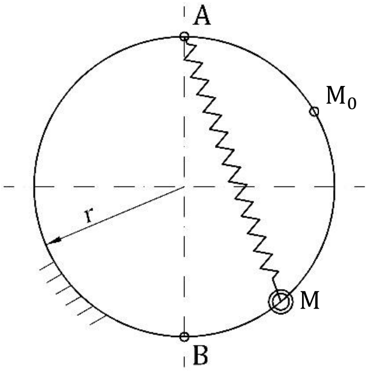
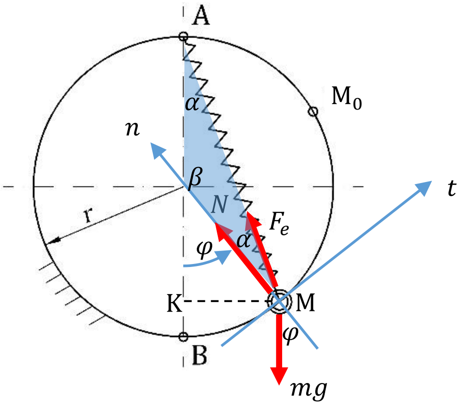
Терет масе 5 kg, који је објешен помоћу опруге о највишу тачку A кружног прстена који се налази у вертикалној равни, пада клизећи по прстену без трења. Полупречник прстена је $r = 20$ cm. У почетном положају терета $\mathrm{M_0}$, праволинијско растојање $\mathrm{AM_0}$ износи 20 cm и опруга је тада ненапрегнута. Брзина терета у почетном положају је једнака нули. Одредити брзину терета у тачки B. Тежину опруге занемарити.




**I начин – основна једначина динамике материјалне тачке**




Смјер тангентне осе $t$ треба да прати смјер угаоне координате $\varphi$.

$$\left.\begin{array}{l}\beta=\pi-\varphi\\ \alpha+\alpha+\beta=\pi\end{array}\right\}\Rightarrow 2\alpha+\pi-\varphi=\pi\Rightarrow 2\alpha=\varphi\Rightarrow\alpha=\frac{\varphi}{2}$$

$$\left.\begin{array}{l}\overline{\mathrm{AK}}=r+r\cos\varphi=r(1+\cos\varphi)\\ \overline{\mathrm{KM}}=r\sin\varphi\end{array}\right\}\Rightarrow\overline{\mathrm{AM}}=\sqrt{\overline{\mathrm{AK}}^2+\overline{\mathrm{KM}}^2}=r\sqrt{1+2\cos\varphi+\cos^2\varphi+\sin^2\varphi}=r\sqrt{2+2\cos\varphi}$$

$$\Delta=\overline{\mathrm{AM}}-l_0=\overline{\mathrm{AM}}-r=r\left(\sqrt{2(1+\cos\varphi)}-1\right)$$

$$m\vec{a}=\overrightarrow{F^a}+\vec{R}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}ma_t=-mg\sin\varphi+F_e\sin\alpha\\ ma_n=N-mg\cos\varphi-F_e\cos\alpha\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}ma_t=-mg\sin\varphi+c\Delta\sin\dfrac{\varphi}{2}\\ ma_n=N-mg\cos\varphi-c\Delta\cos\dfrac{\varphi}{2}\end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l}ma_t=-mg\sin\varphi+cr\left(\sqrt{2(1+\cos\varphi)}-1\right)\sin\dfrac{\varphi}{2}\\ a_t=\dfrac{dv}{dt}\dfrac{d\varphi}{d\varphi}=\dfrac{vdv}{rd\varphi}\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}a_t=-g\sin\varphi+\dfrac{cr}{m}\left(\sqrt{2(1+\cos\varphi)}-1\right)\sin\dfrac{\varphi}{2}\\ a_t=\dfrac{dv}{dt}\dfrac{d\varphi}{d\varphi}=\dfrac{vdv}{rd\varphi}\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$vdv=r\left[-g\sin\varphi+\frac{cr}{m}\left(\sqrt{2(1+\cos\varphi)}-1\right)\sin\frac{\varphi}{2}\right]d\varphi$$

