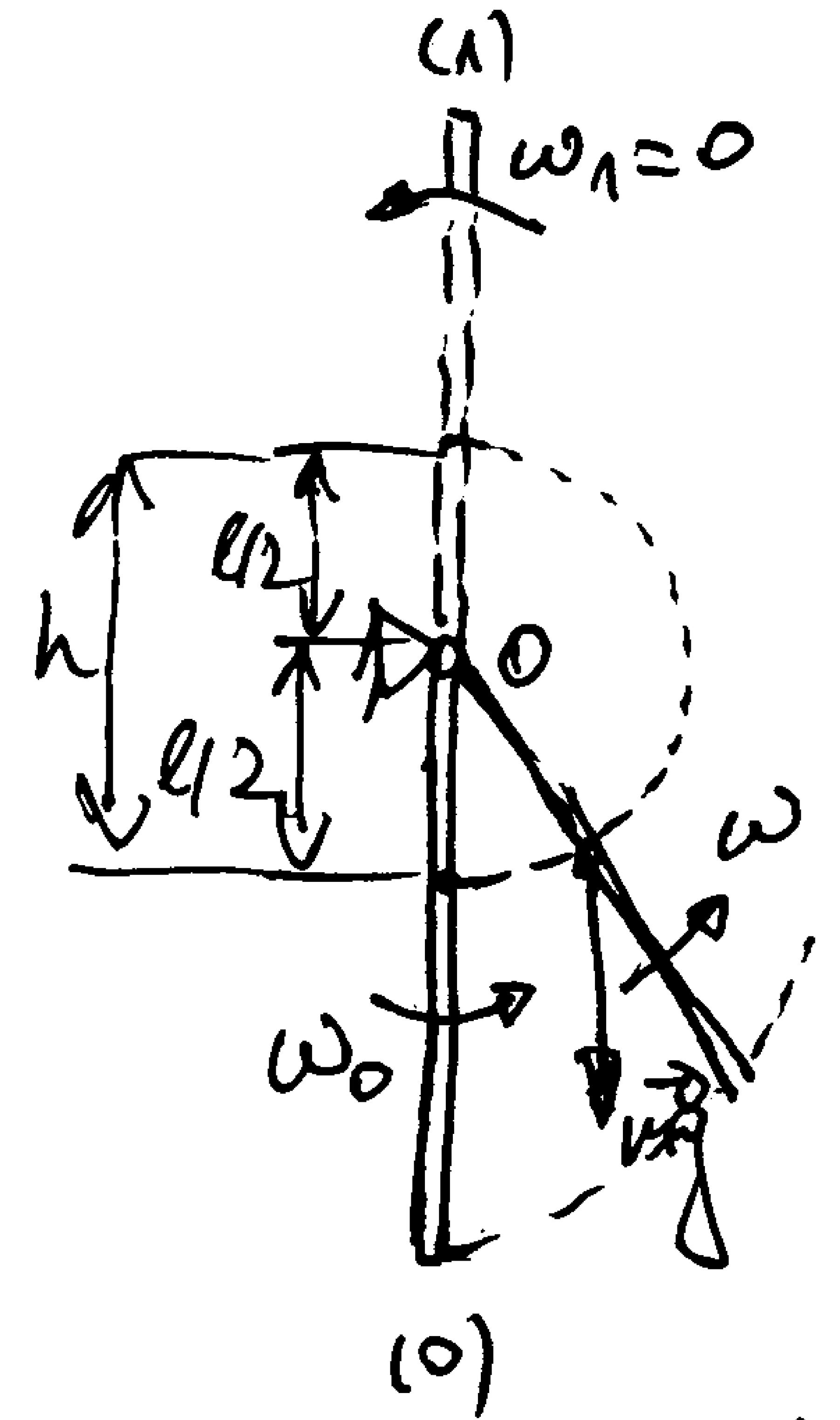


$d\vec{s}_r$ – vektor elementarnog relativnog pomjeranja između dodirujućih tijela

$$\text{đ}A = -F_{tr}\, ds_r$$

– zadaci –

1. Kolika početnu ugaonu brzinu ω_0 treba saopštiti homogenom štapu, mase m i dužine l, u najnižem položaju, da bi on obrćući se oko horizontalne ose O napravio pola obrta.



$$E_k = \frac{1}{2} J_0 \omega^2, \quad J_0 = \frac{ml^2}{3}$$

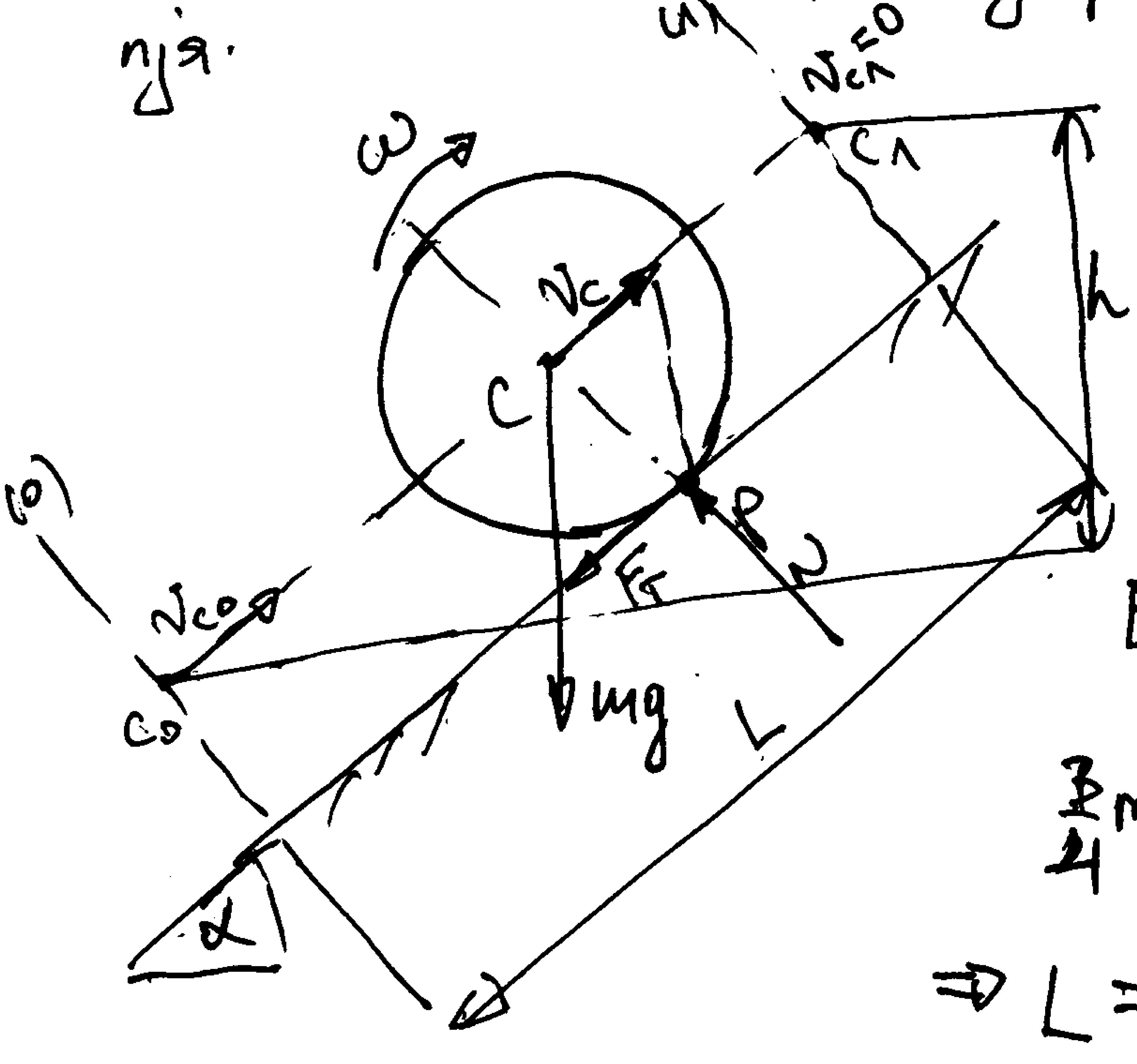
$$E_k = \frac{1}{6} ml^2\omega^2 \; ; \quad A_{(0,1)}(m\vec{g}) = -mgh, \; h = l$$

$$E_{k1} - E_{k0} = A_{(0,1)}(m\vec{g})$$

$$\frac{1}{6} ml^2 \cancel{\omega_1^2} - \frac{1}{6} ml^2\omega_0^2 = -mg \cdot l$$

$$\Rightarrow \quad \omega_0 = \sqrt{6g/l}$$

2. Homogeni disk, mase m i poluprečnika r, kotrlja se bez klizanja uz strmu ravan nagiba $\alpha = 30^\circ$. Početna brzina centra diska je $v_{c0} = 4$ m/s. Odrediti put koji pređe centar C diska do zaustavljanja.



Disk vrši ravno kretanje:

$$E_k = \frac{1}{2} m v_c^2 + \frac{1}{2} J_c \omega^2, \quad J_c = \frac{mr^2}{2}$$

kotrljanje bez klizanja: $v_c = r\omega$

$$\Rightarrow E_k = \frac{3}{4} m v_c^2$$

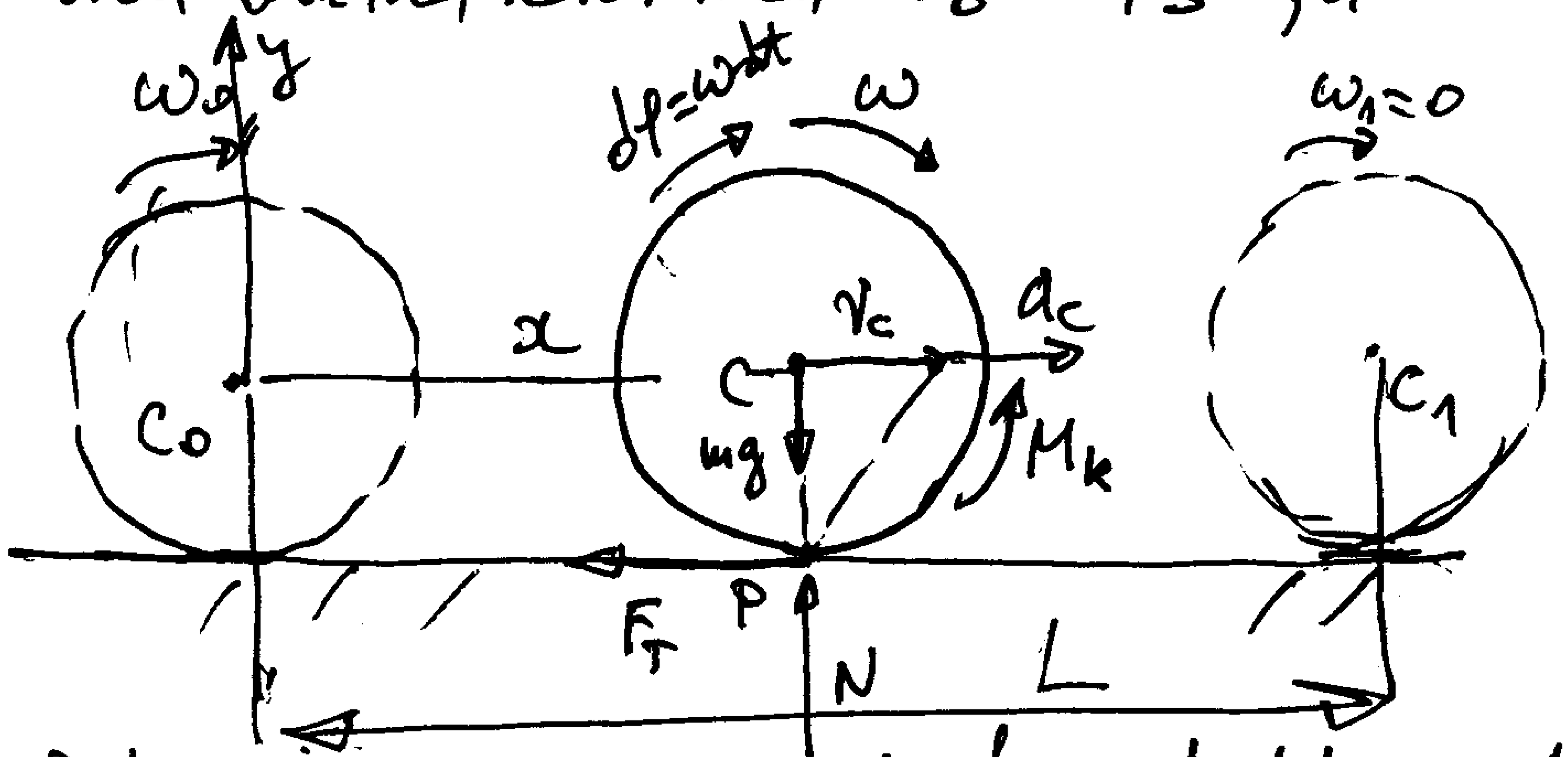
Rad vrši samo sila teže, pa je

$$E_{k1} - E_{k0} = A_{(0,1)}(m\vec{g})$$

$$\frac{3}{4} m \cancel{v_{c1}^2} - \frac{3}{4} m v_{c0}^2 = -mgh, \; h = L\sin\alpha$$

$$\Rightarrow L = \frac{3 v_{c0}^2}{4 g \sin\alpha} = \boxed{2{,}45\,\text{m}}$$

3. Tankozidi cilindar, mase m i poluprečnika $r=0,5\,m$, kotrlja se bez klizanja po horizontalnoj ravni. Odrediti put koji pređe centar C cilindra do zaustavljanja, ako je u početnom trenutku ugaona brzina cilindra $\omega_0 = 4\,s^{-1}$, a krak trenja kotrljanja $k=0,01\,m$.



$$E_k = \frac{1}{2} m v_c^2 + \frac{1}{2} J_c \omega^2$$

$J_c = m r^2$ (masa raspoređena po obimu)

$v_c = r\omega$

$$\Rightarrow E_k = m r^2 \omega^2$$

Rad vrši samo moment otpora kotrljanju M_k. $M_k = kN$, $N=?$

$$m\vec{a}_c = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_T$$

$$y: \quad 0 = -mg + N \Rightarrow N = mg \Rightarrow \boxed{M_k = kmg}$$

$$E_{k1} - E_{k0} = A_{(0,1)}(M_k)$$

$$E_{k1} = m r^2 \omega_1^2 = 0, \qquad E_{k0} = m r^2 \omega_0^2$$

$$dA(M_k) = -M_k\, d\varphi \, ; \qquad v_c = \dot{x} = r\omega \Rightarrow dx = r\omega dt = r\,d\varphi$$

