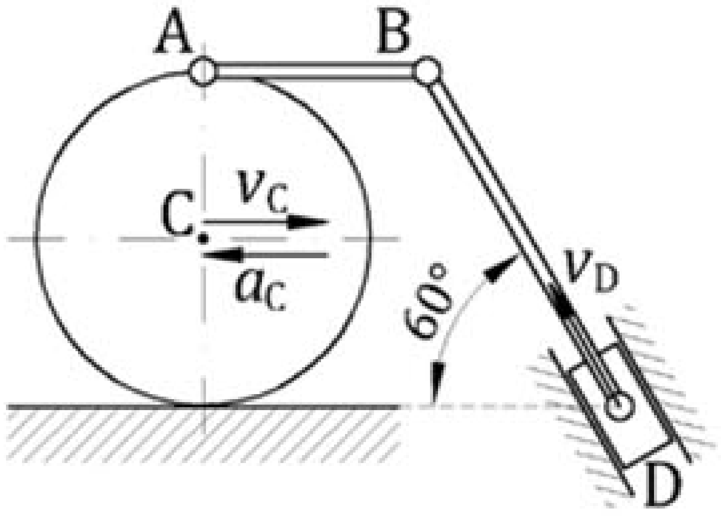
ПРВИ КОЛОКВИЈУМ ИЗ МЕХАНИКЕ

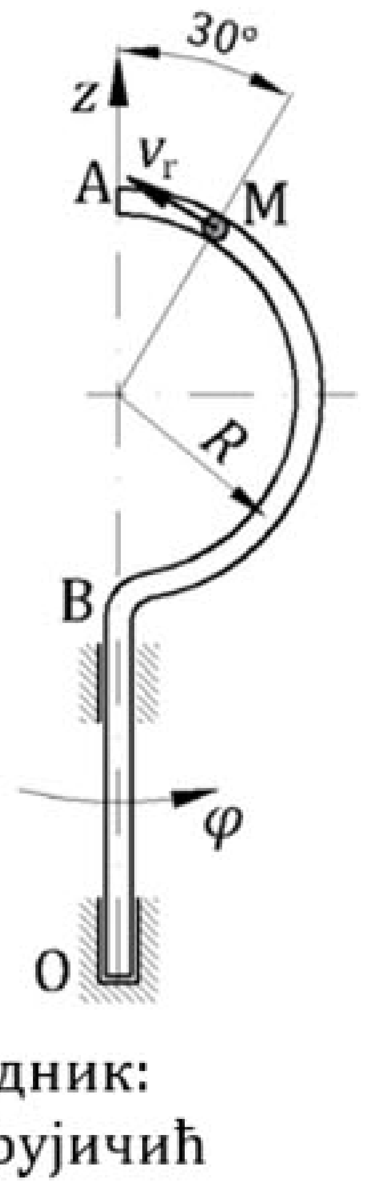
1. Брзина материјалне тачке, која се креће у равни Oxy, мијења се према закону $\vec{v} = -4\sin(2t)\,\vec{\imath} + 4\cos(2t)\,\vec{\jmath}$. Вектор положаја материјалне тачке у почетном тренутку $t_0 = 0$ s је $\vec{r}_0 = 2\vec{\imath} + \vec{\jmath}$.

- Нацртати путању материјалне тачке, а потом одредити њен положај у Декартовом координатном систему након $\pi/2$ секунди од почетка кретања.
- Израчунати угао између вектора брзине и вектора положаја материјалне тачке у тренутку $\pi/2$ секунди.

2. Интензитет брзине центра диска у положају приказаном на слици износи 4 m/s, а убрзања 2 m/s^2, док је интензитет брзине клизача D у приказаном положају 3 m/s. Њихови смјерови су приказани на слици. Одредити брзину зглоба B и убрзање зглоба A (интензитет, правац и смјер) за приказани положај механизма, ако је полупречник диска 0,5 m, а дужина полуге $\overline{\mathrm{AB}} = 0{,}75$ m. Диск се по подлози котрља без клизања.



3. Цијев, која је савијена у облику полукруга полупречника $R = 0{,}5$ m, обрће се око осе Oz према закону $\varphi = \pi t$. У полукружном дијелу цијеви креће се тачка M, почевши кретање из положаја B. Брзина тачке M у односу на цијев мијења се према закону $v_r = 5\pi t/24$. Одредити интензитет апсолутне брзине и апсолутног убрзања тачке M у тренутку $t_2 = 2$ s, ако у датом тренутку систем заузима положај приказан на слици.



