

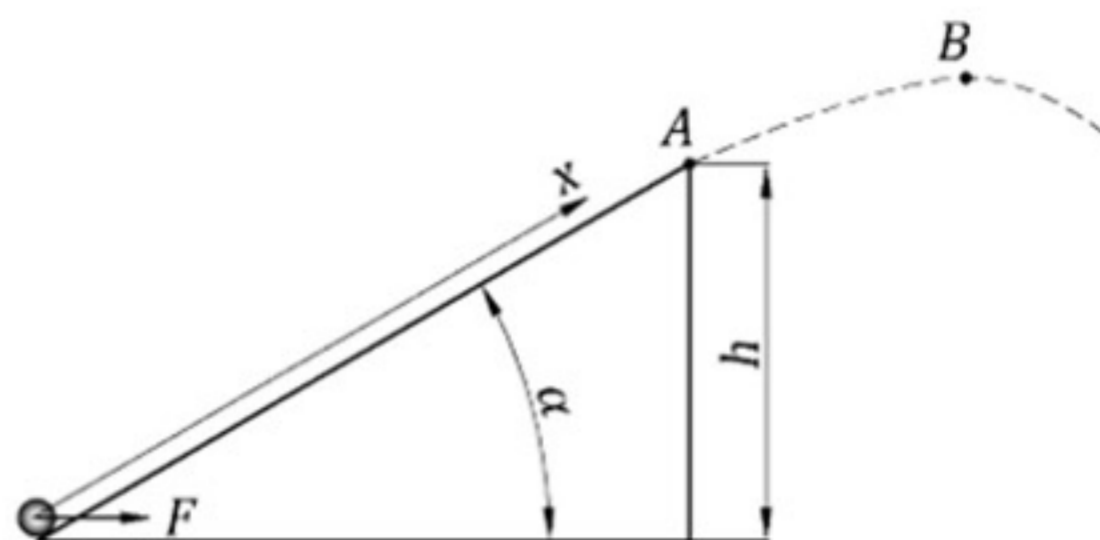
Примјер испитних задатака за ДРУГИ колоквијум из МЕХАНИКЕ (В2)

1. Тијело је започело кретање уз стрму равну нагиба $\alpha = 30^\circ$ под дејством хоризонталне силе која се мијења према закону $F = m(x + 20)$ [N], гдје је m маса тијела, а x његово растојање у правцу стрме равни. Коефицијент динамичког трења између тијела и подлоге је 0,5. Користећи се основном једначином динамике, одредити:

- убрзање и брзину тијела у највишој тачки стрме равни (A) која се налази на висини $h = 3$ m у односу на подлогу,

- положај тијела у тачки максималног пењања (B) након напуштања стрме равни, ако у тренутку напуштања престаје дејство хоризонталне силе F (отпор ваздуха сматрати занемарљивим),

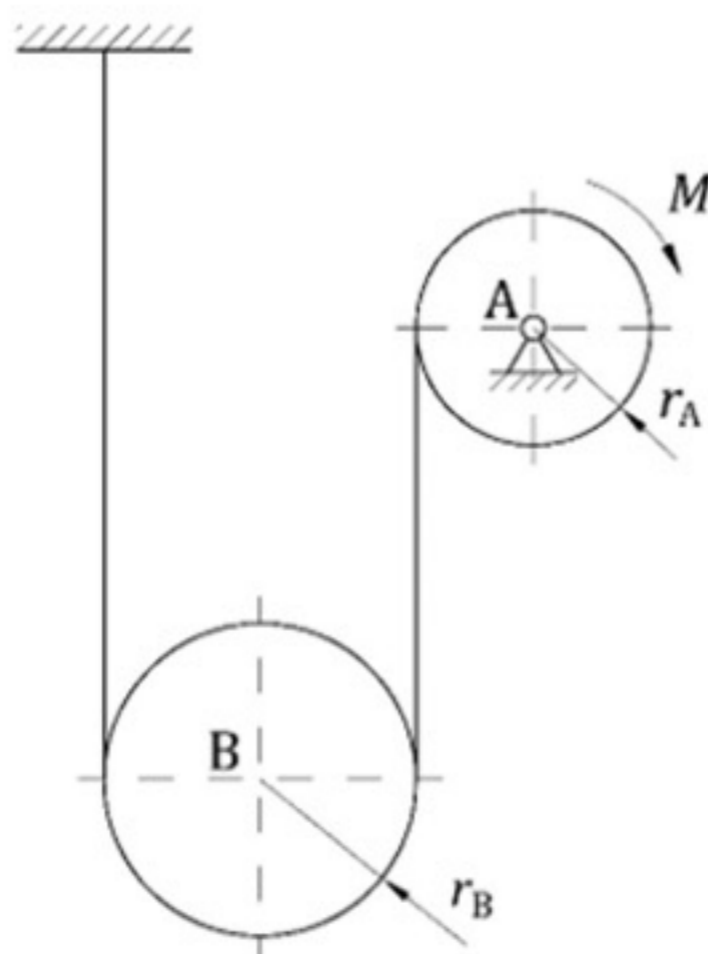
- једначину путање при слободном кретању тијела.