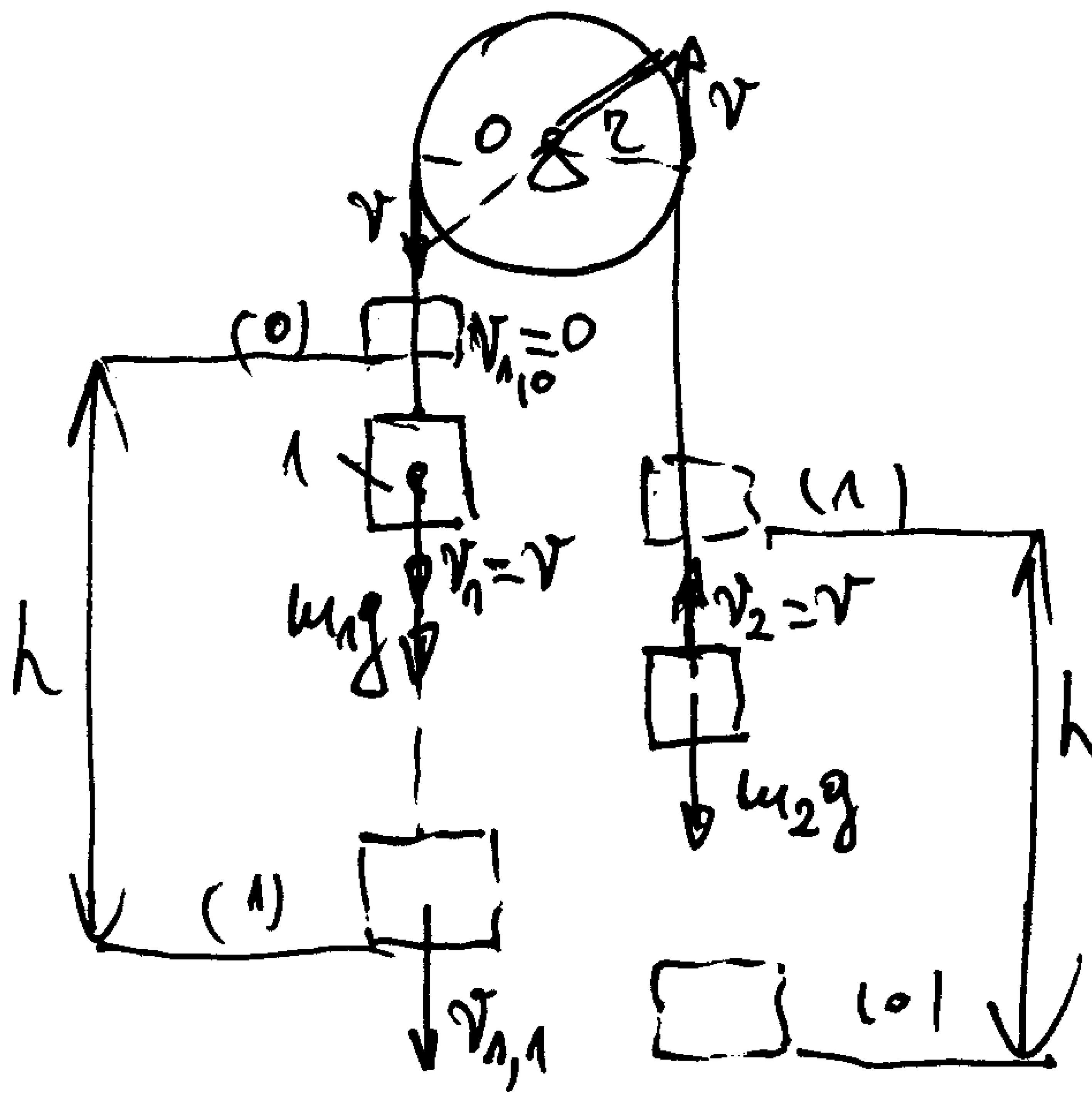
$$d\varphi = \frac{dx}{r}$$

$$dA(M_k) = -kmg \frac{dx}{r}$$

$$A_{(0,1)}(M_k) = \int_0^L -kmg \frac{dx}{R} = -\frac{kmgL}{r}$$

$$\Rightarrow \quad -m r^2 \omega_0^2 = -\frac{kmgL}{r} \Rightarrow L = \frac{r^3 \omega_0^2}{kg} = 20,4\,m$$

4. Tereti 1 i 2, mase $m_1 = 2$ kg i $m_2 = 1$ kg, obješeni su za krajeve neistegljivog konopca prebačenog preko kotura koji se može okretati oko nepokretne horizontalne osi. Zanemarujući masu kotura, odrediti brzinu tereta 1 u trenutku kada se spusti za visinu $h = 3$ m. Kretanje je počelo iz mira.



$$E_k = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2$$

$$v_2 = v_1 = v$$

$$E_k = \frac{1}{2}(m_1 + m_2) v^2$$

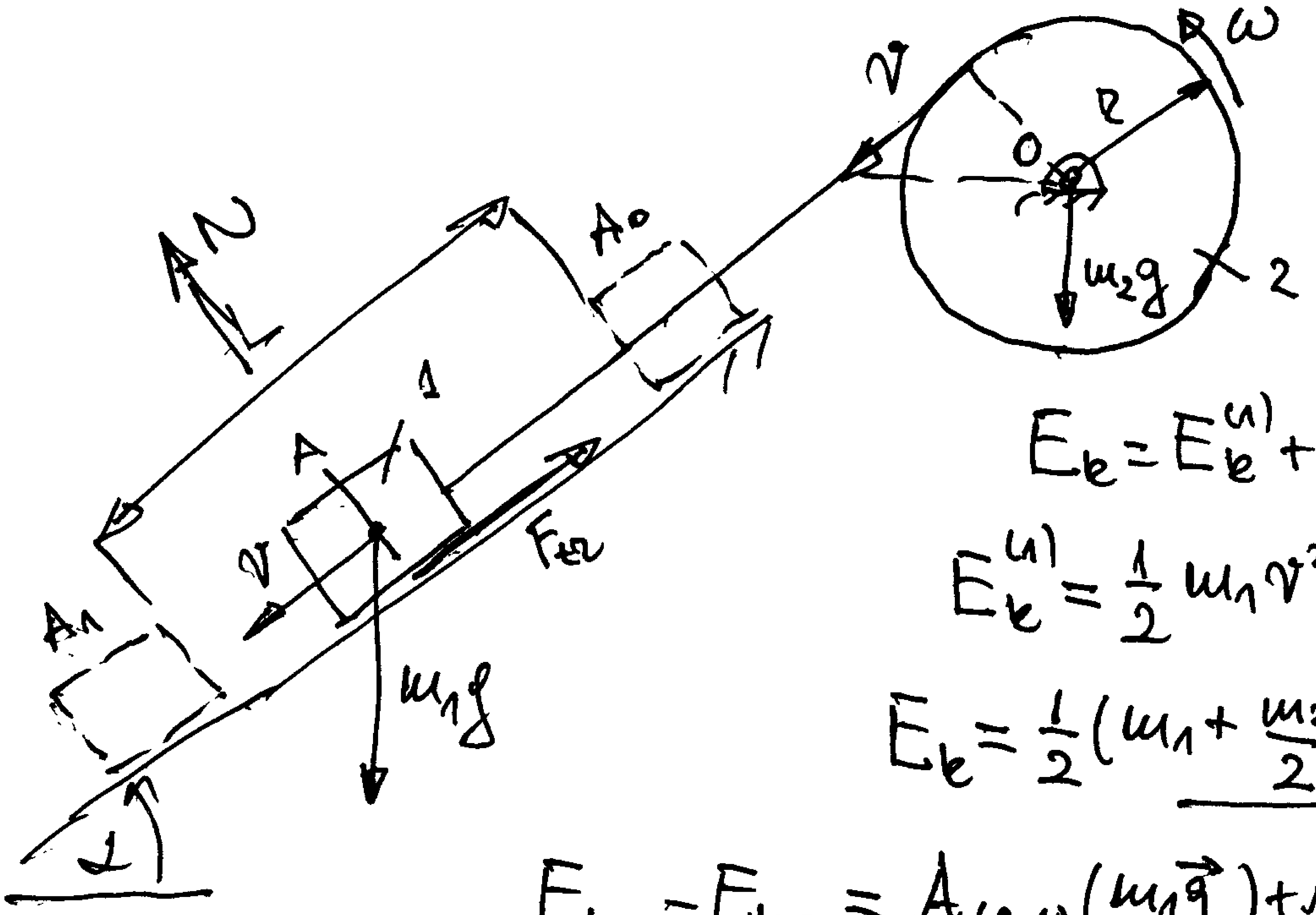
$$\underset{\frac{m_1+m_2}{2} v_{1,1}^2}{\underset{\|}{E_{k1}}} - \underset{0}{\underset{\|}{\cancel{E_{k0}}}} = \underset{m_1 g h}{\underset{\|}{A_{(0,1)}(m_1 \vec{g})}} + \underset{-m_2 g h}{\underset{\|}{A_{(0,1)}(m_2 \vec{g})}}$$

$$v_{1,1} = \sqrt{\frac{2(m_1 - m_2) g h}{m_1 + m_2}} = 4{,}43 \frac{m}{s}$$

5. Uraditi prethodni zadatak smatrajući da je kotur homogeni kružni disk mase $m_3 = 1$ kg i poluprečnika $R = 10$ cm.

R. $v_{1,1} = 4{,}1$ m/s

6. Sanduk mase m_1 koji može da se kreće po strmoj ravni nagiba α, vezan je za neistegljivo uže čiji je drugi kraj namotan na kotur (homogeni kružni disk mase m_2 i poluprečnika r) koji se može obrtati oko nepokretne horizontalne ose O. a) Napisati kinetičku energiju sistema kao funkciju brzine v sanduka. b) Ako je koeficijent trenja između sanduka i strme ravni μ, odrediti brzinu sanduka nakon što on počevši kretanje iz mirovanja pređe niz strmu ravan put dužine L. Dato je $m_1 = 50\,kg$, $m_2 = 20\,kg$, $\alpha = 30^\circ$, $\mu = 0{,}2$; $L = 2m$



$$v = r\omega$$
$$\omega = \frac{v}{r} \quad (*)$$

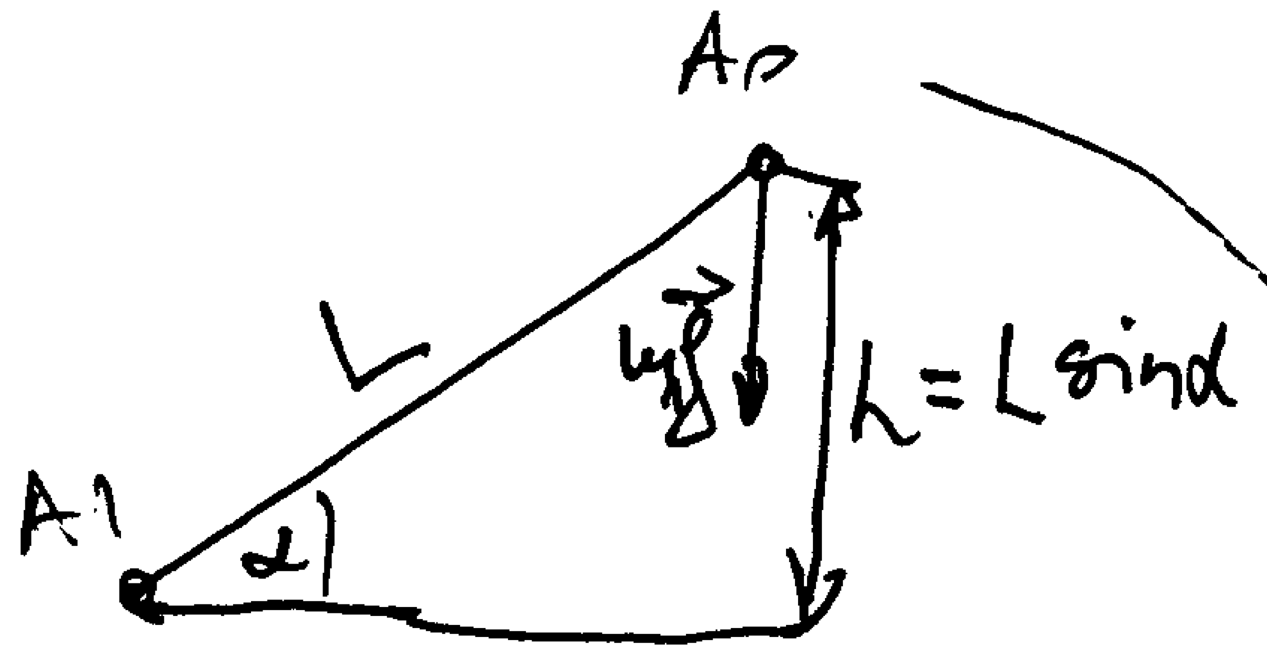
$$E_k = E_k^{(1)} + E_k^{(2)}$$

$$E_k^{(1)} = \frac{1}{2} m_1 v^2; \quad E_k^{(2)} = \frac{1}{2} J_O \omega^2, \quad J_O = \frac{m_2 r^2}{2}$$

