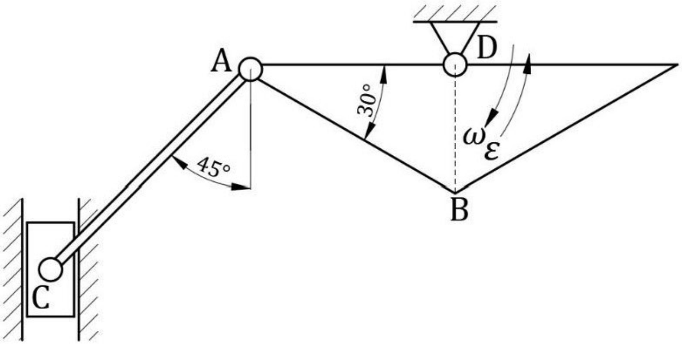
Универзитет Црне Горе | | Група II
Електротехнички факултет Подгорица | | 6.5.2022.

ПРВИ КОЛОКВИЈУМ ИЗ МЕХАНИКЕ

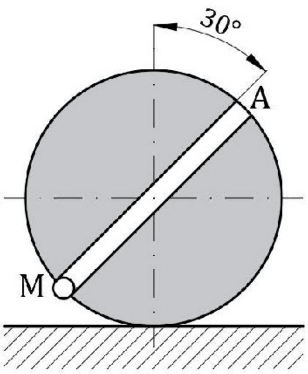
1. Положај материјалне тачке мијења се према закону $\vec{r} = [\sin(2t) + 2]\vec{\imath} + t\vec{\jmath}$ (вријеме је у секундама, а дужине у m). Одредити:

- полупречник кривине путање у тренутку $\pi/3$ s;
- линију путање и путању тачке.

2. У положају механизма приказаном на слици троугаона плоча има угаону брзину од 1 rad/s и угаоно убрзање од 2 rad/s^2. Одредити брзину и убрзање клизача C за приказани положај механизма, ако је $\overline{\mathrm{CA}} = 1{,}2$ m и $\overline{\mathrm{BD}} = 0{,}5$ m.



3. Цилиндар пречника 4 m клиза се без котрљања по подлози крећући се удесно. Кретање је започео брзином од 1 m/s. Његово убрзање је константно и износи 1 m/s^2. Кроз најдужу тетиву је урезан канал унутар кога се креће материјална тачка M према закону $\overline{\mathrm{AM}} = Rt^2/2$, гдје је R полупречник цилиндра. Након двије секунде од почетка кретања систем заузима положај приказан на слици. Одредити интензитет апсолутне брзине и апсолутног убрзања тачке M у посматраном положају.



Предметни наставник: Проф. др Оливера Јовановић

Сарадник: Раде Грујичић

ПРВИ ЗАДАТАК

$$\vec{\boldsymbol{r}} = [\sin(2\boldsymbol{t}) + 2]\vec{\boldsymbol{\imath}} + \boldsymbol{t}\vec{\boldsymbol{\jmath}}$$

<u>полупречник кривине путање у тренутку $\pi/3$ s</u>

$$a_n = \frac{v^2}{R_k} \Rightarrow R_k = \frac{v^2}{a_n}$$

$$a^2 = a_t^2 + a_n^2 \Rightarrow a_n = \sqrt{a^2 - a_t^2}$$

$$\left.\begin{aligned} v_x &= \frac{dx}{dt} = 2\cos(2t) \\ v_y &= \frac{dy}{dt} = 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow v = \sqrt{4\cos^2(2t) + 1} \Rightarrow \boxed{v_{\pi/3}} = \sqrt{4\cos^2\left(\frac{2\pi}{3}\right) + 1} = \boxed{\sqrt{2}}$$

$$\left.\begin{aligned} a_x &= \frac{dv_x}{dt} = -4\sin(2t) \\ a_y &= \frac{dv_y}{dt} = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow a = 4\sin(2t) \Rightarrow \boxed{a_{\pi/3}} = 4\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 4\frac{\sqrt{3}}{2} = \boxed{2\sqrt{3}}$$