Предметни наставник:
Проф. др Оливера Јовановић

Сарадник:
Раде Грујичић

Механика – I колоквијум

Група I

(1) $\vec{v} = -4\sin(2t)\vec{i} + 4\cos(2t)\vec{j}$

$\vec{r_0} = 2\vec{i} + \vec{j}$

$\left.\begin{aligned} v_x &= -4\sin(2t) \\ v_x &= \frac{dx}{dt} \end{aligned}\right\} \int_{x_0=2}^{x} dx = -4\int_0^t \sin(2t)\,dt$

$x - 2 = +\frac{4}{2}\cos(2t)\Big|_0^t$

$x = 2 + 2\cos(2t) - 2\cos 0^\circ \Rightarrow x = 2\cos(2t)$

$\left.\begin{aligned} v_y &= 4\cos(2t) \\ v_y &= \frac{dy}{dt} \end{aligned}\right\} \int_{y_0=1}^{y} dy = 4\int_0^t \cos(2t)\,dt$

$y - 1 = \frac{4}{2}\sin(2t)\Big|_0^t \Rightarrow y = 1 + 2\sin(2t)$

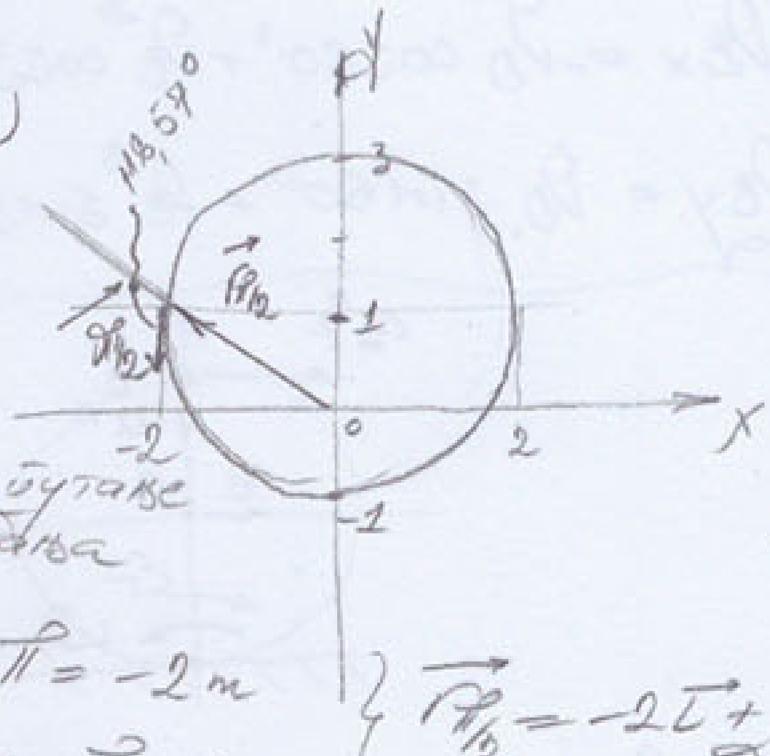
$\left.\begin{aligned} x &= 2\cos(2t) \\ y - 1 &= 2\sin(2t) \end{aligned}\right\} /^2 \Rightarrow \left.\begin{aligned} x^2 &= 2^2\cos^2(2t) \\ (y-1)^2 &= 2^2\sin^2(2t) \end{aligned}\right\} (+) \quad x^2 + (y-1)^2 = 2^2$

$t \in [0, +\infty)$

$x \in [-2, 2]$

$y \in [-1, 3]$

цијела линија путање је путања



$v = \sqrt{16\sin^2(2t) + 16\cos^2(2t)} = 4\ m/s$

$v_{\pi/2} = 4\ m/s$

$\vec{v}_{\pi/2} = -4\sin\pi\,\vec{i} + 4\cos\pi\,\vec{j} = -4\vec{j}$

$r_{\pi/2} = \sqrt{(-2)^2 + 1^2} = \sqrt{5}$

$x_{\pi/2} = 2\cos\pi = -2\,m$

$y_{\pi/2} = 1 + 2\sin\pi = 1\,m$

$\Big\} \ \vec{r}_{\pi/2} = -2\vec{i} + \vec{j}$

$\cos\sphericalangle(\vec{v}_{\pi/2}, \vec{r}_{\pi/2}) = \frac{\vec{v}_{\pi/2} \cdot \vec{r}_{\pi/2}}{v_{\pi/2} \cdot r_{\pi/2}} = \frac{(0\vec{i} - 4\vec{j}) \cdot (-2\vec{i} + \vec{j})}{4 \cdot \sqrt{5}} = \frac{-4}{4\sqrt{5}} = -1/\sqrt{5}$