$$E_k = \frac{1}{2}\left(m_1 + \frac{m_2}{2}\right) v^2$$

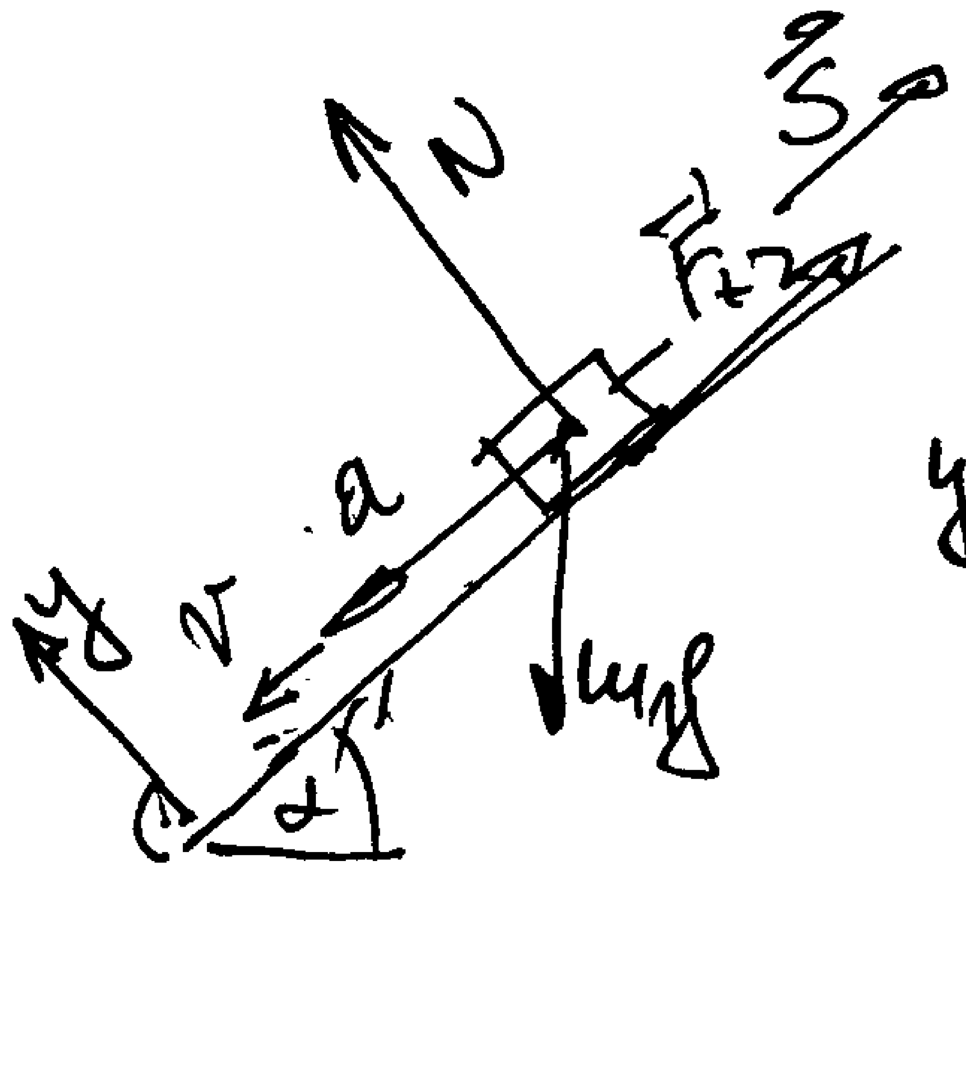
$$E_{k1} - E_{k0} = A_{(0,1)}(m_1 \vec{g}) + A_{(0,1)}(\vec{F}_{tr})$$

$$A_{(0,1)}(m_1\vec{g}) = m_1 g h = m_1 g L \sin\alpha$$



$$\frac{1}{2}\left(m_1 + \frac{m_2}{2}\right) v_1^2 - \frac{1}{2}\left(m_1 + \frac{m_2}{2}\right) \cancel{v_0^2}^{\,0} = m_1 g L \sin\alpha - \mu m_1 g L \cos\alpha$$

$$v_1 = \sqrt{\frac{2 m_1 g L (\sin\alpha - \mu\cos\alpha)}{m_1 + m_2/2}} = 3{,}27\ \frac{m}{s}$$

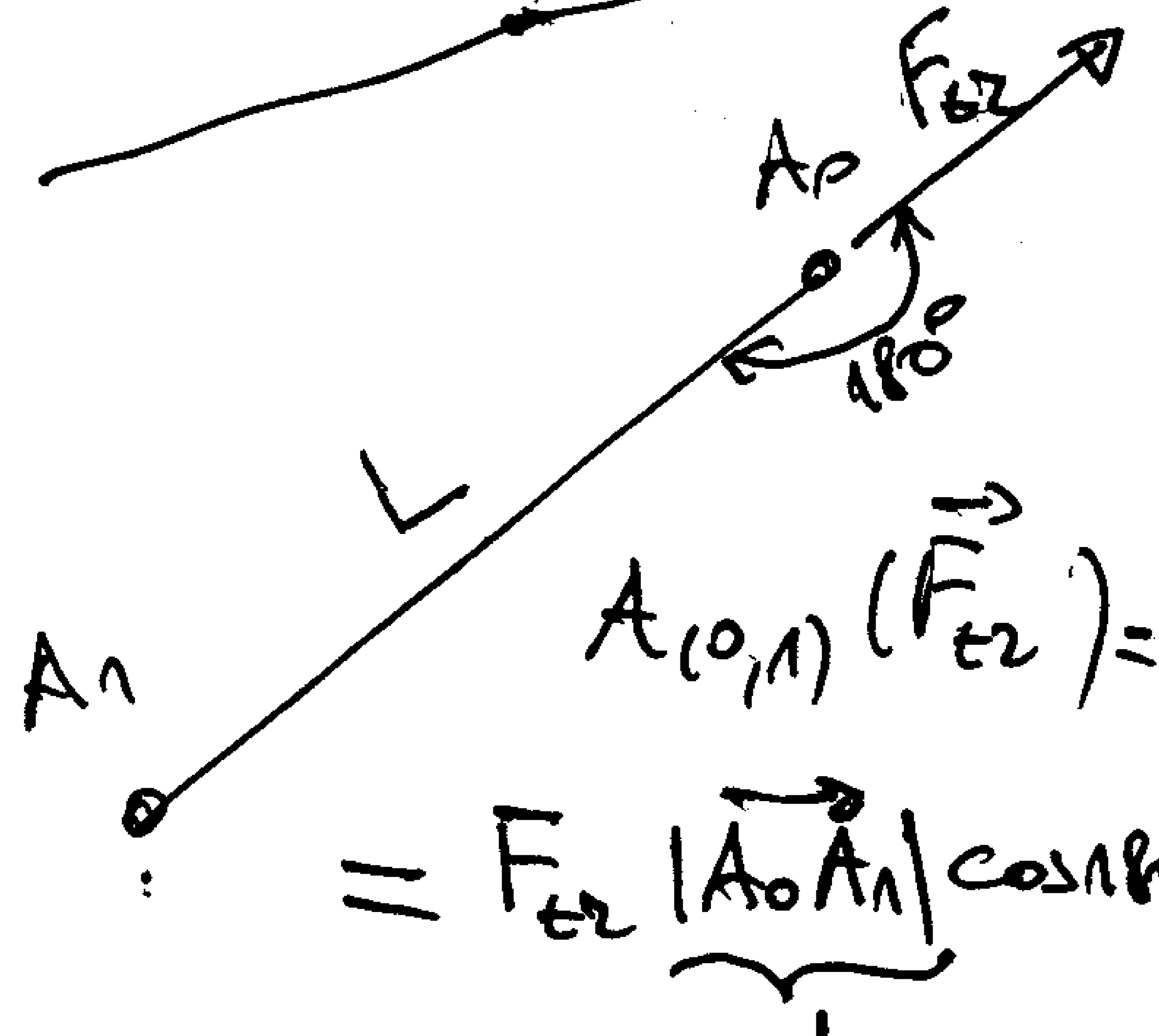


$$m_1 \vec{a} = m_1\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{tr} + \vec{S}$$

$$y: \quad 0 = -m_1 g\cos\alpha + N$$

$$N = m_1 g \cos\alpha$$

$$F_{tr} = \mu N = \mu m_1 g \cos\alpha = const$$

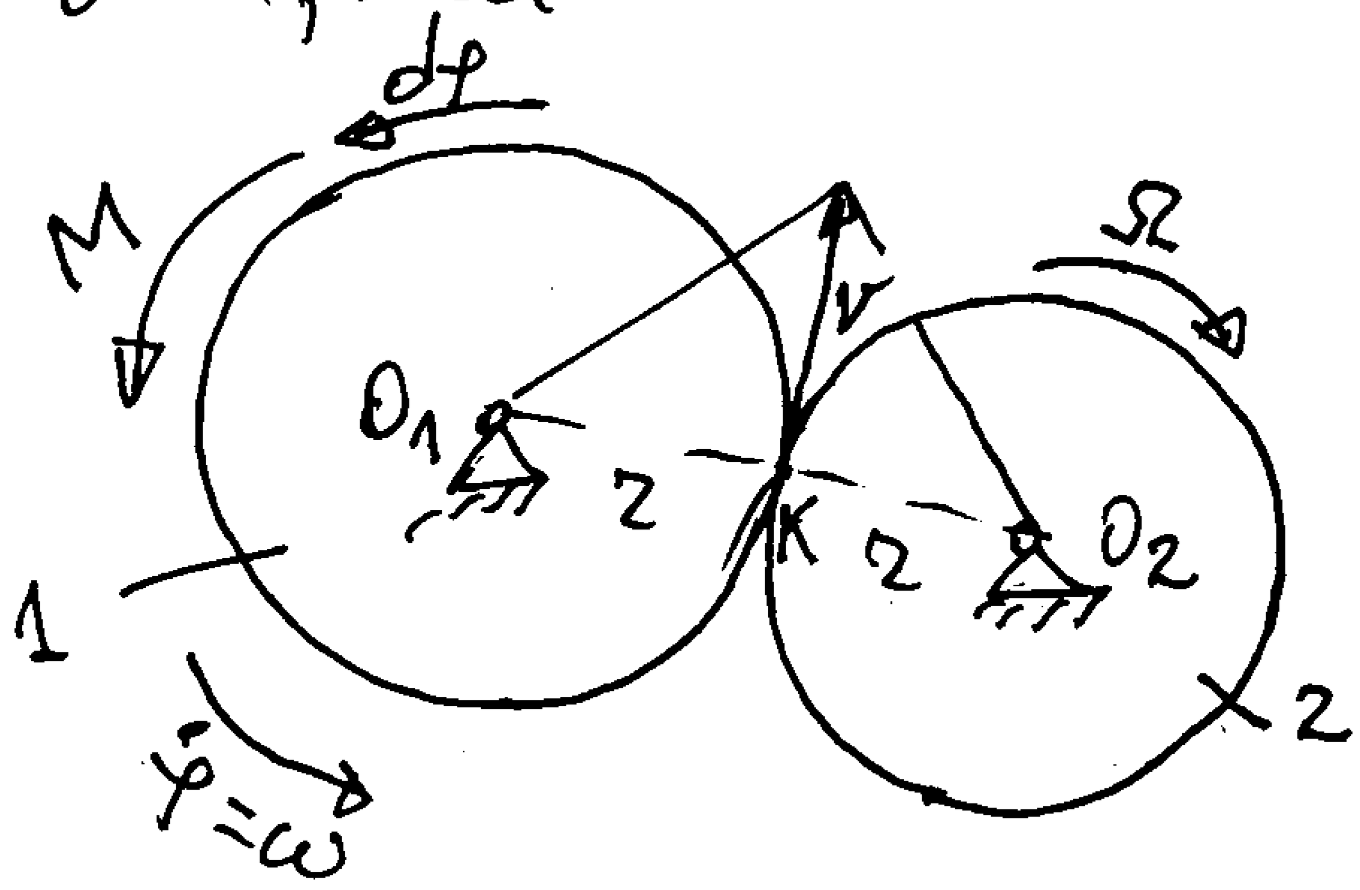


$$A_{(0,1)}(\vec{F}_{tr}) = \vec{F}_{tr} \cdot \overrightarrow{A_0 A_1}$$

$$= F_{tr}\,\underbrace{|\overrightarrow{A_0 A_1}|}_{L}\cos 180^\circ$$

$$= -\mu m_1 g L \cos\alpha$$

7. Dva identična, međusobno spregnuta, zupčanika, svaki mase $m = 2\,kg$, dovode se u kretanje iz mirovanja dejstvom konstantnog obrtnog momenta $M = 1\,Nm$. Odrediti ugaonu brzinu zupčanika nakon dva obrta, ako je poluprečnik inercije svakog od njih za obrtne ose $i = 0,2\,m$.



$$\left.\begin{array}{l} v = r\omega \\ v = r\Omega \end{array}\right\} \Rightarrow \Omega = \omega$$

$$E_k = \frac{1}{2} J_{O_1}\omega^2 + \frac{1}{2} J_{O_2}\Omega^2$$

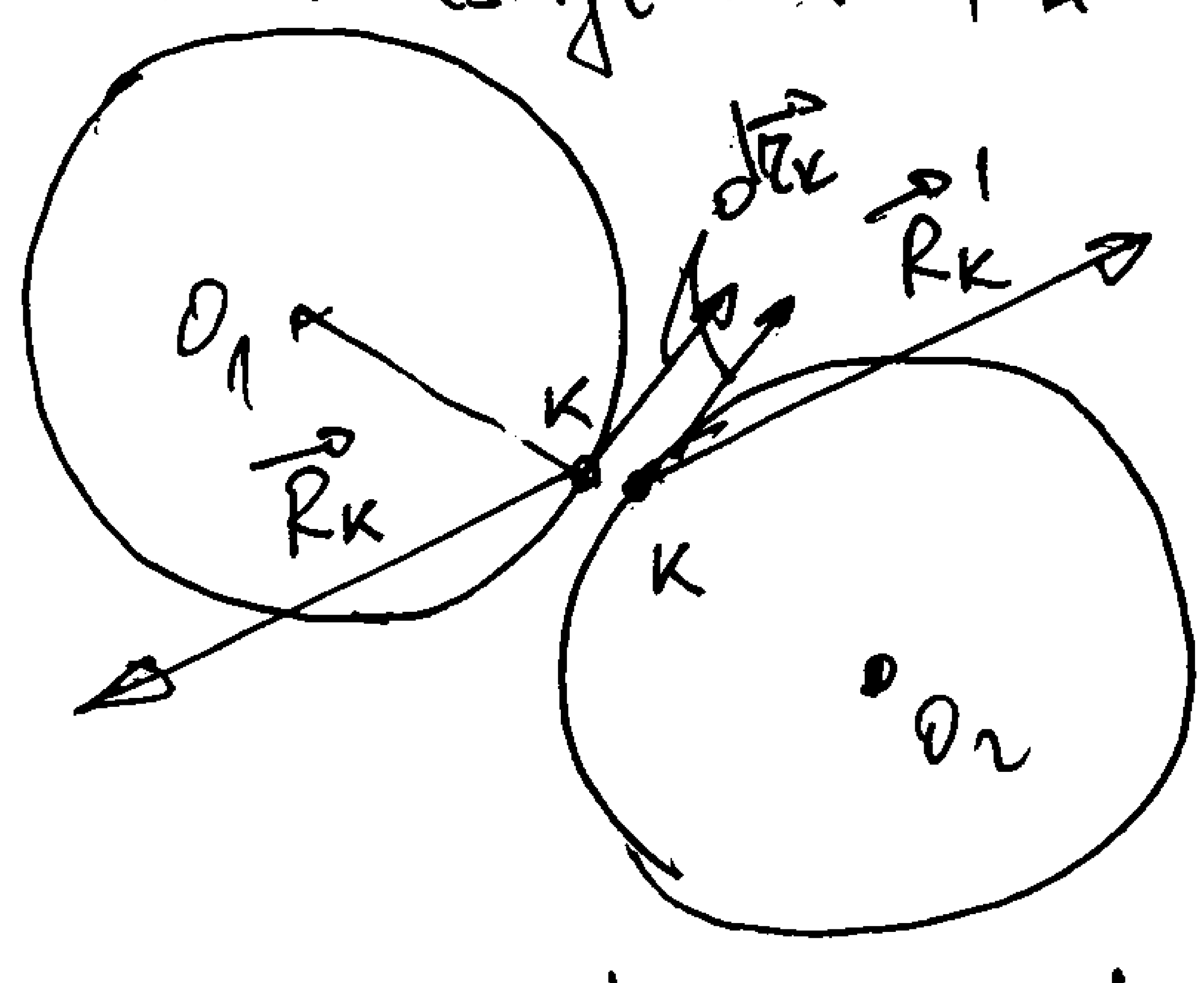
$$J_{O_1} = J_{O_2} = m i^2$$

$$E_k = m i^2 \omega^2$$

$$E_{k1} - E_{k0} = A_{(0,1)}(M) \; ; \quad đA(M) = M\,d\varphi \; ; \quad A_{(0,1)}(M) = \int_0^{4\pi} M\,d\varphi = 4M\pi$$

$$m i^2 \omega_1^2 - m i^2 \underbrace{\omega_0^2}_{0} = 4M\pi \Rightarrow \omega_1 = \sqrt{\frac{4M\pi}{m i^2}} = 12,53\ s^{-1}$$