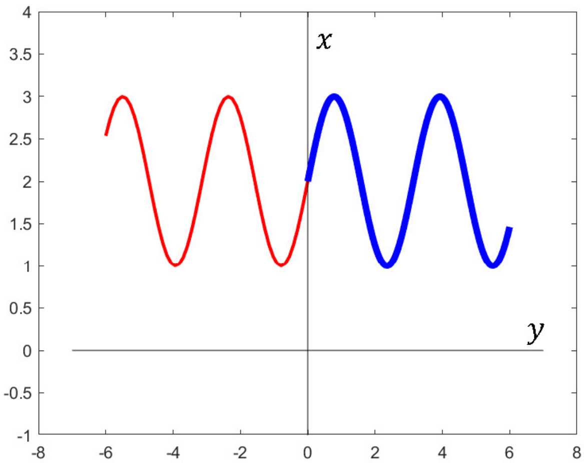
$$a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{1}{2\sqrt{4\cos^2(2t) + 1}}[-8\cos(2t)\sin(2t)\,2] = \frac{-4\sin(4t)}{\sqrt{4\cos^2(2t) + 1}}$$

$$\boxed{a_{t_{\pi/3}}} = \frac{-4\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)}{\sqrt{4\cos^2\left(\frac{2\pi}{3}\right) + 1}} = \frac{4\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \boxed{\sqrt{6}}$$

$$\boldsymbol{R_{k_{\pi/3}}} = \frac{v_{\pi/3}^2}{a_{n_{\pi/3}}} = \frac{v_{\pi/3}^2}{\sqrt{a_{\pi/3}^2 - a_{t_{\pi/3}}^2}} = \frac{2}{\sqrt{12 - 6}} = \frac{2}{\sqrt{6}}\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}} = \frac{\boldsymbol{\sqrt{6}}}{\boldsymbol{3}} = \boldsymbol{0,816\ \mathrm{m}}$$

<u>линија путање и путања тачке</u>

$$\left.\begin{aligned} x &= \sin(2t) + 2 \\ y &= t \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boldsymbol{x = \sin(2y) + 2}$$

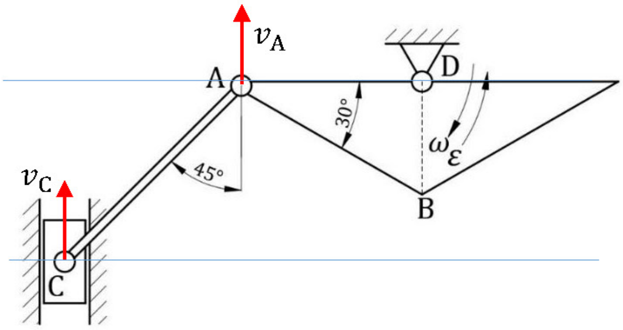


$$t \in [0, +\infty) \Rightarrow \left.\begin{aligned} x &= [1,3] \\ y &= [0, +\infty) \end{aligned}\right\}$$

ДРУГИ ЗАДАТАК

$$\boldsymbol{\omega_{\Delta} = 1\ \mathrm{rad/s}}, \qquad \boldsymbol{\varepsilon_{\Delta} = 2\ \mathrm{rad/s^2}}, \qquad \boldsymbol{\overline{\mathrm{CA}} = 1{,}2\ \mathrm{m}}, \qquad \boldsymbol{\overline{\mathrm{BD}} = 0{,}5\ \mathrm{m}}$$

<u>брзина клизача C</u>



Зглоб A, као саставни дио троугаоне плоче, врши кружно кретање око непомичног ослонца D. Стога је правац брзине тачке A управан на линију која спаја тачку A и центар ротације D.