$\sphericalangle(\vec{v}_{\pi/2}, \vec{r}_{\pi/2}) = 116{,}57^\circ = \underline{\underline{2{,}03}}\ rad$

(2)

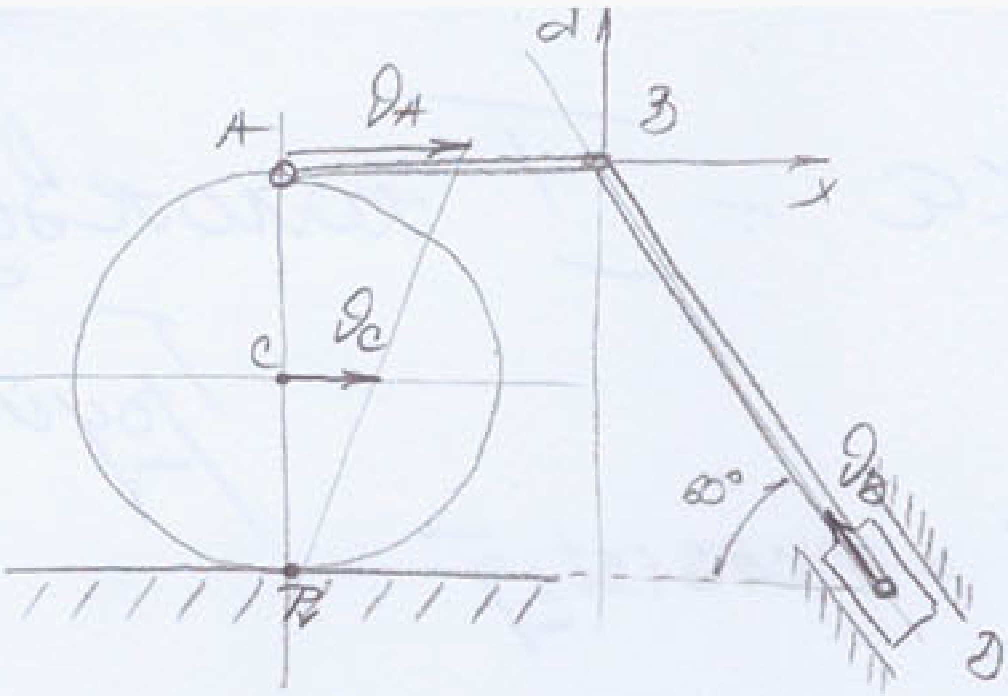
$\vartheta_C = 4\ m/s$

$a_C = 2\ m/s^2$

$\vartheta_D = 3\ m/s$

$R = 0,5\ m$

$\overline{AB} = 0,75\ m$



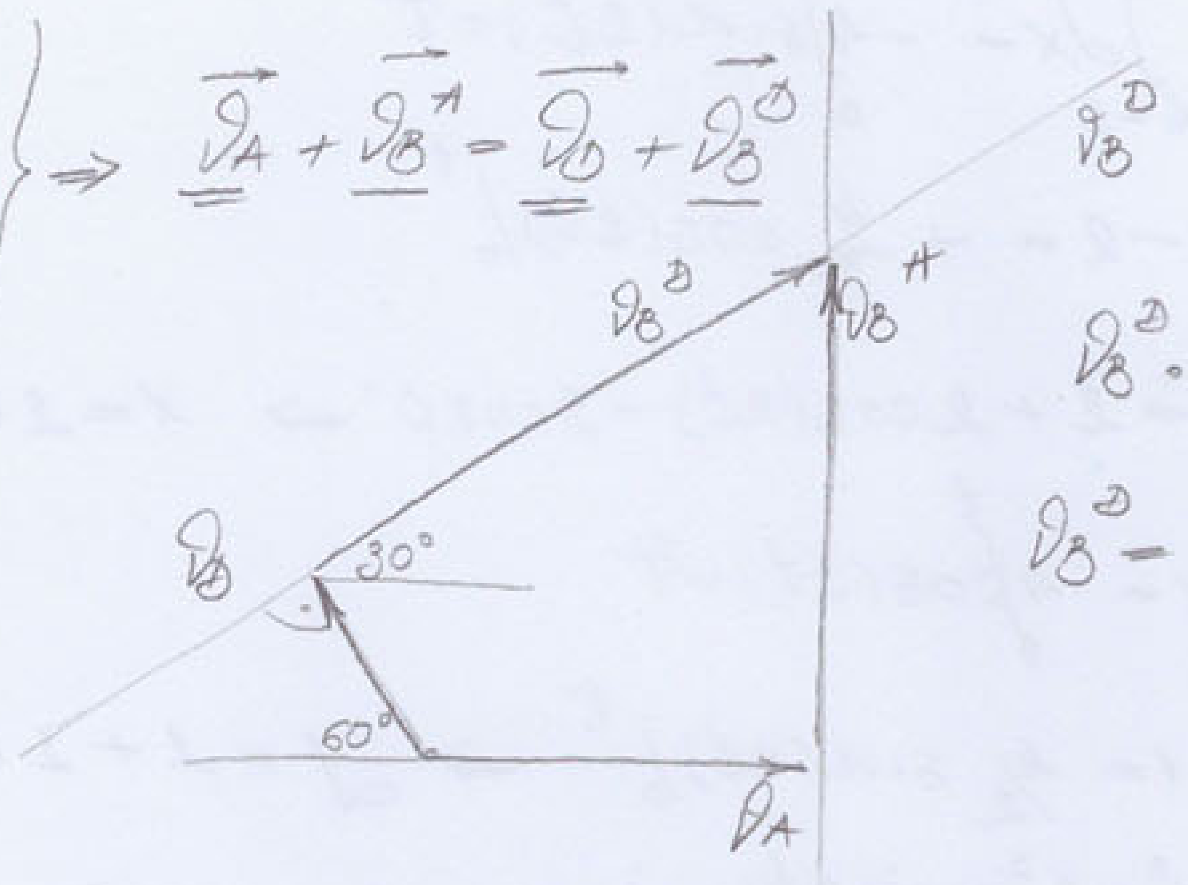
$\vartheta_A = 2\cdot\vartheta_C = 8\ m/s$

$\overline{BD}\cdot\sin 60^\circ = 2R$

$\overline{BD} = \frac{1}{\frac{\sqrt3}{2}} = \frac{2}{\sqrt3}\cdot\frac{\sqrt3}{\sqrt3} = \frac{2\sqrt3}{3}\ m$

$\vartheta_C = R\cdot\omega_T \Rightarrow \omega_T = \frac{4}{0,5} = 8\ s^{-1}$