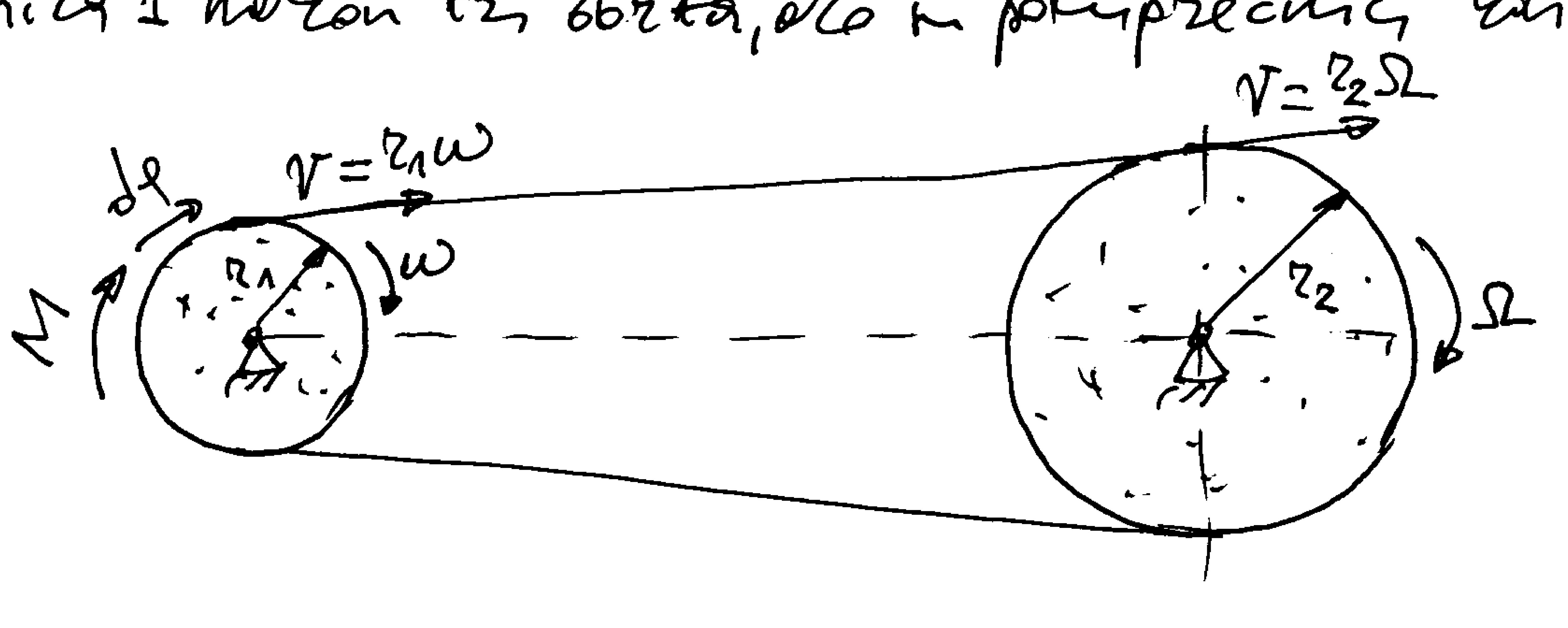
N: Rad unutrašnjih sila u tački dodira $\vec{R}_K$ i $\vec{R}'_K$ je jednak nuli jer nema proklizavanja između dodirnih tačaka.



$$\vec{R}'_K = -\vec{R}_K$$

$$đA(\vec{R}_K) + đA(\vec{R}'_K) = \vec{R}_K \cdot d\vec{r}_K + \vec{R}'_K\, d\vec{r}_K = \vec{R}_K \cdot d\vec{r}_K - \vec{R}_K\, d\vec{r}_K \equiv 0$$

8. Kaišni prenosnik počinje kretanje iz mira pod dejstvom konstantnog sprega sila momenta $M = 2,5\,Nm$. Momenti inercije kaišnika u odnosu na njihove ose obrtanja su $J_2 = 2J_1 = 1\,kgm^2$. Odrediti ugaonu brzinu kaišnika 1 nakon tri obrta, ako su poluprečnici kaišnika $r_2 = 2R_1$.



$$r_1\omega = r_2\Omega \Rightarrow \Omega = \frac{r_1}{r_2}\omega = \frac{r_1}{2r_1}\omega = \frac{1}{2}\omega$$

$$E_k = \frac{1}{2}J_1\omega^2 + \frac{1}{2}J_2\Omega^2 = \frac{3}{4}J_1\omega^2$$

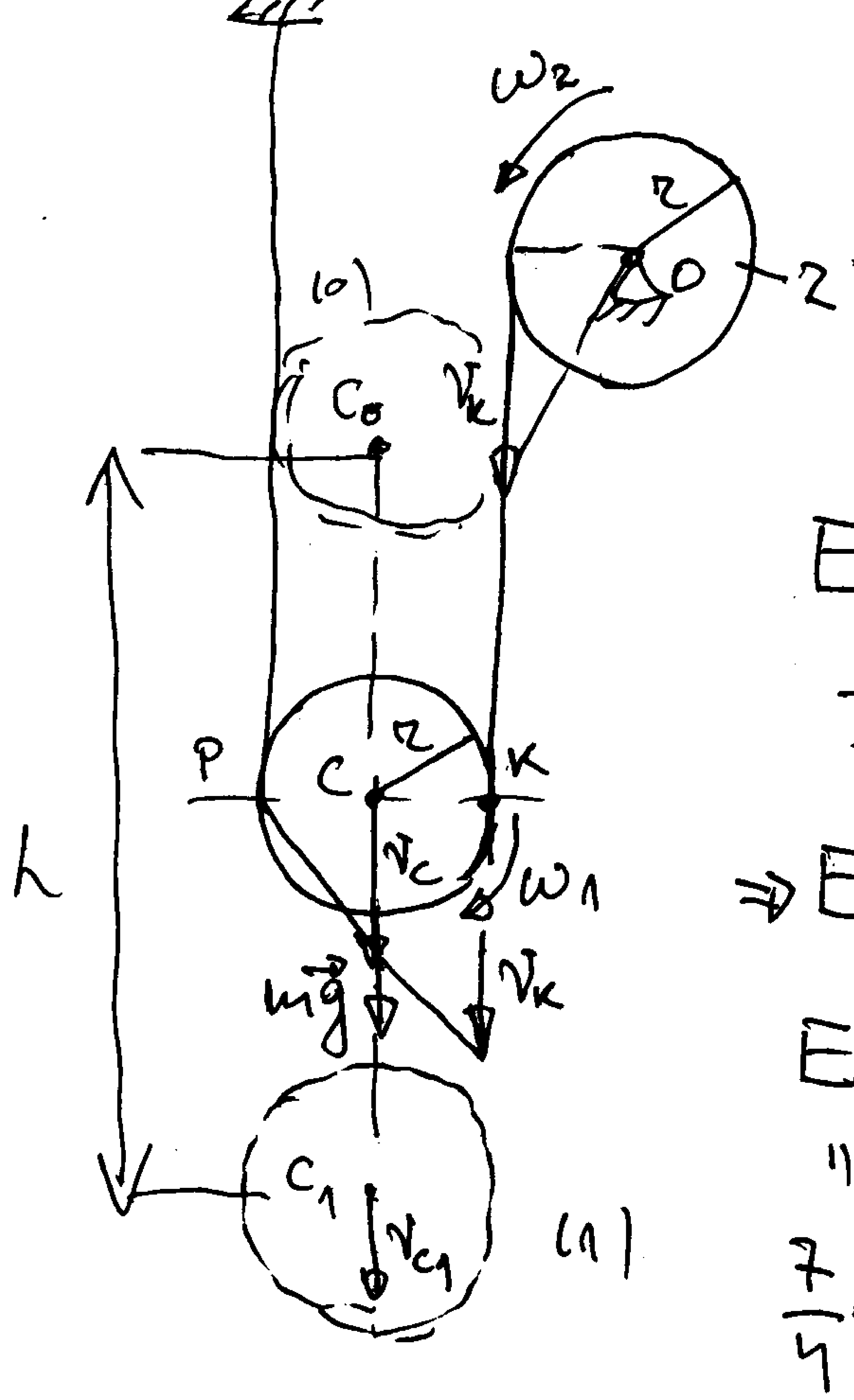
$$dA = M\,d\varphi, \quad A_{(0,1)}(M) = \int_0^{6\pi} M\,d\varphi = 6\pi M$$

$$E_{k1} - \cancel{E_{k0}}^{0} = A_{(0,1)}(M)$$

$$\frac{3}{4}J_1\omega_1^2 = 6\pi M \Rightarrow \omega_1 = \sqrt{\frac{8\pi M}{J_1}} = 11{,}2\ s^{-1}$$

N. Kaiš se smatra neistegljivim, pa je rad sila u kaišu jednak nuli.

9. Identični kotur ovi 1 i 2, mase m i poluprečnika r, koji se mogu smatrati homogenim kružnim diskovima, počinju kretanje iz mira u vertikalnoj ravni pod dejstvom sile teže. Uže koje je namotano na kotur 2 i prebačeno preko kotura 1 je neistegljivo (v. sliku). Odrediti brzinu centra C kotura 1 nakon što se on spusti za $h = 1$ m.



– Kotur 1 izvodi ravno kretanje, a 2 obrtanje oko nepokretne ose.

$$v_K = 2v_C, \quad v_C = r\omega_1 \rightarrow \omega_1 = \frac{v_C}{r}$$

$$v_K = r\omega_2 \Rightarrow \omega_2 = \frac{2v_C}{r}$$

$$E_k = \frac{1}{2}mv_C^2 + \frac{1}{2}J_C\omega_1^2 + \frac{1}{2}J_O\omega_2^2$$

$$J_C = J_O = \frac{mr^2}{2}$$

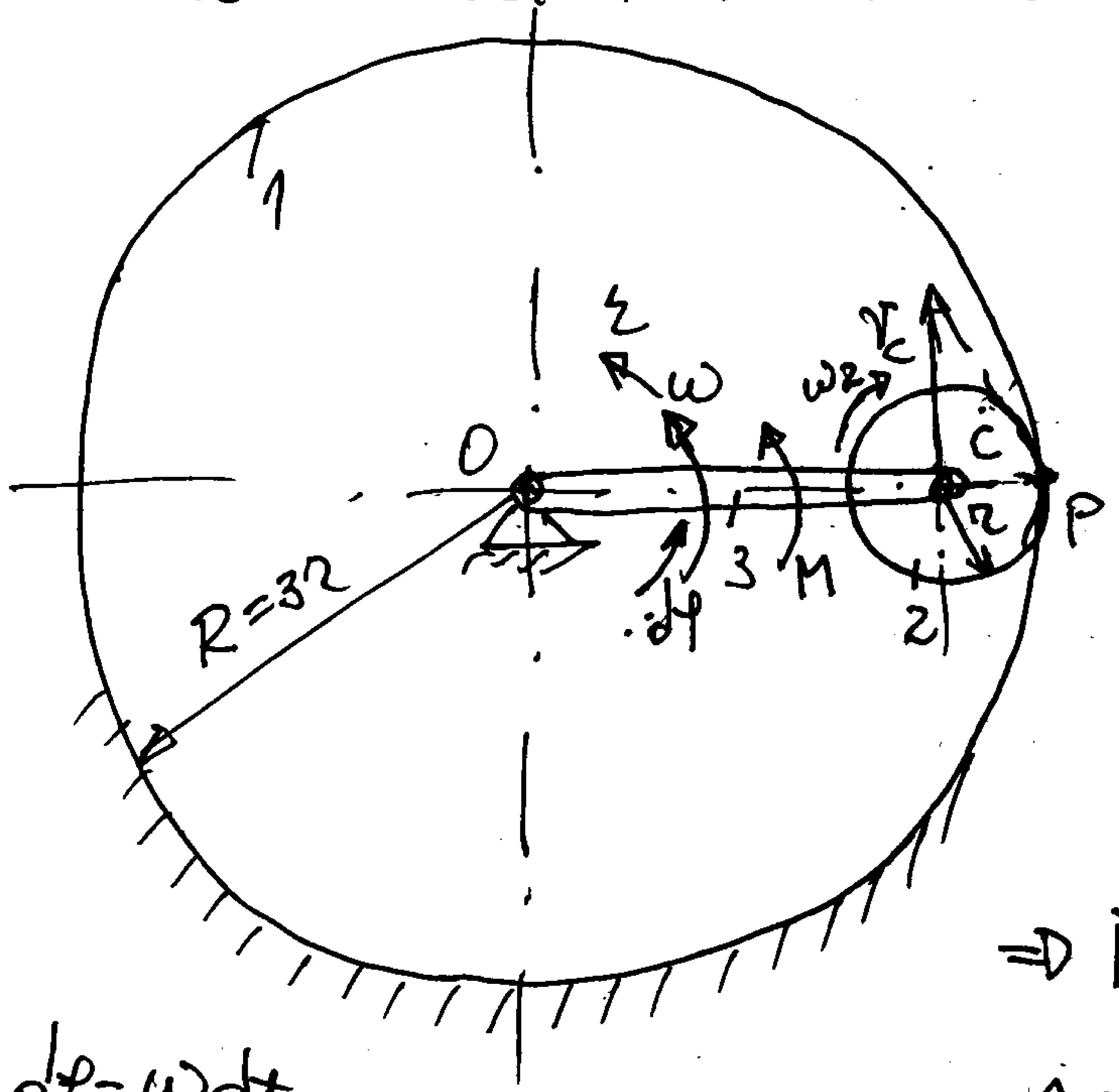
$$\Rightarrow E_k = \frac{7}{4}mv_C^2$$

$$E_{k1} - E_{k0} = A_{(0,1)}(m\vec{g})$$

$$\frac{7}{4}mv_{C1}^2 - 0 = mgh$$

$$\boxed{v_{C1} = \sqrt{4gh/7} = 2{,}37\ m/s}$$

10. Zupčanik 2, mase m_2 i poluprečnika r ozubljen je sa nepomičnim zupčanikom 1 poluprečnika $R=3r$. Zupčanik 2 se dovodi u kretanje pomoću krivaje 3, mase m_3, koja se obrće pod dejstvom sprega sila konstantnog momenta M. Zupčanik 2 smatrati homogenim kružnim diskom a krivaju 3 homogenim tankim štapom. a) Odrediti kinetičku energiju sistema u funkciji ugaone brzine krivaje. b) Odrediti ugaono ubrzanje krivaje.
Mehanizam leži u horizontalnoj ravni.