2. Два хомогена кружна диска, приказана на слици, почињу кретање из стања мировања усљед дејства константног момента $M = 4r_A m_A g$ [Nm] који погони диск А. Маса диска А је $m_A = 1$ kg, а диска В је четири пута већа.

- Одредити кинетичку енергију система у функцији брзине центра инерције диска В.

- Примјеном закона о промјени кинетичке енергије система, одредити брзину центра инерције диска В након што се диск подигне за висину $h = 0,408$ m.

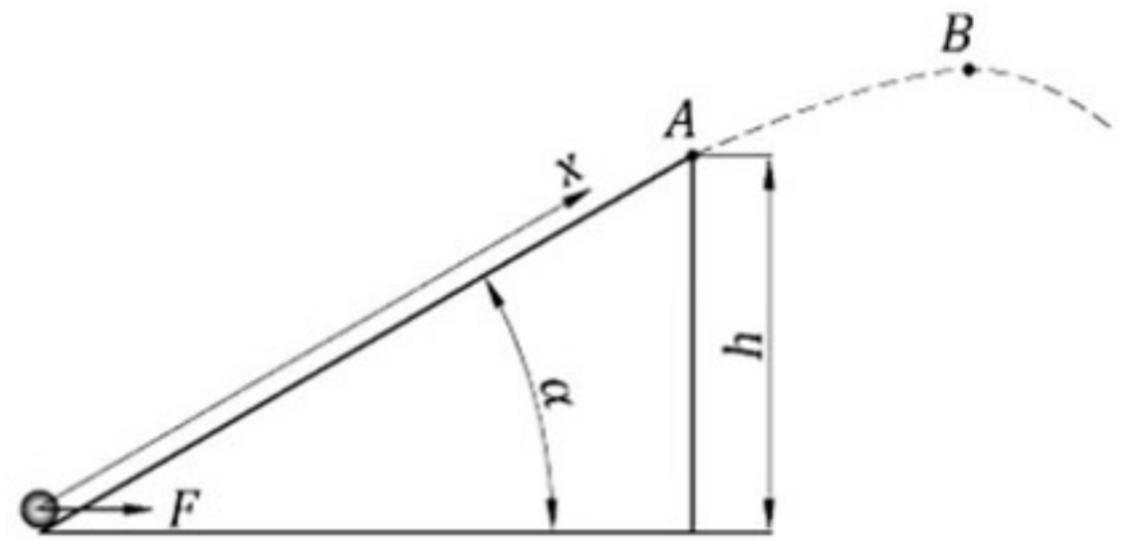


1. Тијело је започело кретање уз стрму раван нагиба $\alpha = 30^\circ$ под дејством хоризонталне силе која се мијења према закону $F = m(x + 20)$ [N], гдје је m маса тијела, а x његово растојање у правцу стрме равни. Коефицијент динамичког трења између тијела и подлоге је 0,5. Користећи се основном једначином динамике, одредити:

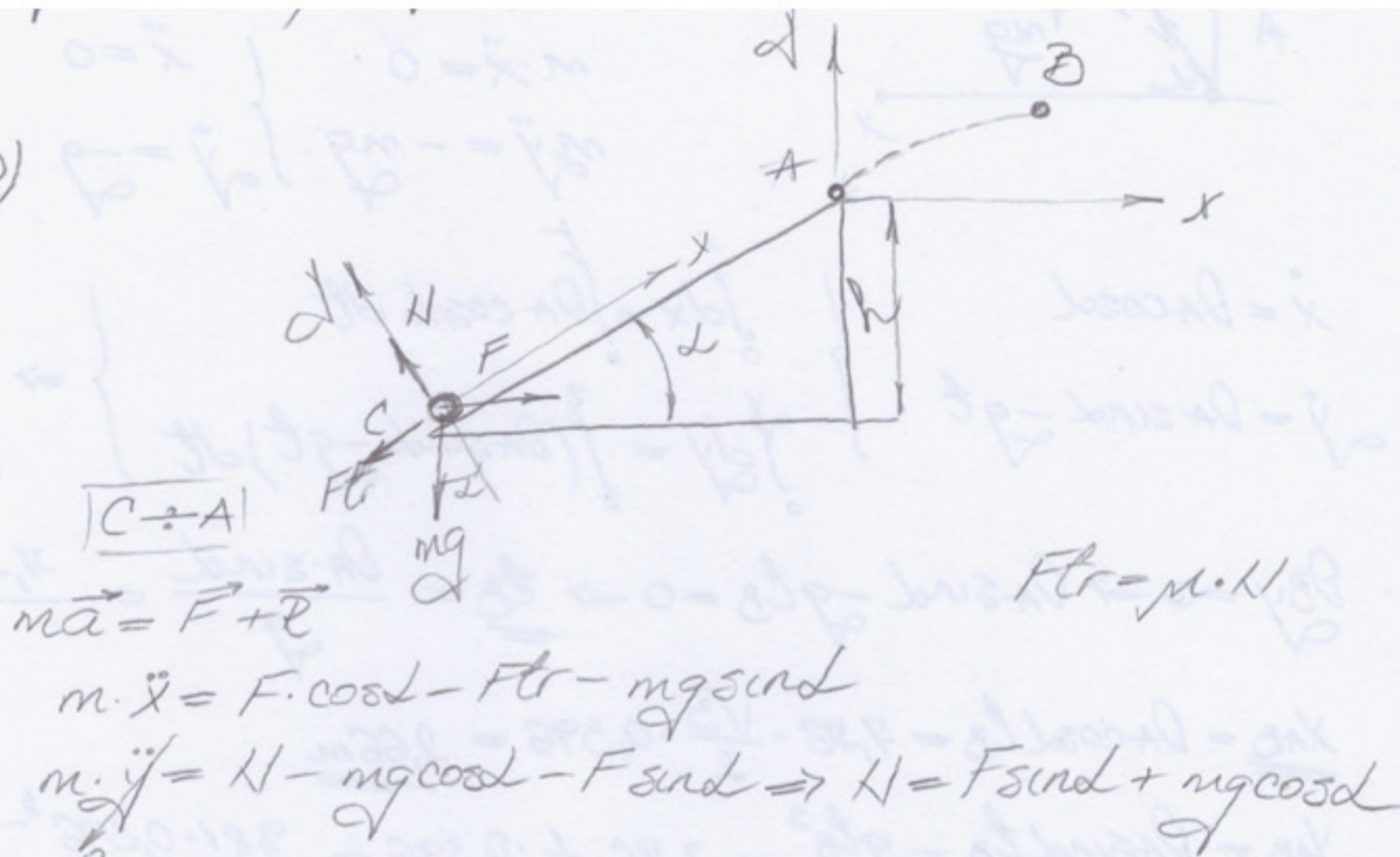
- убрзање и брзину тијела у највишој тачки стрме равни (A) која се налази на висини $h = 3$ m у односу на подлогу,

- положај тијела у тачки максималног пењања (B) након напуштања стрме равни, ако у тренутку напуштања престаје дејство хоризонталне силе F (отпор ваздуха сматрати занемарљивим),

- једначину путање при слободном кретању тијела.



$\alpha = 30^\circ$
 $F = m(x + 20)$
 $\mu = 0,5$
 $a_A, v_A = ?$
 $h = 3$ m
 $x_{AB}, y_{AO} = ?$
 $y(x) = ?$



$$m\ddot{x} = m(x + 20) \cos \alpha - \mu m(x + 20) \sin \alpha - \mu mg \cos \alpha - mg \sin \alpha \quad | : m$$

$$\ddot{x} = x \cos \alpha + 20 \cos \alpha - \mu x \sin \alpha - 20 \mu \sin \alpha - \mu g \cos \alpha - g \sin \alpha$$

$$\ddot{x} = (\cos \alpha - \mu \sin \alpha) \cdot x + 20(\cos \alpha - \mu \sin \alpha) - g(\sin \alpha + \mu \cos \alpha)$$