$$\left.\begin{aligned}\vec{\vartheta}_B &= \underline{\underline{\vec{\vartheta}_A}} + \underline{\vec{\vartheta}_B^A}\\ \vec{\vartheta}_B &= \underline{\underline{\vec{\vartheta}_D}} + \underline{\vec{\vartheta}_B^D}\end{aligned}\right\} \Rightarrow \underline{\underline{\vec{\vartheta}_A}} + \underline{\vec{\vartheta}_B^A} = \underline{\underline{\vec{\vartheta}_D}} + \underline{\vec{\vartheta}_B^D}$$



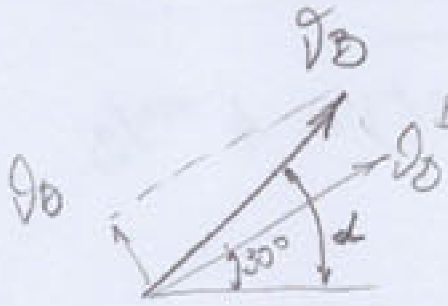
$\vartheta_B^D\cdot\cos 30^\circ = \vartheta_D\cos 60^\circ + \vartheta_A$

$\vartheta_B^D = \frac{3\cdot\frac12 + 8}{\frac{\sqrt3}{2}} = \frac{19\sqrt3}{3}\ m/s = 10,97\ m/s$