$$v_C = \overline{OC}\,\omega = 2r\omega$$

$$v_C = \overline{CP}\,\omega_2 = r\omega_2$$

$$\Rightarrow \boxed{\omega_2 = 2\omega}$$

$$E_k = \frac{1}{2}J_O^{(3)}\omega^2 + \frac{1}{2}m_2 v_C^2 + \frac{1}{2}J_C^{(2)}\omega_2^2$$

$$J_O^{(3)} = \frac{m_3(2r)^2}{3}; \quad J_C^{(2)} = \frac{m_2 r^2}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{E_k = \frac{9m_2+2m_3}{3}r^2\omega^2}$$

$$d\varphi = \omega\,dt$$

$$\hat{d}A = M\,d\varphi$$

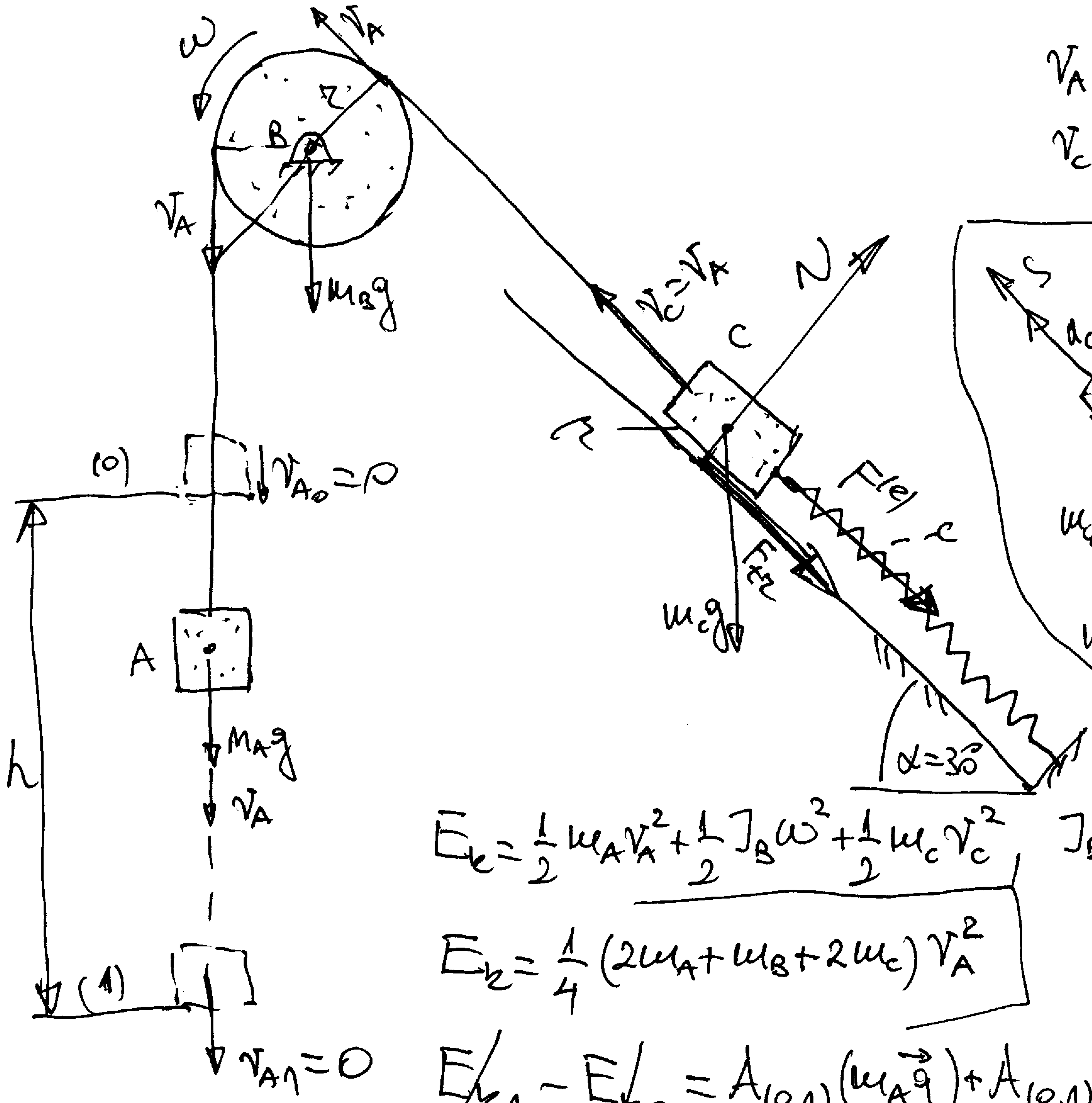
$$\frac{dE_k}{dt} = \frac{\hat{d}A}{dt}$$ – diferenc. oblik zakona o promeni kin. en.

$$\|$$

$$\frac{9m_2+2m_3}{3}r^2 \cdot 2\omega \underbrace{\frac{d\omega}{dt}}_{=\varepsilon} = M \underbrace{\frac{d\varphi}{dt}}_{=\omega}$$

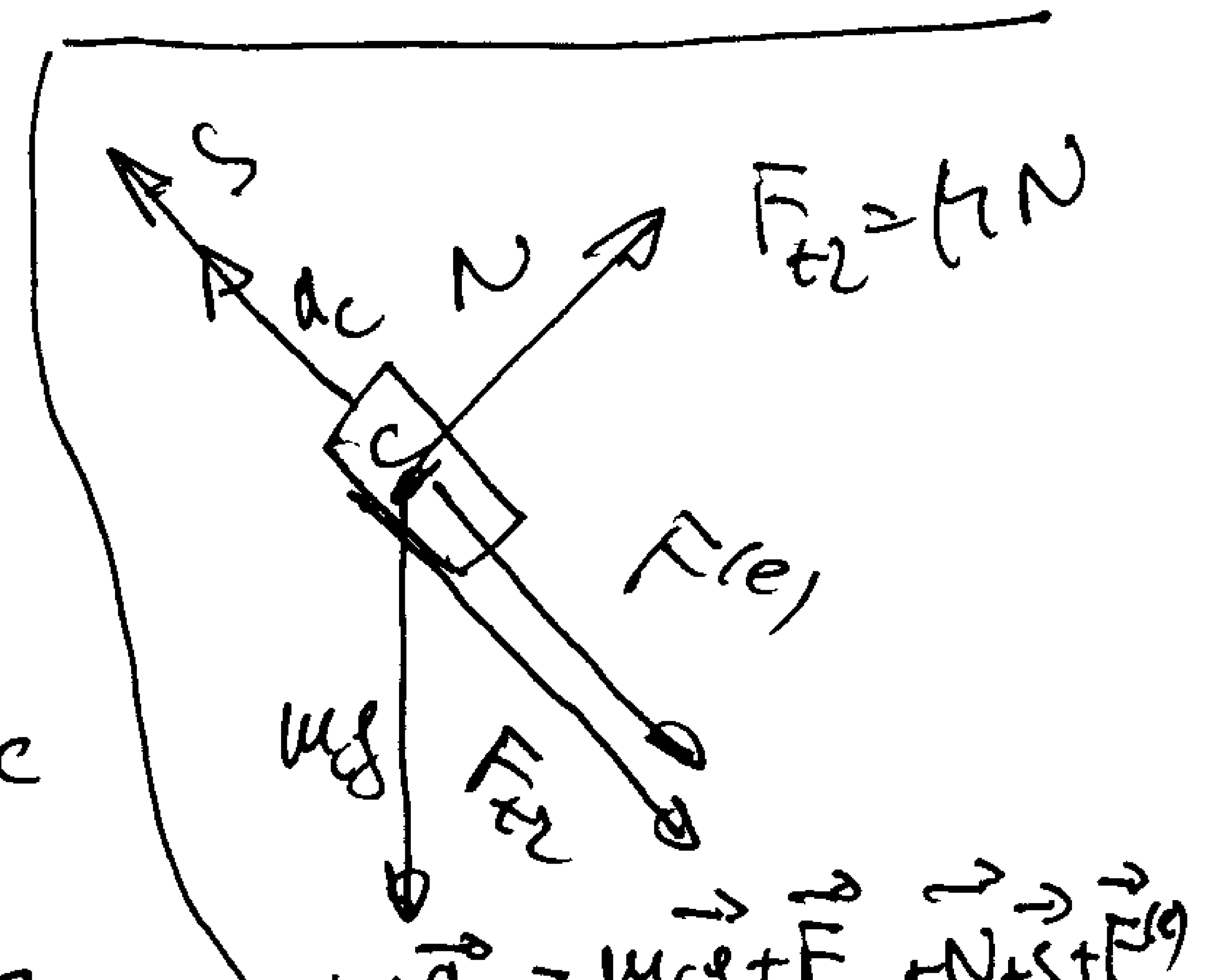
$$\boxed{\varepsilon = \ddot{\varphi} = \frac{3M}{2(9m_2+2m_3)r^2}}$$

11. Teg A, mase $m_A = 10$ kg, počevši kretanje iz mira, posredstvom neistegljivog konopca i kotura B (homogeni kružni disk mase $m_B = 30$ kg poluprečnika $r = 30$ cm), dovodi u kretanje sanduk C mase $m_C = 5$ kg uz strmu ravan nagiba $\alpha = 30°$. Sanduk je vezan za oprugu krutosti $c = 2$ N/cm, koja je u početnom položaju sanduka nenapregnuta. Dinamički koeficijent trenja između sanduka i strme ravni je $\mu = 0,1$. Odrediti a) kinetičku energiju sistema u funkciji brzine tega; b) maksimalno rastojanje za koje će se spustiti teg.



$$v_A = r\omega \Rightarrow \omega = \frac{v_A}{r}$$

$$v_C = v_A$$



$$m_C \vec{a}_C = m_C\vec{g} + \vec{F}_{tr} + \vec{N} + \vec{S} + \vec{F}^{(e)}$$

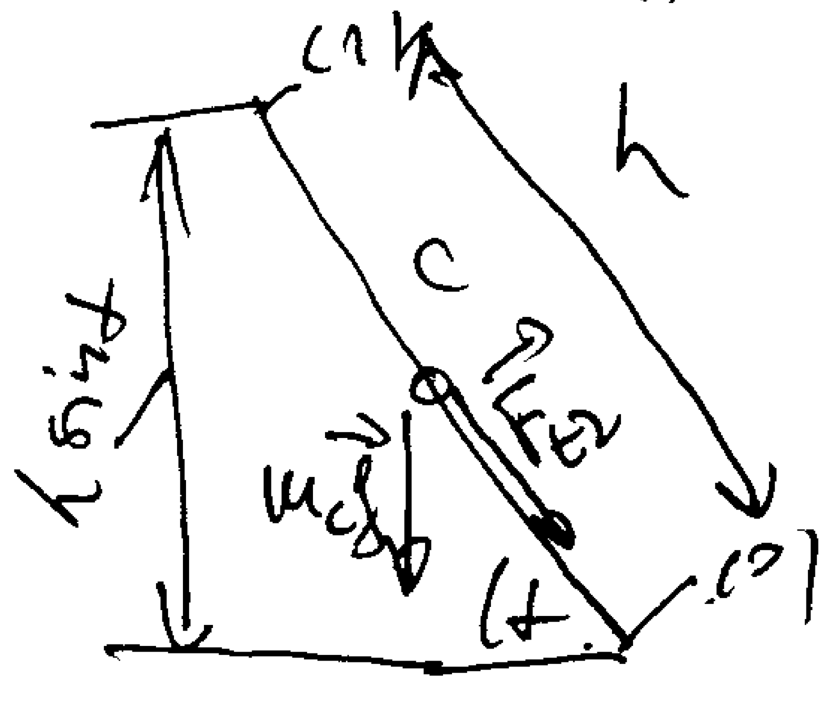
$$\Rightarrow N = m_C g\cos\alpha$$

$$E_k = \frac{1}{2} m_A v_A^2 + \frac{1}{2} J_B \omega^2 + \frac{1}{2} m_C v_C^2, \quad J_B = \frac{m_B r^2}{2}$$

$$\boxed{E_k = \frac{1}{4}(2m_A + m_B + 2m_C)\, v_A^2}$$

$$\underbrace{\cancel{E_{k1}}}_{0} - \underbrace{\cancel{E_{k0}}}_{0} = A_{(0,1)}(m_A\vec{g}) + A_{(0,1)}(m_C\vec{g}) + A_{(0,1)}(\vec{F}_{tr}) + A_{(0,1)}(\vec{F}^{(e)})$$

$$A_{(0,1)}(m_A\vec{g}) = m_A g h; \quad A_{(0,1)}(m_C\vec{g}) = -m_C g h\sin\alpha; \quad A_{(0,1)}(\vec{F}_{tr}) = -F_{tr} h = -\mu m_C g h\cos\alpha$$