$$\int_{v_{\mathrm{M_0}}=0}^{-v_{\mathrm{B}}}vdv=\int_{\varphi_{\mathrm{M_0}}=\pi-\pi/3=2\pi/3}^{\varphi_{\mathrm{B}}=0}\left[-rg\underbrace{\sin\varphi}_{\#1}+\frac{cr^2}{m}\underbrace{\sin\frac{\varphi}{2}\sqrt{2(1+\cos\varphi)}}_{\#2}-\frac{cr^2}{m}\underbrace{\sin\frac{\varphi}{2}}_{\#3}\right]d\varphi$$

#1

$$\int \sin\varphi \, d\varphi = -\cos\varphi$$

#2

$$\boxed{1 + \cos\varphi = 2\cos^2\frac{\varphi}{2}}$$

$$\int \sin\frac{\varphi}{2}\sqrt{2(1+\cos\varphi)}d\varphi = \int \sin\frac{\varphi}{2}\sqrt{4\cos^2\frac{\varphi}{2}}d\varphi = 2\int \sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}d\varphi$$

$$\boxed{\cos\frac{\varphi}{2} = k \Rightarrow -\frac{1}{2}\sin\frac{\varphi}{2}d\varphi = dk \Rightarrow \sin\frac{\varphi}{2}d\varphi = -2dk}$$

$$= 2\int k(-2)dk = -4\frac{k^2}{2} = -2\cos^2\frac{\varphi}{2}$$

#3

$$\int \sin\frac{\varphi}{2}d\varphi = -2\cos\frac{\varphi}{2}$$

---

$$\frac{v_{\mathrm{B}}^2}{2} = rg\left(\cos 0 - \cos\frac{2\pi}{3}\right) - 2\frac{cr^2}{m}\left(\cos^2 0 - \cos^2\frac{\pi}{3}\right) + 2\frac{cr^2}{m}\left(\cos 0 - \cos\frac{\pi}{3}\right)$$

$$v_{\mathrm{B}}^2 = 2\left[rg\left(1+\frac{1}{2}\right) - 2\frac{cr^2}{m}\left(1-\frac{1}{4}\right) + 2\frac{cr^2}{m}\left(1-\frac{1}{2}\right)\right]$$

$$v_{\mathrm{B}}^2 = 2\left(\frac{3}{2}rg - \frac{3}{2}\frac{cr^2}{m} + \frac{cr^2}{m}\right) = \left(3rg - \frac{cr^2}{m}\right)$$

$$v_{\mathrm{B}} = \pm\sqrt{\left(3rg - \frac{cr^2}{m}\right)}$$

$$v_{\mathrm{B}} = -\sqrt{\left(3rg - \frac{cr^2}{m}\right)}$$

Смјер је супротан од усвојеног смјера осе $t$.

**II начин – закон о промјени кинетичке енергије материјалне тачке**

$$\Delta_{\mathrm{B}} = \overline{\mathrm{AB}} - \overline{\mathrm{AM}_0} = 2r - l_0 = 2r - r = r$$

$$E_{k\mathrm{B}} - \underbrace{E_{k\mathrm{M}_0}}_{0} = A_{\mathrm{M}_0-\mathrm{B}}^{mg} + A_{\mathrm{M}_0-\mathrm{B}}^{F_e} + \underbrace{A_{\mathrm{M}_0-\mathrm{B}}^{N}}_{0}$$

$$\frac{mv_{\mathrm{B}}^2}{2} = +mg(r + r\cos 60°) + \frac{1}{2}c\left(\underbrace{\Delta_{\mathrm{M}_0}^2}_{0} - \Delta_{\mathrm{B}}^2\right)$$

$$\frac{mv_{\mathrm{B}}^2}{2} = mgr\frac{3}{2} - \frac{1}{2}cr^2$$

$$v_{\mathrm{B}}^2 = 3gr - \frac{cr^2}{m}$$

$$v_{\mathrm{B}} = \sqrt{\left(3rg - \frac{cr^2}{m}\right)}$$