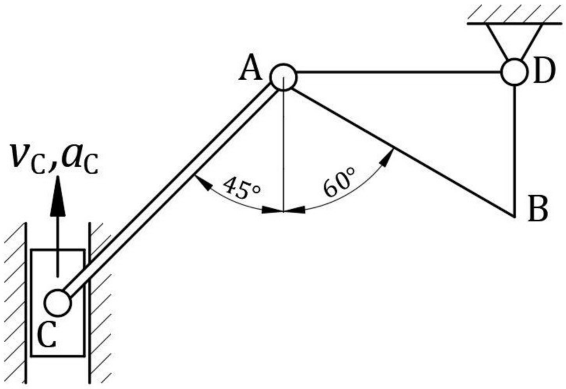
Универзитет Црне Горе | Група I
Електротехнички факултет Подгорица | 6.5.2022.

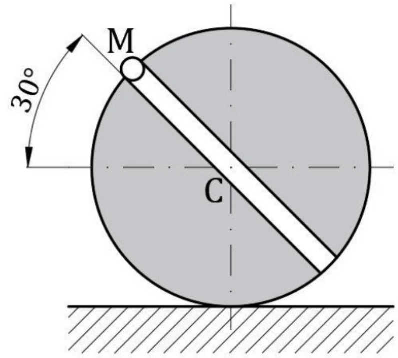
ПРВИ КОЛОКВИЈУМ ИЗ МЕХАНИКЕ

1. Брзина материјалне тачке мијења се према закону $\vec{v} = (3 - 4t)\vec{\imath} + 2t\vec{\jmath}$ (вријеме је у секундама, а брзина у m/s). Ако је кретање започела из положаја $M_0(1,2)$, одредити:
   - угао између вектора положаја и вектора убрзања тачке након једне секунде од почетка кретања;
   - нормално убрзање тачке након једне секунде од почетка кретања.

2. У положају механизма приказаном на слици клизач C има брзину од 1 m/s и убрзање од 2 $\mathrm{m/s^2}$. Одредити брзину тачке B и убрзање зглоба A за приказани положај механизма, ако је $\overline{\mathrm{AC}} = 1{,}2$ m и $\overline{\mathrm{AB}} = 1$ m.



3. Цилиндар пречника 3 m котрља се без клизања по подлози крећући се удесно. Кретање је започео брзином од 1 m/s. Његово угаоно убрзање се мијења према закону $\varepsilon = 4t$. Кроз најдужу тетиву је урезан канал унутар кога се креће материјална тачка M према закону $\overline{\mathrm{CM}} = Rt^2/4$, гдје је C средиште цилиндра, а R његов полупречник. Након двије секунде од почетка кретања систем заузима положај приказан на слици. Одредити интензитет апсолутне брзине и апсолутног убрзања тачке M у посматраном положају.



Предметни наставник:
Проф. др Оливера Јовановић

Сарадник:
Раде Грујичић

ПРВИ ЗАДАТАК

$$\vec{\boldsymbol{v}} = (\mathbf{3} - \mathbf{4}\boldsymbol{t})\vec{\boldsymbol{\imath}} + \mathbf{2}\boldsymbol{t}\vec{\boldsymbol{\jmath}}, \qquad \mathbf{M_0}(\mathbf{1}, \mathbf{2})$$

<u>угао између вектора положаја и вектора убрзања тачке након једне секунде од почетка кретања</u>

$$\left.\begin{aligned} v_x &= 3 - 4t \\ v_x &= \frac{dx}{dt} \end{aligned}\right\} \Rightarrow dx = (3 - 4t)dt \Rightarrow \int_{x_0=1}^{x} dx = \int_0^t (3 - 4t)dt \Rightarrow x = 1 + 3t - 2t^2$$