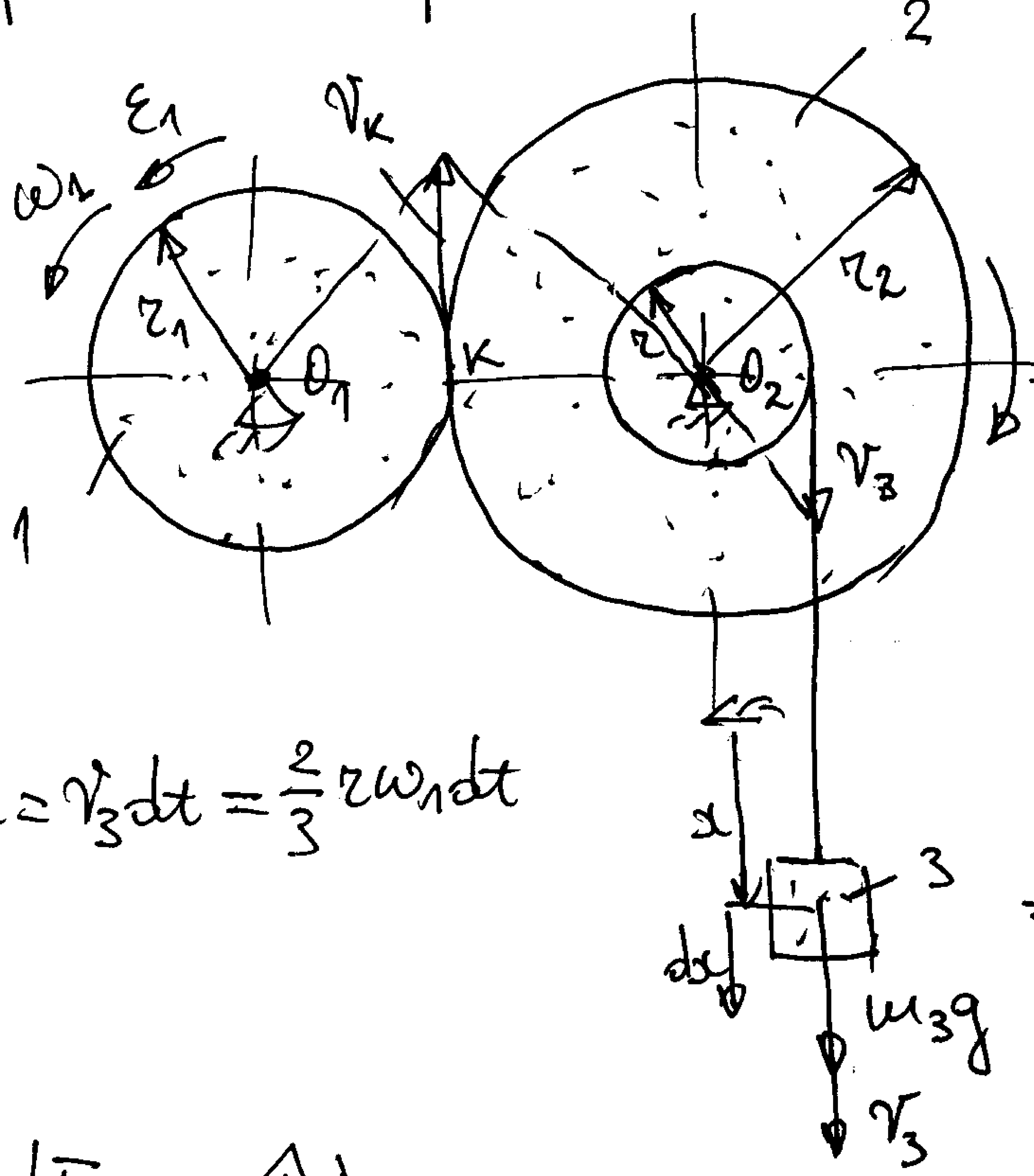


$$A_{(0,1)}(\vec{F}^{(e)}) = \frac{1}{2} c(\Delta_0^2 - \Delta_1^2), \quad \Delta_0 = 0, \quad \Delta_1 = h$$

$$\Rightarrow m_A g h - m_C g h\sin\alpha - \mu m_C g h\cos\alpha - \frac{1}{2} c h^2 = 0$$

$$h = 2[m_A - m_C(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)]g/c = 0,69 \text{ m}$$

12. Zupčanici 1 i 2 (poluprečnika $r_1=2r$ i $r_2=3r$, masa $m_1=5$ kg i $m_2=10$ kg) sa spoljašnjim ozubljenjem se mogu obrtati oko odgovarajućih nepokretnih horizontalnih osa O_1 i O_2. Za zupčanik 2 je koaksijalno zavaren laki (zanemarljive mase) doboš poluprečnika $r=10$ cm i na njega je namotano lako neistegljivo uže za čiji je slobodni kraj obješen teg 3 mase $m_3=2$ kg. Odrediti: a) kinetičku energiju sistema u funkciji ugaone brzine zupčanika 1 b) ugaono ubrzanje zupčanika 1; c) tangencijalnu komponentu sile u tački sprezanja zupčanika. Zupčanike smatrati homogenim kružnim diskovima.



$$\left.\begin{array}{l} v_K = r_1\omega_1 \\ v_K = r_2\omega_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \omega_2 = \frac{r_1}{r_2}\omega_1$$

$$v_3 = r\omega_2 \Rightarrow v_3 = r\frac{r_1}{r_2}\omega_1$$

$$\Rightarrow \omega_2 = \frac{2}{3}\omega_1,\ v_3 = \frac{2}{3}r\omega_1$$

$$E_k = \frac{1}{2}J^{(1)}_{O_1}\omega_1^2 + \frac{1}{2}J^{(2)}_{O_2}\omega_2^2 + \frac{1}{2}m_3 v_3^2$$

$$J^{(1)}_{O_1} = \frac{m_1 r_1^2}{2} = 2m_1 r^2,\ J^{(2)}_{O_2} = \frac{m_2 r_2^2}{2} = \frac{9m_2 r^2}{2}$$

$$dx = v_3 dt = \frac{2}{3}r\omega_1 dt$$

$$\Rightarrow \boxed{E_k = \left(m_1+m_2+\frac{2}{9}m_3\right)r^2\omega_1^2}$$

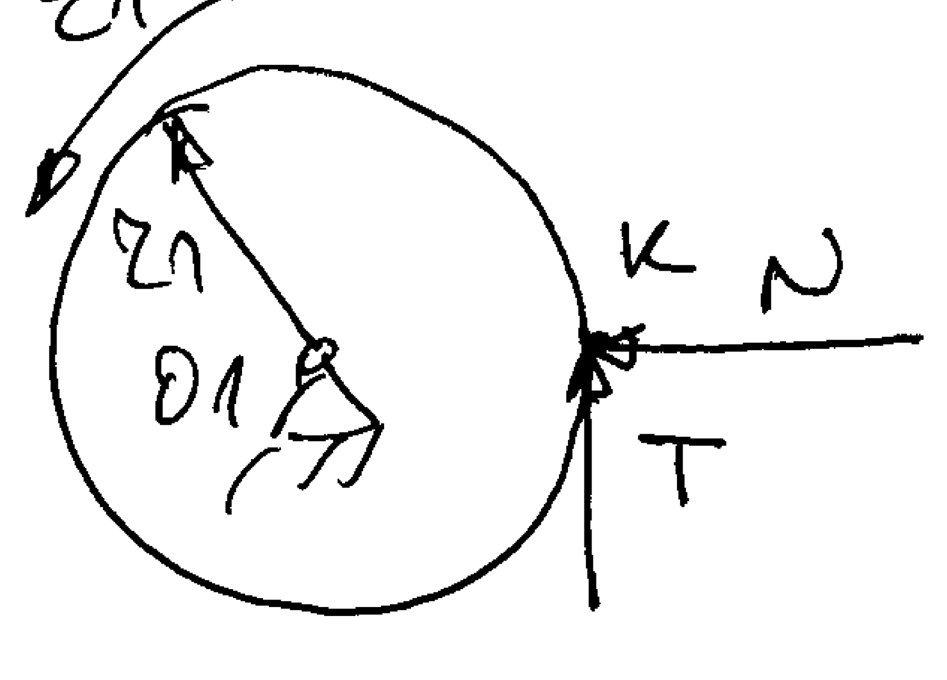
$$\hat{d}A = m_3 g\,dx = \frac{2}{3}m_3 g r\omega_1 dt$$

b) $$\frac{dE_k}{dt} = \frac{\hat{d}A}{dt}$$

$$\cancel{2}\left(m_1+m_2+\frac{2}{9}m_3\right)r^2\cancel{\omega_1}\underbrace{\frac{d\omega_1}{dt}}_{\varepsilon_1} = \frac{\cancel{2}}{3}m_3 g r\cancel{\omega_1} \Rightarrow \varepsilon_1 = \frac{m_3 g \cancel{r}}{3\left(m_1+m_2+\frac{2}{9}m_3\right)r^{\cancel{2}}}$$

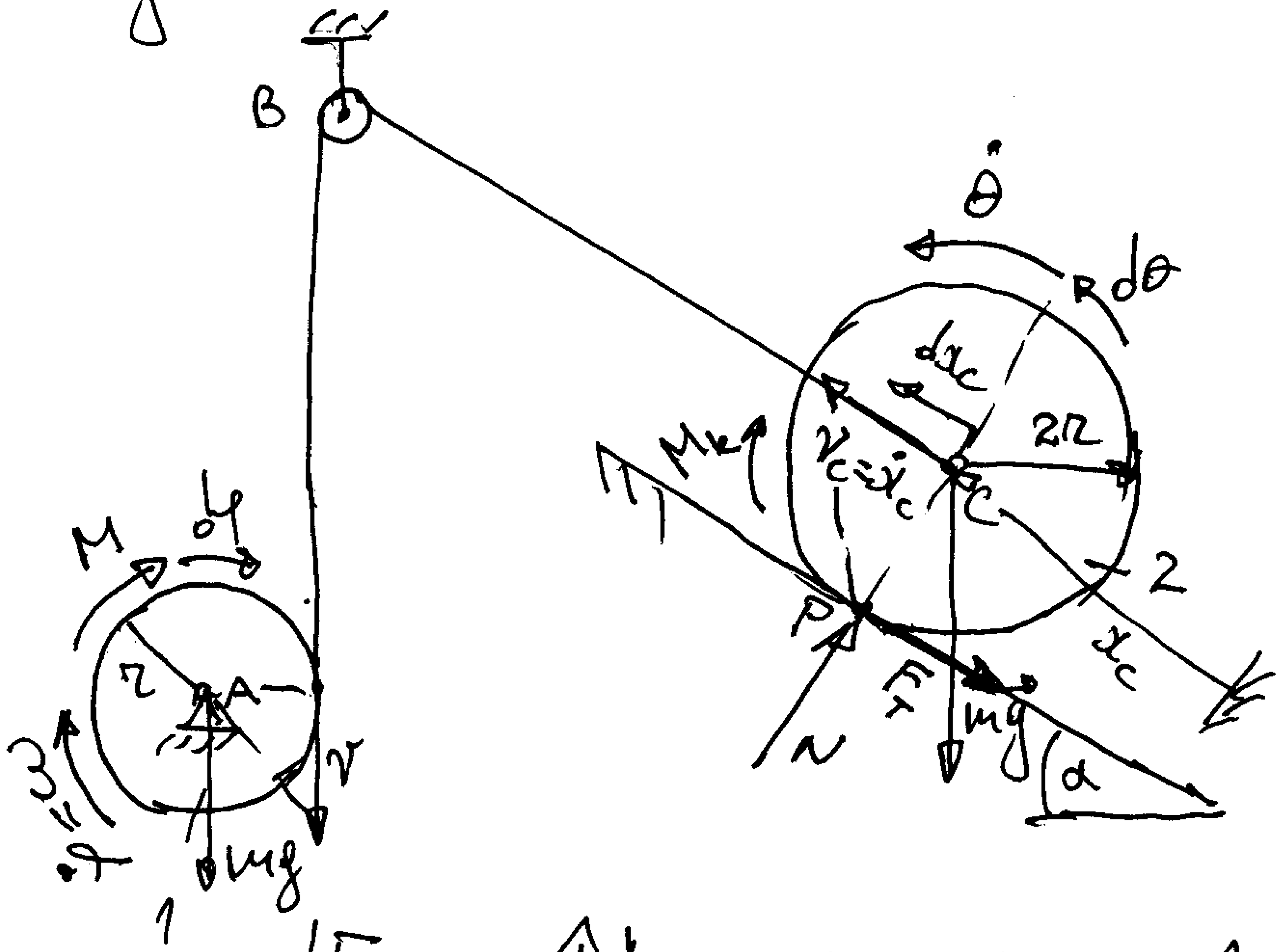
$$\varepsilon_1 = 4{,}23\ s^{-2}$$

c)



$$J^{(1)}_{O_1}\varepsilon_1 = T\cdot r_1 \Rightarrow T = \boxed{m_1 r\cdot\varepsilon_1 = 2{,}11\ N}$$

13. Na kotur 1 (homogeni kružni disk mase m_1 i poluprečnika r) koji se može obrtati oko nepokretne horizontalne ose A dejstvuje spreg sila konstantnog momenta M. Pomoću neistegljivog užeta i kotura B, zanemarljivih masa, dovodi se u kretanje kalem 2 (poluprečnika $2r$, mase $m_2 = m_1$ i poluprečnika inercije za centralnu osu upravnu na ravan kretanja $i_c = r$). Kalem se kotrlja bez klizanja niz strmu ravan čiji je nagib α. Krak trenja kotrljanja je k. a) Odrediti kinetičku energiju sistema kao funkciju brzine centra C kalema. b) Odrediti ubrzanje centra C kalema.



$$\left.\begin{array}{l} v = r\omega \\ v_c = v \end{array}\right\} \Rightarrow \omega = \frac{v_c}{r}$$