$$\ddot{x} = \frac{dx}{dt} = \frac{dx}{dt} \cdot \frac{dx}{dx} = \frac{\dot{x} dx}{dx}$$

$$a_A = (\cos \alpha - \mu \sin \alpha) \cdot x_A + 20(\cos \alpha - \mu \sin \alpha) - g(\sin \alpha + \mu \cos \alpha)$$

$$= (\cos \alpha - \mu \sin \alpha) \cdot \frac{h}{\sin \alpha} + 20(\cos \alpha - \mu \sin \alpha) - g(\sin \alpha + \mu \cos \alpha)$$

$$= \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 0,5 \cdot \frac{1}{2}\right) \cdot 2 \cdot 3 + 20\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 0,5 \cdot \frac{1}{2}\right) - 9,81\left(\frac{1}{2} + 0,5 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 6,86 \frac{m}{s^2}$$

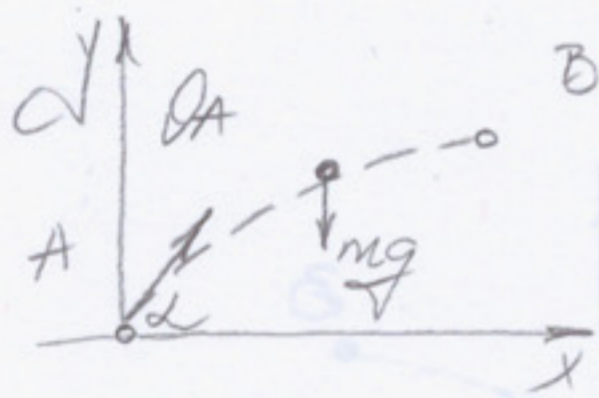
$$\dot{x} dx = \ddot{x} dx$$

$$\int_0^x \dot{x} dx = \int_0^x [(\cos \alpha - \mu \sin \alpha) \cdot (x+20) - g(\sin \alpha + \mu \cos \alpha)] dx$$

$$\frac{\dot{x}^2}{2} = (\cos \alpha - \mu \sin \alpha) \left(\frac{x^2}{2} + 20x \right) - g x (\sin \alpha + \mu \cos \alpha)$$

$$\underline{v_A = \dot{x}_A = \sqrt{2 \left[(\cos \alpha - \mu \sin \alpha) \left(\frac{h^2}{2 \sin^2 \alpha} + 20 \cdot \frac{h}{\sin \alpha} \right) - g \cdot \frac{h}{\sin \alpha} (\sin \alpha + \mu \cos \alpha) \right]}}$$

$$= \sqrt{2 \left[\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 0,5 \cdot \frac{1}{2} \right) \left(\frac{9 \cdot 4}{2} + 20 \cdot 3 \cdot 2 \right) - 9,81 \cdot 3 \cdot 2 \left(\frac{1}{2} + 0,5 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right]} = \underline{\underline{7,76 \text{ m/s}}}$$



В точке максимальной высоты $\rightarrow v_{By} = 0$

$$m \vec{a} = \vec{F}$$

$$m \cdot \ddot{x} = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} \ddot{x} = 0 \\ \ddot{y} = -g \end{array} \right.$$

$$m \ddot{y} = -mg \quad \left\{ \begin{array}{l} \ddot{x} = 0 \\ \ddot{y} = -g \end{array} \right.$$

$$\int_0^x dx = \int_0^t v_A \cos \alpha dt$$

$$\int_0^y dy = \int_0^t (v_A \sin \alpha - gt) dt$$

$$x = v_A \cos \alpha \cdot t$$

$$y = v_A \sin \alpha t - \frac{gt^2}{2}$$

$$\left. \begin{array}{l} \dot{x} = v_A \cos \alpha \\ \dot{y} = v_A \sin \alpha - gt \end{array} \right\} \int dx = \int v_A \cos \alpha dt \quad \left. \begin{array}{l} \int dy = \int (v_A \sin \alpha - gt) dt \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$v_{By} = 0 \rightarrow v_A \sin \alpha - gt_B = 0 \rightarrow \underline{t_B} = \frac{v_A \sin \alpha}{g} = \frac{7,76 \cdot 0,5}{9,81} = \underline{\underline{0,396 \text{ s}}}$$

$$\underline{x_{AB}} = v_A \cos \alpha t_B = 7,76 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 0,396 = \underline{\underline{2,66 \text{ m}}}$$