$$\left.\begin{aligned} v_y &= 2t \\ v_y &= \frac{dy}{dt} \end{aligned}\right\} \Rightarrow dy = 2tdt \Rightarrow \int_{y_0=2}^{y} dy = \int_0^t 2tdt \Rightarrow y = 2 + t^2$$

$$\vec{r} = (1 + 3t - 2t^2)\vec{\imath} + (2 + t^2)\vec{\jmath} \Rightarrow \boxed{\vec{r}_1 = 2\vec{\imath} + 3\vec{\jmath} \Rightarrow r_1 = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}}$$

$$\left.\begin{aligned} v_x &= 3 - 4t \\ a_x &= \frac{dv_x}{dt} \end{aligned}\right\} \Rightarrow a_x = -4, \qquad \left.\begin{aligned} v_y &= 2t \\ a_y &= \frac{dv_y}{dt} \end{aligned}\right\} \Rightarrow a_y = 2$$

$$\vec{a} = -4\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} \Rightarrow \boxed{\vec{a}_1 = -4\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} \Rightarrow a_1 = \sqrt{20}}$$

$$\alpha = \measuredangle(\vec{r}_1, \vec{a}_1)$$

$$\cos\alpha = \frac{\vec{r}_1 \cdot \vec{a}_1}{r_1 a_1} = \frac{(2\vec{\imath} + 3\vec{\jmath}) \cdot (-4\vec{\imath} + 2\vec{\jmath})}{\sqrt{13}\sqrt{20}} = \frac{-8 + 6}{\sqrt{260}} = -\frac{2}{\sqrt{260}} = -0{,}124 \Rightarrow \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{97{,}13°}$$

<u>нормално убрзање тачке након једне секунде од почетка кретања</u>

$$\vec{v} = (3 - 4t)\vec{\imath} + 2t\vec{\jmath} \Rightarrow v = \sqrt{(3 - 4t)^2 + 4t^2}$$

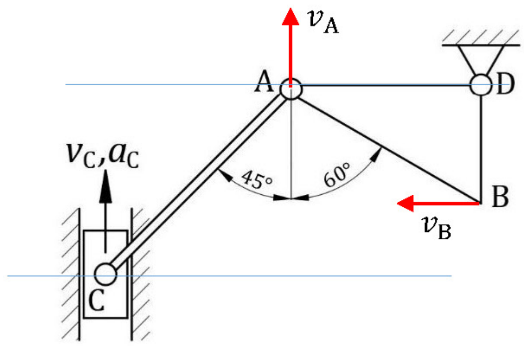
$$a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{1}{2\sqrt{(3 - 4t)^2 + 4t^2}}[2(3 - 4t)(-4) + 8t] = \frac{-12 + 20t}{\sqrt{(3 - 4t)^2 + 4t^2}} \Rightarrow \boxed{a_{t_1} = \frac{8}{\sqrt{5}}}$$

$$a^2 = a_t^2 + a_n^2 \Rightarrow \boldsymbol{a_{n_1}} = \sqrt{a_1^2 - a_{t_1}^2} = \sqrt{20 - \frac{64}{5}} = \sqrt{\frac{36}{5}} = \mathbf{2{,}683}\ \frac{\mathbf{m}}{\mathbf{s^2}}$$

ДРУГИ ЗАДАТАК

$$\boldsymbol{v}_{\mathrm{C}} = \mathbf{1\ m/s}, \qquad \boldsymbol{a}_{\mathrm{C}} = \mathbf{2\ m/s^2}, \qquad \overline{\mathbf{AC}} = \mathbf{1,2\ m}, \qquad \overline{\mathbf{AB}} = \mathbf{1\ m}$$

<u>брзина тачке B</u>



Зглоб A, као саставни дио троугаоне плоче, врши кружно кретање око непомичног ослонца D. Стога је правац брзине тачке A управан на линију која спаја тачку A и центар ротације D.