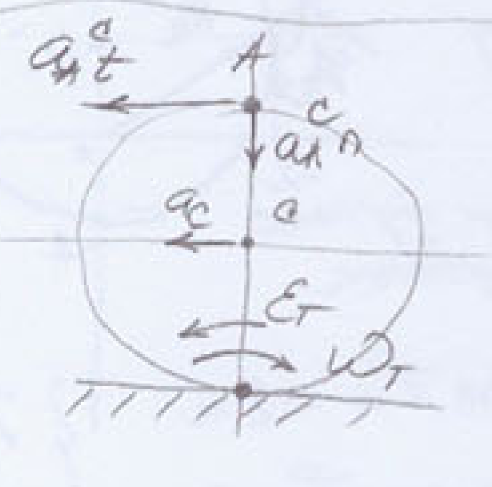
$\vec{\vartheta}_B = \underline{\underline{\vec{\vartheta}_D}} + \underline{\vec{\vartheta}_B^D}$

$$\left.\begin{aligned}\vartheta_{Bx} &= -\vartheta_D\cos 60^\circ + \vartheta_B^D\cos 30^\circ\\ \vartheta_{By} &= \vartheta_D\sin 60^\circ + \vartheta_B^D\sin 30^\circ\end{aligned}\right\} \dots \text{или}$$

$\vec{\vartheta}_D \perp \vec{\vartheta}_B^D \Rightarrow \underline{\vartheta_B} = \sqrt{\vartheta_D^2 + \vartheta_B^{D\,2}} = \sqrt{9 + \frac{361\cdot 3}{9}} = \underline{\underline{11,37}}\ m/s$



$\underline{\alpha} = 30^\circ + \operatorname{arctg}\frac{\vartheta_D}{\vartheta_B^D} \approx 45,3^\circ = 0,79\ rad$



$\varepsilon_T = ?$

$\cancel{\varepsilon_T = \dot{\omega}_T}$ не може јер не знамо ω_T у произвољном тренутку

$\vartheta_C = R\cdot\omega_T \,/\frac{d}{dt}$ може јер је растојање тачке C од пола брзина P_V познато у сваком тренутку ($R = const = \overline{CP_V}$)

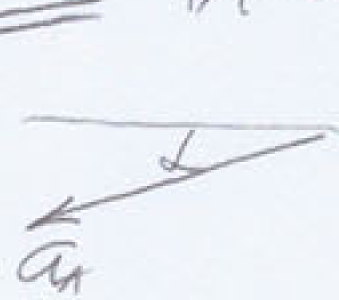
$a_C = R\cdot\varepsilon_T$

$\varepsilon_T = \frac{2}{\frac12} = 4\ s^{-2}$

$a_{At}^C = \overline{AC}\cdot\varepsilon_T = \frac12\cdot 4 = 2\ m/s^2$

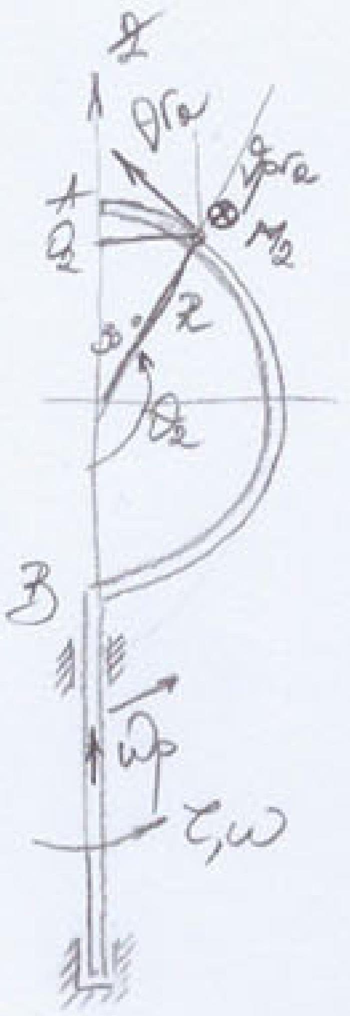
$a_{An}^C = \overline{AC}\cdot\omega_T^2 = \frac12\cdot 64 = 32\ m/s^2$

$\underline{\underline{a_A}} = \sqrt{(a_C + a_{At}^C)^2 + a_{An}^{C\,2}} = \sqrt{(2+2)^2 + 32^2} = \underline{\underline{32,25}}\ m/s^2$



$tg\alpha = \frac{a_{An}^C}{a_{At}^C + a_C} = \frac{32}{2+2} = 8 \Rightarrow \underline{\underline{\alpha = 82,87^\circ}}$

(3)