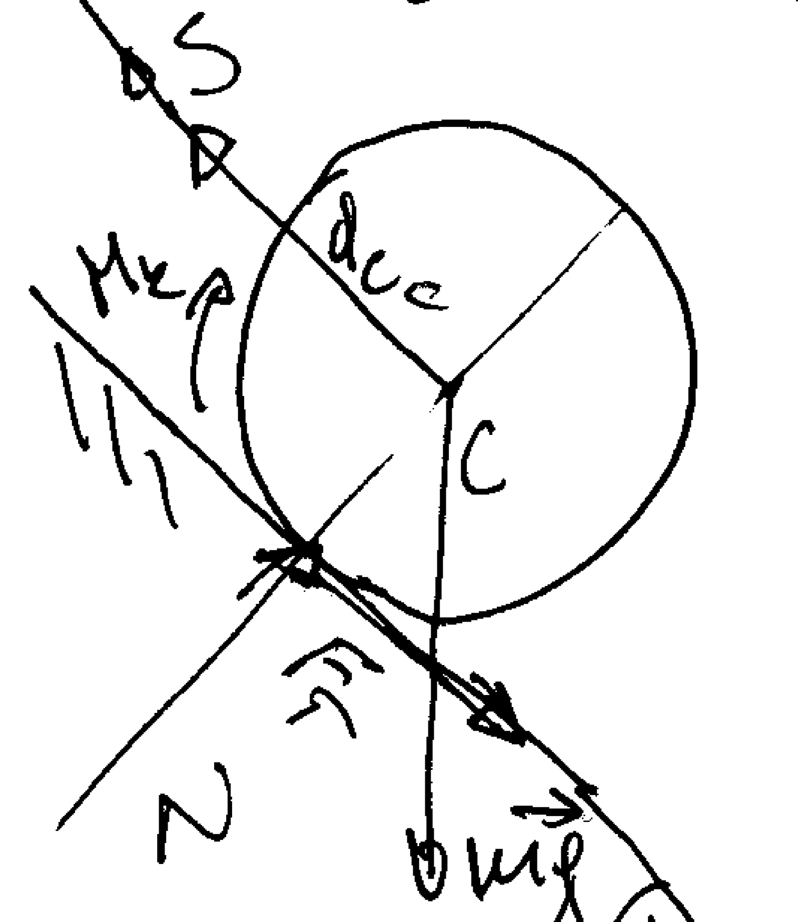
$$v_c = 2r\dot\theta \Rightarrow \dot\theta = \frac{v_c}{2r}$$

$$E_k = \underbrace{\frac{1}{2} J_A^{(1)} \omega^2}_{E_k^{(1)}} + \underbrace{\frac{1}{2} m v_c^2 + \frac{1}{2} J_c^{(2)} \dot\theta^2}_{E_k^{(2)}}$$

$$J_A^{(1)} = mr^2/2, \quad J_C^{(2)} = m_2 i_c^2 = mr^2$$

$$\Rightarrow \boxed{E_k = \frac{7}{8} m v_c^2}$$

$$\frac{dE_k}{dt} = \frac{\hat{d}A}{dt}, \quad \hat{d}A = \hat{d}A(M) + \hat{d}A(m_2\vec{g}) + \hat{d}A(M_k), \quad M_k = kN$$



$$m\vec{a}_c = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_T + \vec{S} \Rightarrow \perp: \; 0 = -mg\cos\alpha + N \Rightarrow N = mg\cos\alpha$$

$$\hat{d}A(M_k) = -M_k d\theta = -kmg\cos\alpha\,\dot\theta dt = -kmg\cos\alpha \frac{v_c}{2r} dt$$

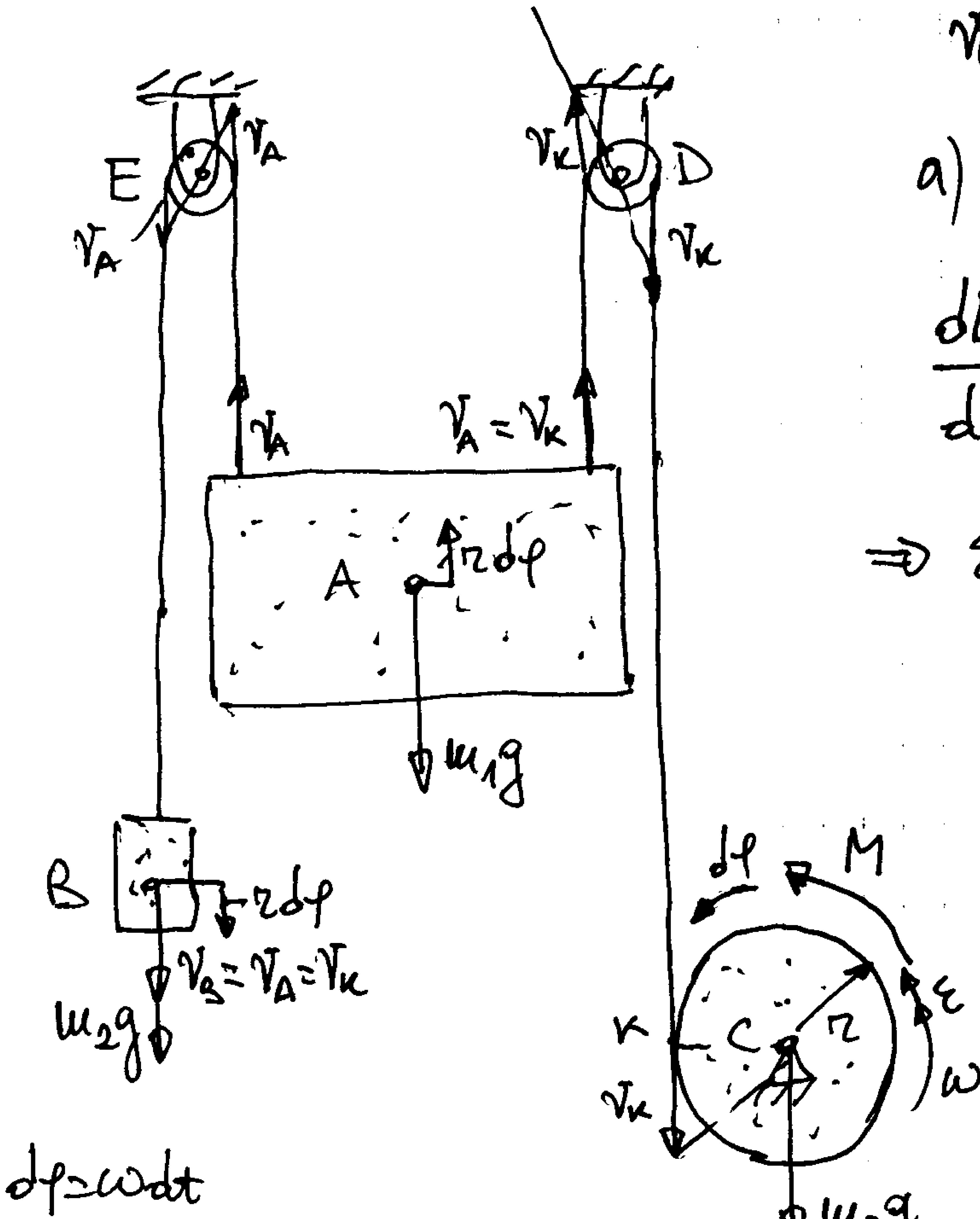
$$\hat{d}A(M) = M d\varphi = M\dot\varphi dt = M\frac{v_c}{r} dt$$

$$\hat{d}A(m_2\vec{g}) = -mg\sin\alpha\, dx_c = -mg\sin\alpha\, v_c dt$$

$$\frac{dE_k}{dt} = \frac{7}{4} m v_c \left(\frac{dv_c}{dt}\right) \quad \frac{dv_c}{dt} = a_c, \qquad \frac{\hat{d}A}{dt} = \left(\frac{M}{r} - mg\sin\alpha - \frac{kmg}{2r}\cos\alpha\right) v_c$$

$$\frac{dE_k}{dt} = \frac{\hat{d}A}{dt} \Rightarrow a_c = \frac{4}{7m}\left[\frac{M}{r} - mg\left(\sin\alpha + \frac{k}{2r}\cos\alpha\right)\right]$$

14. Lift A ima masu $m_1 = 500$ kg, a protiveg B masu $m_2 = 150$ kg. Lift se podiže usled dejstva obrtnog momenta $M = 1200$ Nm na kotur C, poluprečnika $r = 0{,}3$ m i mase $m_3 = 40$ kg i poluprečnika inercije za obrtnu osu $i = 0{,}25$ m. Odrediti kinetičku energiju sistema u funkciji ugaone brzine kotura C, a zatim primenom zakona o promeni kinetičke energije naći ugaono ubrzanje kotura C. Koliko je ubrzanje lifta i kolika je sila u užetu za koje je obešen protiveg. Mase užadi i koturova D i E zanemariti.



$d\varphi = \omega dt$

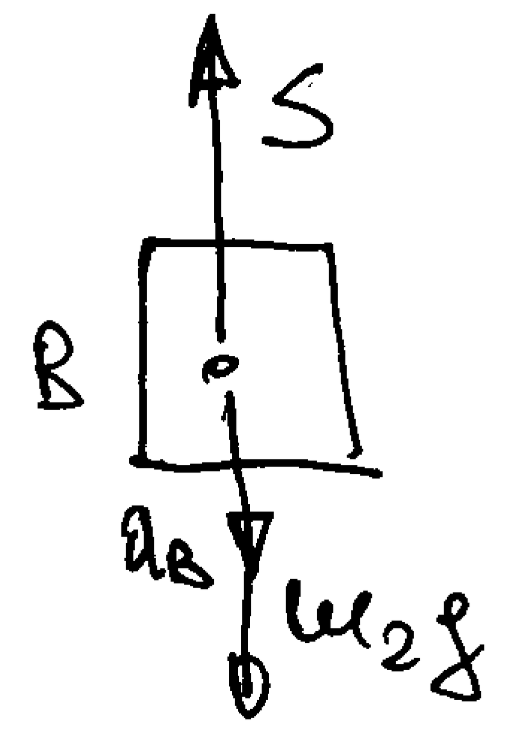
$v_B = v_A = v_K = r\omega$

a) $E_k = \frac{1}{2}(m_1 r^2 + m_2 r^2 + m_3 i^2)\omega^2$

$\frac{dE_k}{dt} = \frac{\hat{d}A}{dt}$, $\hat{d}A = (M - m_1 g r + m_2 g r)\,d\varphi$

$\Rightarrow \varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{M - m_1 g r + m_2 g r}{m_1 r^2 + m_2 r^2 + m_3 i^2} = \dots$

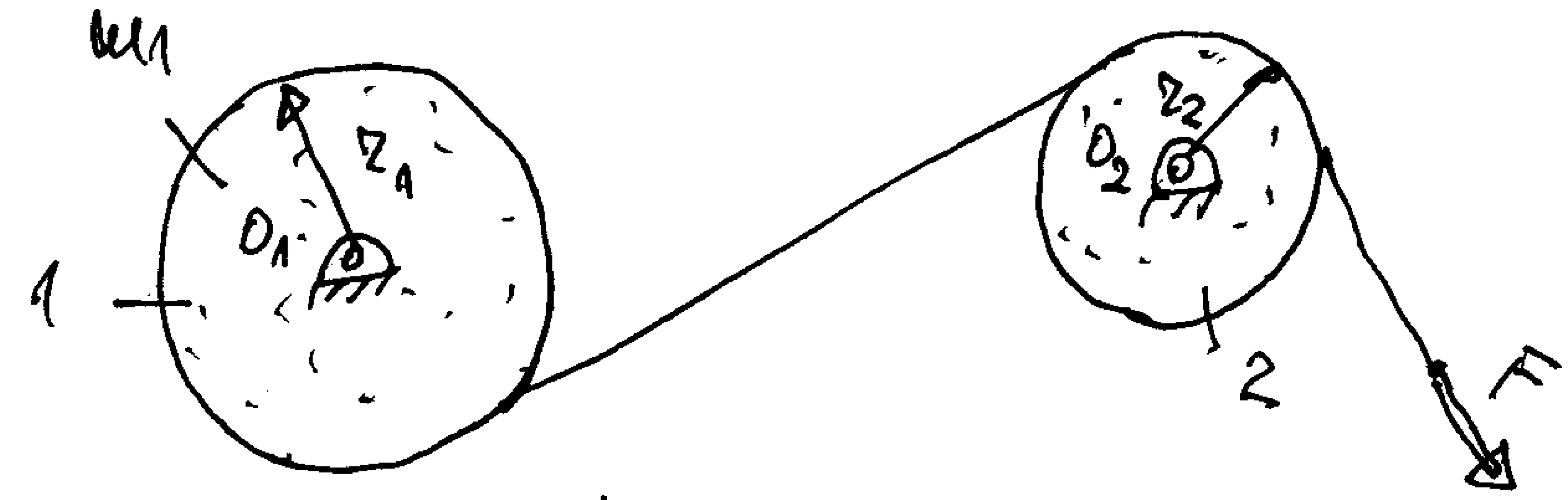
b) $a_A = \frac{dv_A}{dt} = r\varepsilon = \dots$



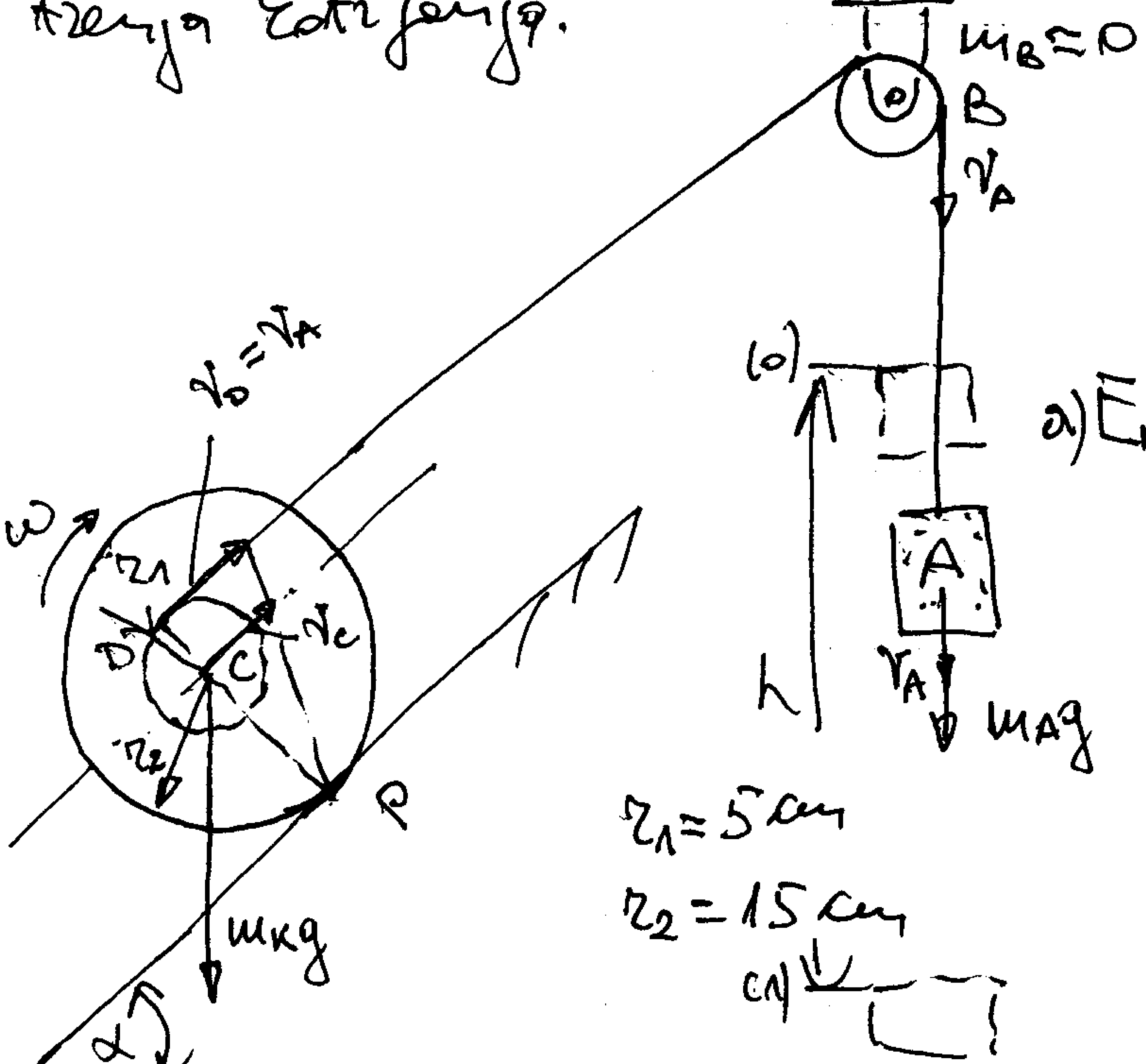
$a_B = \frac{dv_B}{dt} = \frac{dv_A}{dt} = a_A$

$m_2 a_B = m_2 g - S \Rightarrow S = \dots$

15. Slobodan kraj neistegljivog užeta namotanog na kotur 1 (homogeni kružni disk mase $m_1 = 20$ kg i poluprečnika $r_1 = 20$ cm) i prebačenog preko kotura 2 (homogeni kružni disk mase $m_2 = 10$ kg i poluprečnika $r_2 = 10$ cm) vuče se silom $F = 30$ N. a) Napisati kinetičku energiju sistema u funkciji ugaone brzine kotura 1. b) Odrediti ugaono ubrzanje kotura 1. c) Kolika je sila u užetu u dijelu između koturova.