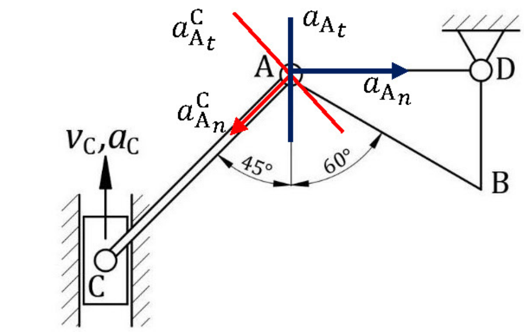
Нормала на правац брзине тачке C и нормала на правац брзине тачке A сијеку се у бесконачности. То значи да полуга AC врши тренутну транслацију. То даље значи да је $\vec{v}_{\mathrm{A}} = \vec{v}_{\mathrm{C}} \Rightarrow \boxed{v_{\mathrm{A}} = 1\ \mathrm{m/s}}$.

Зглоб B, као саставни дио троугаоне плоче, врши кружно кретање око непомичног ослонца D. Стога је правац брзине тачке B управан на линију која спаја тачку B и центар ротације D.

$$\left.\begin{aligned} v_{\mathrm{A}} &= 1\ \mathrm{m/s} \\ v_{\mathrm{A}} &= \overline{\mathrm{AD}}\omega_{\triangle} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \omega_{\triangle} = \frac{1}{\overline{\mathrm{AD}}} = \frac{1}{\overline{\mathrm{AB}}\cos 30^\circ} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\boldsymbol{v}_{\mathbf{B}} = \overline{\mathrm{BD}}\omega_{\triangle} = \overline{\mathrm{AB}}\sin 30^\circ\,\omega_{\triangle} = \frac{1}{2}\frac{2\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{\mathbf{3}}}{\mathbf{3}} = \mathbf{0,577}\ \frac{\mathbf{m}}{\mathbf{s}}$$

<u>убрзање зглоба A</u>



Полуга AC врши равно кретање. Примјењујемо теорему о убрзањима:

$$\vec{a}_{\mathrm{A}} = \underline{\underline{\vec{a}_{\mathrm{C}}}} + \underline{\vec{a}_{\mathrm{A}_t}^{\mathrm{C}}} + \underline{\underline{\vec{a}_{\mathrm{A}_n}^{\mathrm{C}}}}$$

Зглоб A, као саставни дио троугаоне плоче, врши кружно кретање око непомичног ослонца D, па има тангенцијалну и нормалну компоненту убрзања.

$$\vec{a}_{\mathrm{A}} = \underline{\vec{a}_{\mathrm{A}_t}} + \underline{\underline{\vec{a}_{\mathrm{A}_n}}}$$

Изједначавањем претходне двије векторске релације добијамо:

$$\underline{\underline{\vec{a}_{\mathrm{C}}}} + \underline{\vec{a}^{\mathrm{C}}_{\mathrm{A}_t}} + \underline{\underline{\vec{a}^{\mathrm{C}}_{\mathrm{A}_n}}} = \underline{\vec{a}_{\mathrm{A}_t}} + \underline{\underline{\vec{a}_{\mathrm{A}_n}}}$$

$$a^{\mathrm{C}}_{\mathrm{A}_n} = \overline{\mathrm{AC}}\omega^2_{\mathrm{AC}} = 0 \qquad (\omega_{\mathrm{AC}} = 0 \text{ јер полуга AC врши тренутну транслацију})$$

$$a_{\mathrm{A}_n} = \overline{\mathrm{AD}}\omega^2_{\Delta} = \overline{\mathrm{AB}}\cos 30^\circ\, \omega^2_{\Delta} = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{12}{9} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\underline{\underline{\vec{a}_{\mathrm{C}}}} + \underline{\vec{a}^{\mathrm{C}}_{\mathrm{A}_t}} + \underline{\underline{\vec{a}^{\mathrm{C}}_{\mathrm{A}_n}}} = \underline{\vec{a}_{\mathrm{A}_t}} + \underline{\underline{\vec{a}_{\mathrm{A}_n}}}$$