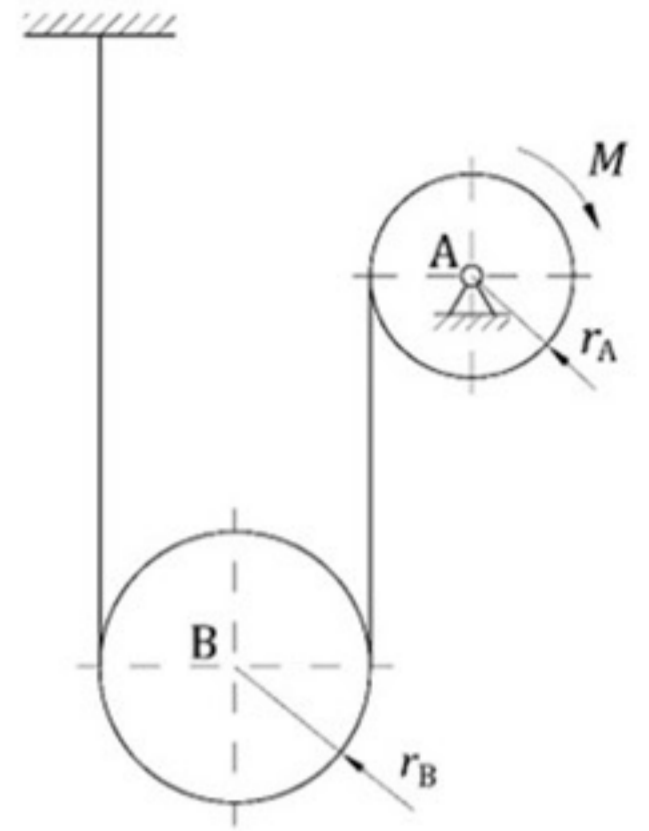
$$\underline{y_{AB}} = v_A \sin \alpha t_B - \frac{gt_B^2}{2} = 7,76 \cdot \frac{1}{2} \cdot 0,396 - \frac{9,81 \cdot 0,396^2}{2} = \underline{\underline{0,77 \text{ m}}}$$

$$x = v_A \cos \alpha \cdot t \rightarrow t = \frac{x}{v_A \cos \alpha}$$

$$y = v_A \sin \alpha \cdot \frac{x}{v_A \cos \alpha} - \frac{g}{2} \cdot \frac{x^2}{v_A^2 \cos^2 \alpha} \Rightarrow y = \text{tg } 30^\circ \cdot x - \frac{9,81}{2} \cdot \frac{x^2}{7,76^2 \cdot \frac{3}{4}}$$

$$\{ y = 0,58x - 0,11x^2 \} \rightarrow \text{парабола}$$

2. Два хомогена кружна диска, приказана на слици, почињу кретање из стања мировања услед дејства константног момента $M = 4r_A m_A g$ [Nm] који погони диск А. Маса диска А је $m_A = 2$ kg, а диска В је четири пута већа.
- Одредити кинетичку енергију система у функцији брзине центра инерције диска В.
 - Примјеном закона о промјени кинетичке енергије система, одредити брзину центра инерције диска В након што се диск подигне за висину $h = 20/9,81$ [m].