$\vartheta_r = \frac{5\pi t}{24}$

$R = 0{,}5\,m$

$\tau = \pi t$

$a_a, \vartheta_a (t_2 = 2s) = ?$

$\vec{\vartheta}_a = \vec{\vartheta}_{pr} + \vec{\vartheta}_r$

$S_r = \int_0^t \vartheta_r\,dt = \int_0^t \frac{5\pi t}{24}\,dt = \frac{5\pi}{24}\frac{t^2}{2}; \quad S_{r_2} = \frac{5\pi \cdot 4}{24 \cdot 2} = \frac{5\pi}{12}$

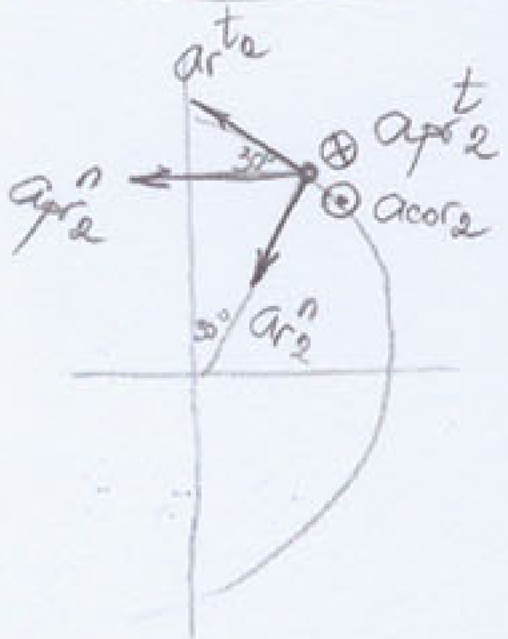
$S_{r_2} = R \cdot \theta_2 \Rightarrow \theta_2 = \frac{\frac{5\pi}{12}}{\frac{1}{2}} = \frac{5\pi}{6}\,rad = 150°$

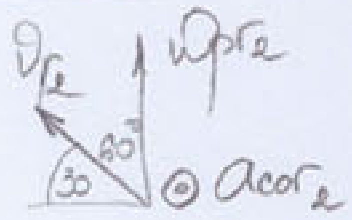
$\omega_p = \dot{\tau} = \pi$

$\vartheta_{pr_2} = \omega_{p_2} \cdot \overline{O_2M_2} = \pi \cdot R\sin 30° = \frac{\pi}{4}\,m/s; \quad \vartheta_{r_2} = \frac{5\pi \cdot 2}{24} = \frac{5\pi}{12}\,m/s$

$\vec{\vartheta}_r \perp \vec{\vartheta}_{pr} \Rightarrow \underline{\vartheta_{a_2}} = \sqrt{\vartheta_{p_2}^2 + \vartheta_{rel_2}^2} = \sqrt{\frac{\pi^2}{16} + \frac{25\pi^2}{144}} = \sqrt{\frac{9+25}{144}\pi^2} = \frac{\pi\sqrt{34}}{12}$

$= \underline{1{,}53\,m/s}$





$a_{cor_2} = 2 \cdot \omega_{pr_2} \cdot \vartheta_{r_2} \cdot \sin 60°$

$= 2 \cdot \pi \cdot \frac{5\pi}{12} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{5\sqrt{3}\pi^2}{12} = 7{,}12\,m/s^2$

$\varepsilon_{pr} = \dot{\omega}_{pr} = 0$

$a_{pr_2}^t = \overline{O_2M_2} \cdot \varepsilon_{pr} = 0$

$a_{pr_2}^n = \overline{O_2M_2} \cdot \omega_{pr}^2 = R\sin 30° \pi^2 = \frac{\pi^2}{4}\,m/s^2$

$a_r^t = \dot{\vartheta}_r = \frac{5\pi}{24}\,m/s^2$

$a_{r_2}^n = \frac{\vartheta_{r_2}^2}{R} = \frac{\frac{25\pi^2}{144}}{\frac{1}{2}} = \frac{25\pi^2}{72}\,m/s^2$

$a_{a_2} = \sqrt{(a_{cor_2} - a_{pr_2}^t)^2 + (a_{r_2}^n + a_{pr_2}^n \sin 30°)^2 + (a_{r_2}^t + a_{pr_2}^n \cos 30°)^2}$

$= \sqrt{\frac{25 \cdot 3 \cdot \pi^4}{144} + \left(\frac{25\pi^2}{72} + \frac{\pi^2}{4} \cdot \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{5\pi}{24} + \frac{\pi^2}{4} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \underline{8{,}96\,m/s^2}$