$$x:\; -a^{\mathrm{C}}_{\mathrm{A_t}}\frac{\sqrt{2}}{2} - a^{\mathrm{C}}_{\mathrm{A_n}}\frac{\sqrt{2}}{2} = a_{\mathrm{A}_n}, \qquad \ldots(*)$$

$$y:\; a_{\mathrm{C}} + a^{\mathrm{C}}_{\mathrm{A_t}}\frac{\sqrt{2}}{2} - a^{\mathrm{C}}_{\mathrm{A_n}}\frac{\sqrt{2}}{2} = a_{\mathrm{A}_t}, \qquad \ldots(\#)$$

$$(*) \Rightarrow a^{\mathrm{C}}_{\mathrm{A_t}} = -a^{\mathrm{C}}_{\mathrm{A_n}} - a_{\mathrm{A}_n}\sqrt{2} = -\frac{2\sqrt{3}}{3}\sqrt{2} = -\frac{2\sqrt{6}}{3}$$

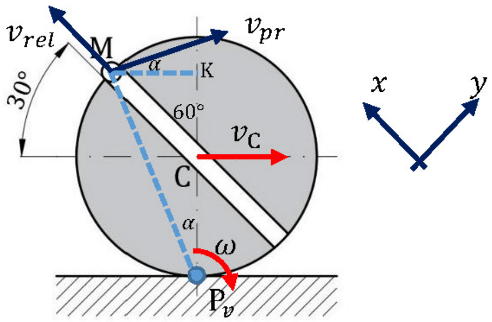
$$(\#) \Rightarrow \boxed{a_{\mathrm{A}_t}} = a_{\mathrm{C}} + a^{\mathrm{C}}_{\mathrm{A_t}}\frac{\sqrt{2}}{2} - a^{\mathrm{C}}_{\mathrm{A_n}}\frac{\sqrt{2}}{2} = 2 - \frac{2\sqrt{6}}{3}\frac{\sqrt{2}}{2} = \boxed{2 - \frac{2\sqrt{3}}{3} = 0{,}845}$$

$$\boldsymbol{a}_{\mathbf{A}} = \sqrt{a^2_{\mathrm{A}_t} + a^2_{\mathrm{A}_n}} = \sqrt{\left(2 - \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2 + \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \mathbf{1{,}431}\ \frac{\mathbf{m}}{\mathbf{s^2}}$$

ТРЕЋИ ЗАДАТАК

$$\boldsymbol{2R = 3\ \mathrm{m}}, \qquad \boldsymbol{v_{C_0} = 1\ \mathrm{m/s}}, \qquad \boldsymbol{\varepsilon = 4t}, \qquad \boldsymbol{\overline{\mathrm{CM}} = Rt^2/4}$$

<u>апсолутна брзина тачке</u>



<u>Одређивање потребних геометријских карактеристика</u>

$$\overline{\mathrm{MK}} = \overline{\mathrm{MC}}\sin 60° = R\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{4}$$

$$\overline{\mathrm{CK}} = \overline{\mathrm{MC}}\cos 60° = R\frac{1}{2} = \frac{3}{4}$$

$$\overline{\mathrm{KP}_v} = \overline{\mathrm{KC}} + \overline{\mathrm{CP}_v} = \overline{\mathrm{KC}} + R = \frac{3}{4} + \frac{3}{2} = \frac{9}{4}$$

$$\overline{\mathrm{MP}_v} = \sqrt{\overline{\mathrm{MK}}^2 + \overline{\mathrm{KP}_v}^2} = \sqrt{\frac{27}{16} + \frac{81}{16}} = \sqrt{\frac{108}{16}} = \sqrt{\frac{36 \cdot 3}{16}} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin\alpha = \frac{\overline{\mathrm{MK}}}{\overline{\mathrm{MP}_v}} = \frac{\frac{3\sqrt{3}}{4}}{\frac{3\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 30°$$

Пошто се цилиндар по подлози котрља без клизања, онда нема проклизавања између цилиндра и подлоге, па контактна тачка има исту брзину и на цилиндру и на подлози. Пошто подлога мирује, брзина контактне тачке је једнака нули, а тачка чија је брзина једнака нули представља пол брзина.