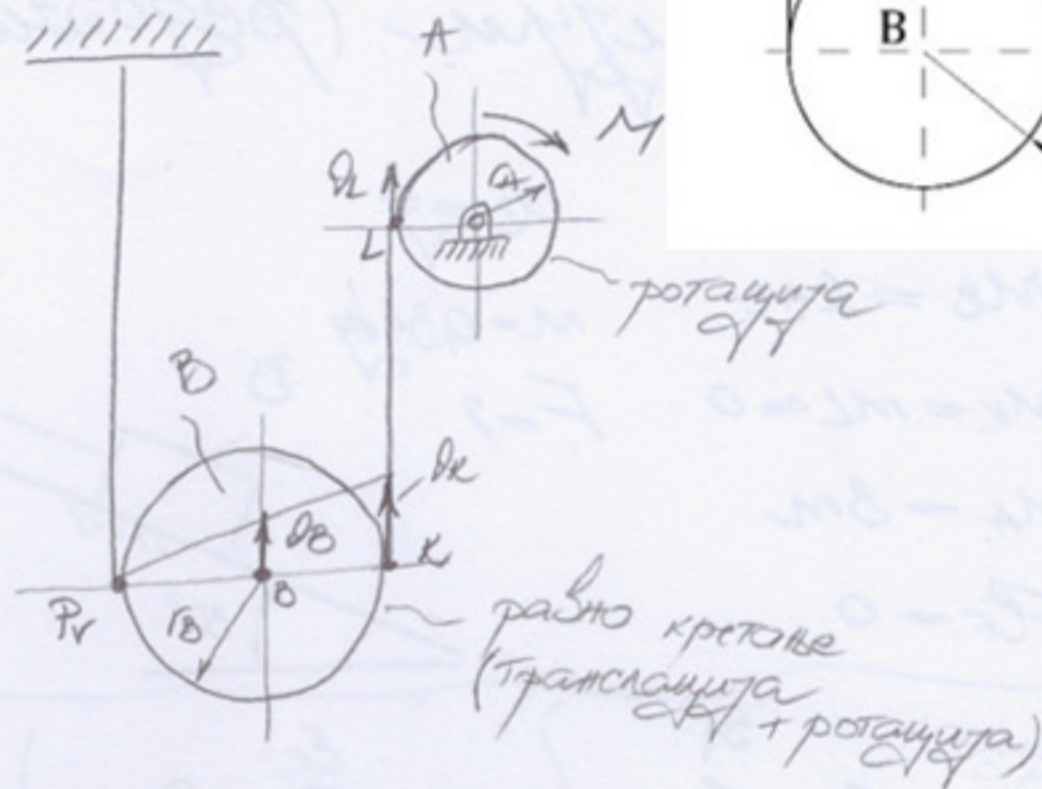
$$M = 4r_A m_A g$$

$$m_A = 2 \text{ kg}$$

$$m_B = 4m_A = 8 \text{ kg}$$

$$E_K(OB) = ?$$

$$v_O (h_0 = 0,408 \text{ m}) = ?$$



$$E_K = E_{KA}^{rot} + E_{KB}^{rot} + E_{KB}^{tr}$$

$$= \frac{J_A \cdot \omega_A^2}{2} + \frac{J_B \cdot \omega_B^2}{2} + \frac{m_B \cdot v_O^2}{2}$$

$$= \frac{m_A r_A^2}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{4v_O^2}{r_A^2} + \frac{m_B r_B^2}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{v_O^2}{r_B^2} + \frac{m_B v_O^2}{2}$$

$$= v_O^2 \left(m_A + \frac{m_B}{4} + \frac{m_B}{2} \right) = (1 + 1 + 2) v_O^2$$

$$v_O = r_B \cdot \omega_B \rightarrow \omega_B = \frac{v_O}{r_B}$$

$$\left. \begin{aligned} v_K &= 2r_B \cdot \omega_B \\ v_K &= v_L \\ v_L &= r_A \cdot \omega_A \end{aligned} \right\} \omega_A = \frac{2r_B}{r_A} \cdot \frac{v_O}{r_B}$$

$$\omega_A = \frac{2v_O}{r_A}$$

$$E_K = 4v_O^2$$

O (систем заборо кретање из мира)

$$E_{K1} - E_{K0} = A_{01}$$

$$A_{01} = A_{01}^{m_A g} + A_{01}^M = -m_B g \cdot h_{01} + M \cdot \varphi_{01}$$

$$= -m_B g \cdot h_{01} + 4r_A m_A g \cdot \frac{2h_{01}}{r_A}$$

$$= -4g h_{01} + 8g h_{01} = 4g h_{01}$$

$$4v_{01}^2 = 4g h_{01}$$

$$v_{01} = \sqrt{g h_{01}} = 2 \text{ m/s}$$

$$\left. \begin{aligned} v_K &= 2r_B \cdot \omega_B \\ v_O &= r_B \cdot \omega_B \end{aligned} \right\} \rightarrow v_K = 2v_O$$

$$\frac{dv_K}{dt} = 2 \cdot \frac{dv_O}{dt}$$

$$dv_K = 2 dv_O$$

$$s_K = 2 \cdot s_O$$

$$s_K = s_L = r_A \cdot \varphi_A$$

$$\varphi_A = \frac{s_K}{r_A} = \frac{2s_O}{r_A}$$

$$\varphi_{A01} = \frac{2 \cdot h_{01}}{r_A}$$