16. Neistegljivo uže, na čijem kraju A visi teret mase $m_A = 25$ kg, prebačeno je preko kotura zanemarljive mase i namotano na kalem K, mase $m_K = 10$ kg i poluprečnika inercije za centralnu osu upravnu na ravan kretanja $i_C = 7$ cm. Odrediti: a) kinetičku energiju sistema u funkciji brzine tereta smatrajući da se kalem kotrlja bez klizanja po strmoj ravni nagiba $\alpha = 30°$; b) brzinu tereta nakon što se on spusti za visinu $h = 2$ m, počevši kretanje iz mira; c) silu u užetu i silu trenja kotrljanja.



$v_D = v_A$, $v_C = r_2\omega$

$v_D = (r_1+r_2)\omega$

$\Rightarrow \omega = \frac{v_A}{r_1+r_2}$, $v_C = \frac{r_2}{r_1+r_2} v_A$

a) $E_K = \frac{1}{2}\left[m_A + m_K\left(\frac{r_2}{r_1+r_2}\right)^2 + m_K\left(\frac{i_C}{r_1+r_2}\right)^2\right] v_A^2$

b) $E_{K1} - \underbrace{E_{K0}}_{0} = \underbrace{A_{(0,1)}(m_A\vec{g})}_{m_A g h} + A_{(0,1)}(m_K\vec{g})$

$r_1 = 5$ cm

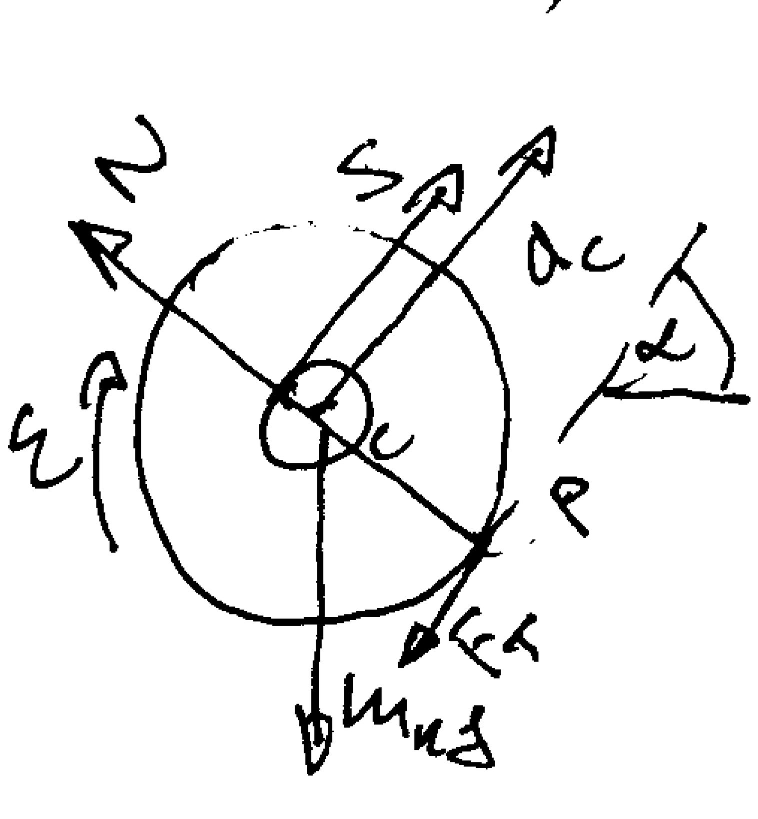
$r_2 = 15$ cm

$A_{(0,1)}(m_K\vec{g}) = -m_K g \sin\alpha \cdot l_1$

$l_1 = \int_0^{t_1} v_C\,dt = \frac{r_2}{r_1+r_2}\underbrace{\int_0^{t_1} v_A\,dt}_{h}$

$\Rightarrow v_{A1} = \cdots$; c) $\frac{dE_K}{dt} = \frac{\delta A}{dt}$; $\delta A = m_A g v_A dt - m_K g \sin\alpha \underbrace{\frac{r_2}{r_1+r_2} v_A dt}_{v_C dt}$

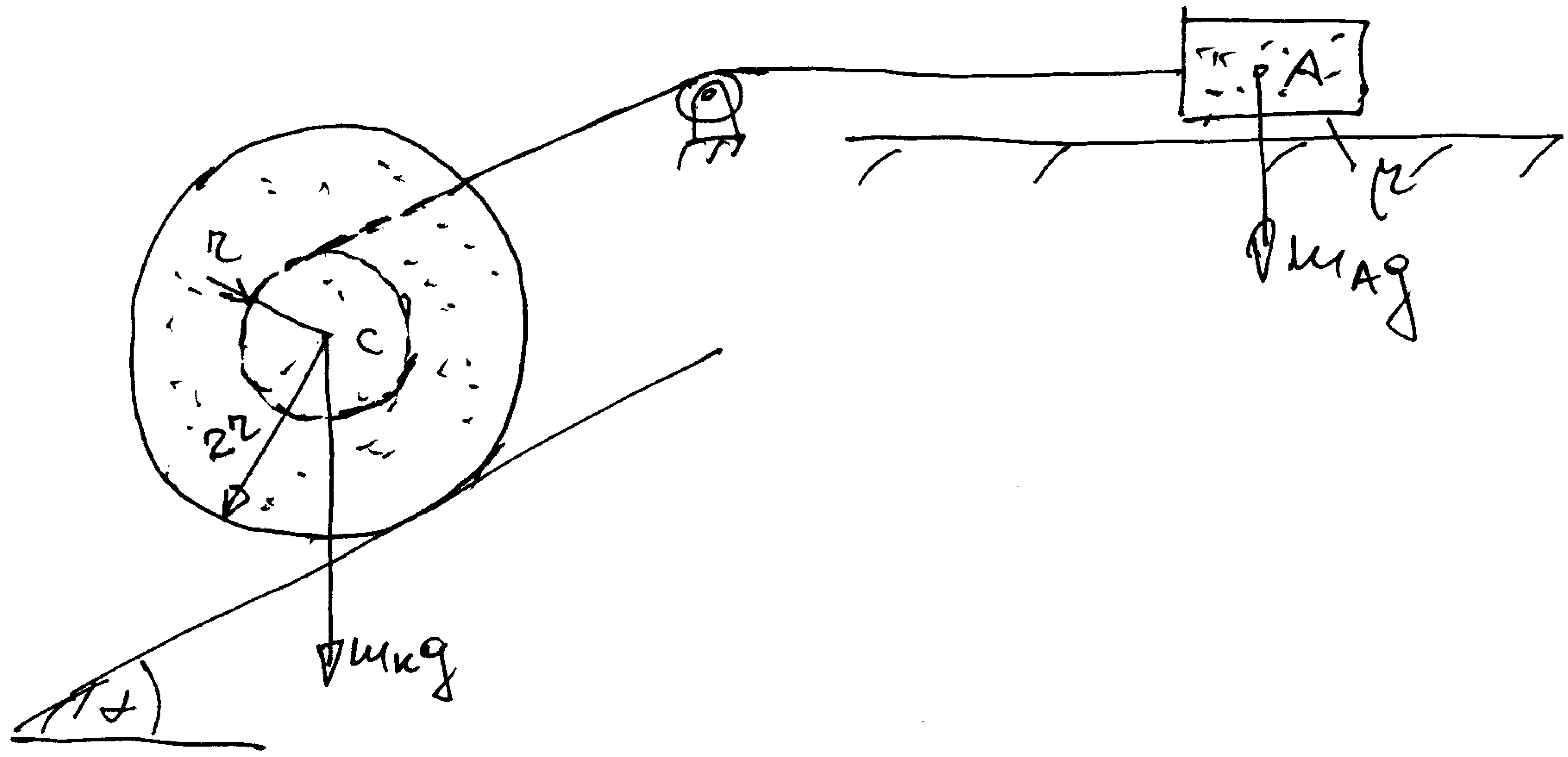
$\Downarrow$



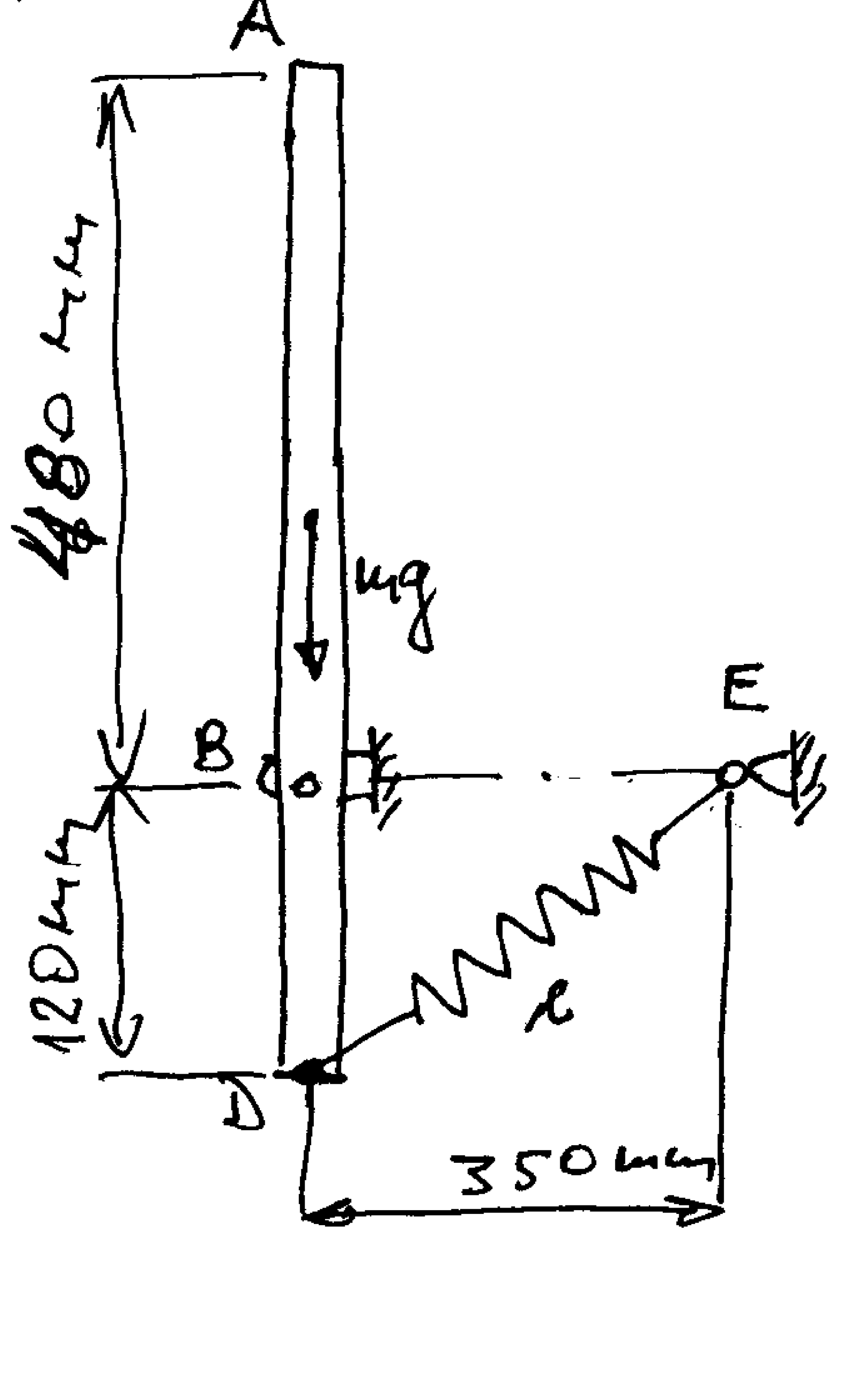
$a_A = \cdots$; $a_C = \frac{r_2}{r_1+r_2} a_A$, $\varepsilon = \frac{a_A}{r_1+r_2}$

$$\left.\begin{aligned} m_K a_C &= -m_K g \sin\alpha - F_T + S \\ J_C \varepsilon &= S r_1 - F_T r_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow S, F_T$$

17. Nerastegljivo uže, zanemarljive mase, za čiji kraj A je vezan sanduk mase $m_A = 2m$ koji može da se kreće po hrapavoj horizontalnoj ravni sa koeficijentom trenja μ, prebačeno je preko kotura zanemarljive mase i namotano na kalem K, mase $m_K = 8m$ i poluprečnika inercije za centralnu osu upravnu na ravan kretanja $i_C = 3r/2$. Odrediti: a) kinetičku energiju sistema u funkciji brzine centra inercije C kalema smatrajući da se on kotrlja bez klizanja po strmoj ravni nagiba $\alpha = 30°$; b) brzinu tačke C nakon što ona pređe rastojanje l, počevši kretanje iz mira; c) silu u užetu. Dato je: $m = 3$ kg, $r = 10$ cm; $l = 2$ m; $\mu = 0,2$.



18. Štap mase $m = 4$ kg može da se obrće u vertikalnoj ravni oko horizontalne ose B. Elastična opruga, krutosti $c = 400$ N/m i prirodne dužine $l_0 = 150$ mm, je vezana za kraj D štapa. Znajući da je štap pušten iz mira iz vertikalnog položaja prikazanog na slici, odrediti njegovu ugaonu brzinu nakon što se obrne za ugao od 90°.



R: $\omega_1 = 11,13\ s^{-1}$