Дакле, преносно кретање је равно. Брзине тачака тијела које врши равно кретање најлакше је одредити у односу на пол брзина.

$$\boxed{v_{pr} = \overline{\mathrm{MP}_v}\omega}$$

$$\left.\begin{aligned} v_{C_0} &= 1\ \mathrm{m/s} \\ v_C &= \overline{\mathrm{CP}_v}\omega = R\omega \end{aligned}\right\} \Rightarrow R\omega_0 = 1 \Rightarrow \omega_0 = \frac{1}{R} = \frac{2}{3}\ \mathrm{s}^{-1}$$

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon &= 4t \\ \varepsilon &= \frac{d\omega}{dt} \end{aligned}\right\} \Rightarrow d\omega = 4tdt \Rightarrow \int_{\omega_0=2/3}^{\omega} d\omega = 4\int_0^t tdt \Rightarrow \omega = \frac{2}{3} + 2t^2$$

$$\omega_2 = \frac{2}{3} + 2 \cdot 2^2 = \frac{26}{3}\ \mathrm{s}^{-1}$$

$$\boxed{v_{pr_2}} = \overline{\mathrm{M}_2\mathrm{P}_v}\omega_2 = \frac{3\sqrt{3}}{2}\frac{26}{3} = \boxed{13\sqrt{3}\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}$$

Релативно кретање је праволинијско. Познат је закон релативног кретања. Релативну брзину добијамо као први извод, по времену, од закона кретања.

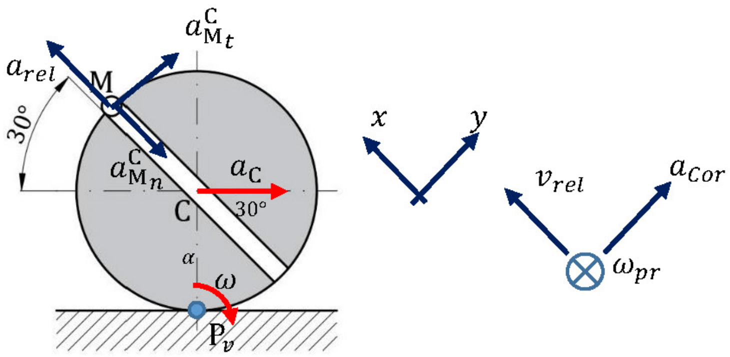
$$v_{rel} = \frac{d\overline{\mathrm{CM}}}{dt} = \frac{Rt}{2} \Rightarrow \boxed{v_{rel_2} = \frac{3}{2}\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}$$

$$v_{a_{x_2}} = v_{rel_2} - v_{pr_2}\cos(\alpha + 30°) = \frac{3}{2} - 13\sqrt{3}\cos 60° = \frac{3}{2} - \frac{13\sqrt{3}}{2} = \frac{3 - 13\sqrt{3}}{2}$$

$$v_{a_{y_2}} = v_{pr_2}\sin(\alpha + 30°) = 13\sqrt{3}\sin 60° = 13\sqrt{3}\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{39}{2}$$

$$\boldsymbol{v_{a_2}} = \sqrt{{v_{a_{x_2}}}^2 + {v_{a_{y_2}}}^2} = \sqrt{\left(\frac{3 - 13\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{39}{2}\right)^2} = \mathbf{21{,}805\ \frac{m}{s}}$$

<u>апсолутно убрзање тачке</u>



<u>Преносно</u> кретање је равно. Убрзања тачака тијела које врши равно кретање одређују се помоћу теореме о убрзањима.

$$\vec{a}_{pr_2} = \vec{a}_{\mathrm{C}_2} + \vec{a}^{\mathrm{C}}_{\mathrm{M}t_2} + \vec{a}^{\mathrm{C}}_{\mathrm{M}n_2}$$

$$v_C = \underbrace{\overline{\mathrm{CP}_v}}_{\mathrm{const}}\ \omega \Rightarrow \frac{dv_C}{dt} = \underbrace{\overline{\mathrm{CP}_v}}_{\mathrm{const}}\ \frac{d\omega}{dt} \Rightarrow a_{C_t} = a_C = \underbrace{\overline{\mathrm{CP}_v}}_{\mathrm{const}}\ \varepsilon \Rightarrow \boxed{a_{C_2}} = \frac{3}{2}4 \cdot 2 = \boxed{12\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}$$

$$a^{\mathrm{C}}_{\mathrm{M}t} = \overline{\mathrm{MC}}\varepsilon \Rightarrow \boxed{a^{\mathrm{C}}_{\mathrm{M}t_2}} = \overline{\mathrm{M}_2\mathrm{C}}\varepsilon = R\varepsilon_2 = \frac{3}{2}4 \cdot 2 = \boxed{12\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}$$

$$a^{\mathrm{C}}_{\mathrm{M}n} = \overline{\mathrm{MC}}\omega^2 \Rightarrow \boxed{a^{\mathrm{C}}_{\mathrm{M}n_2}} = \overline{\mathrm{M}_2\mathrm{C}}\omega_2^2 = R\omega_2^2 = \frac{3}{2}\left(\frac{26}{3}\right)^2 = \boxed{\frac{338}{3}\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}$$

<u>Релативно</u> кретање је праволинијско. Према томе, постоји само једна (тангенцијална) компонента релативног убрзања, која се добија као извод релативне брзине.

$$a_{rel} = \frac{dv_{rel}}{dt} = \frac{R}{2} = \frac{3}{4} \Rightarrow \boxed{a_{rel_2} = \frac{3}{4}\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}$$

<u>Кориолисово убрзање</u>

$$\vec{a}_{Cor} = 2\vec{\omega}_{pr} \times \vec{v}_{rel}$$

$$\boxed{a_{Cor_2}} = 2\omega_{pr_2} v_{rel_2} \sin 90° = 2 \cdot \frac{26}{3} \cdot \frac{3}{2} \cdot 1 = \boxed{26\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}$$

Апсолутно убрзање

$$\vec{a}_{a_2} = \vec{a}_{pr_2} + \vec{a}_{rel_2} + \vec{a}_{Cor_2} = \vec{a}_{\mathrm{C}_2} + \vec{a}^{\mathrm{C}}_{\mathrm{M}_{t_2}} + \vec{a}^{\mathrm{C}}_{\mathrm{M}_{n_2}} + \vec{a}_{rel_2} + \vec{a}_{Cor_2}$$

$$a_{a_{x_2}} = -a_{\mathrm{C}_2} \cos 30° - a^{\mathrm{C}}_{\mathrm{M}_{n_2}} + a_{rel_2} = -12\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{338}{3} + \frac{3}{4} = -6\sqrt{3} - \frac{1343}{12}$$

$$a_{a_{y_2}} = a_{\mathrm{C}_2} \sin 30° + a^{\mathrm{C}}_{\mathrm{M}_{t_2}} + a_{Cor_2} = 12\frac{1}{2} + 12 + 26 = 44$$

$$\boldsymbol{a_{a_2}} = \sqrt{a_{a_{x_2}}^{\ 2} + a_{a_{y_2}}^{\ 2}} = \sqrt{\left(-6\sqrt{3} - \frac{1343}{12}\right)^2 + 44^2} = \mathbf{129{,}98\ \frac{m}{s^2}}$$