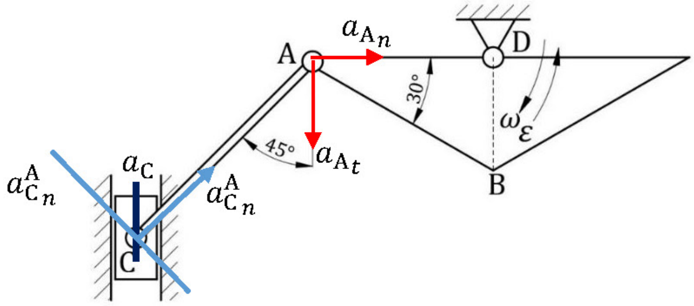
$$\overline{\mathrm{AD}} = \frac{\overline{\mathrm{BD}}}{\mathrm{tg}\,30^\circ} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3}}{2}\ \mathrm{m}$$

$$\boxed{v_\mathrm{A}} = \overline{\mathrm{AD}}\omega_{\Delta} = \boxed{\frac{\sqrt{3}}{2}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}$$

Зглоб C, као саставни дио клизача, врши праволинијско кретање. Стога је правац његове брзине дефинисан вођицама клизача (вертикалан).

Полуга AC врши равно кретање. Брзине тачака тијела које врши равно кретање најлакше је одредити помоћу пола брзина. Нормала на правац брзине тачке C и нормала на правац брзине тачке A сијеку се у бесконачности. То значи да полуга AC врши тренутну транслацију. То даље значи да је $\vec{v}_\mathrm{C} = \vec{v}_\mathrm{A} \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{v_\mathrm{C} = \sqrt{3}/2\ \mathrm{m/s}}}$.

<u>убрзање клизача C</u>



Зглоб A, као саставни дио троугаоне плоче, врши кружно кретање око непомичног ослонца D, па има тангенцијалну и нормалну компоненту убрзања.

$$\vec{a}_\mathrm{A} = \vec{a}_{\mathrm{A}t} + \vec{a}_{\mathrm{A}n}$$

$$a_{\mathrm{A}t} = \overline{\mathrm{AD}}\varepsilon_{\Delta} = \frac{\sqrt{3}}{2}2 = \sqrt{3}, \qquad a_{\mathrm{A}n} = \overline{\mathrm{AD}}\omega_{\Delta}^2 = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Зглоб C, као саставни дио клизача, врши праволинијско кретање. Стога има само тангенцијалну компоненту убрзања. Она је вертикалног правца.

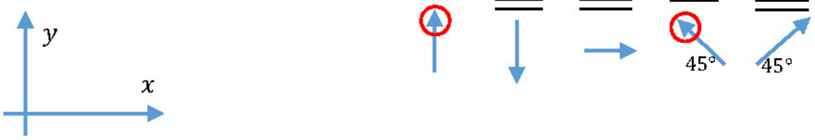
Полуга AC врши равно кретање. Примјењујемо теорему о убрзањима:

$$\vec{a}_{\mathrm{C}} = \vec{a}_{\mathrm{A}} + \vec{a}_{\mathrm{C}_t}^{\mathrm{A}} + \vec{a}_{\mathrm{C}_n}^{\mathrm{A}}$$

$$\underline{\vec{a}_{\mathrm{C}}} = \underline{\underline{\vec{a}_{\mathrm{A}_t}}} + \underline{\underline{\vec{a}_{\mathrm{A}_n}}} + \underline{\vec{a}_{\mathrm{C}_t}^{\mathrm{A}}} + \underline{\underline{\vec{a}_{\mathrm{C}_n}^{\mathrm{A}}}}$$

$$a_{\mathrm{C}_n}^{\mathrm{A}} = \overline{\mathrm{CA}}\omega_{\mathrm{AC}}^2 = 0 \qquad (\omega_{\mathrm{AC}} = 0 \text{ јер полуга AC врши тренутну транслацију})$$

$$\underline{\vec{a}_{\mathrm{C}}} = \underline{\underline{\vec{a}_{\mathrm{A}_t}}} + \underline{\underline{\vec{a}_{\mathrm{A}_n}}} + \underline{\vec{a}_{\mathrm{C}_t}^{\mathrm{A}}} + \underline{\underline{\vec{a}_{\mathrm{C}_n}^{\mathrm{A}}}}$$



$$x\colon 0 = a_{\mathrm{A}_n} - a_{\mathrm{C}_t}^{\mathrm{A}}\frac{\sqrt{2}}{2} + a_{\mathrm{C}_n}^{\mathrm{A}}\frac{\sqrt{2}}{2}, \qquad \dots(*)$$

$$y\colon a_{\mathrm{C}} = -a_{\mathrm{A}_t} + a_{\mathrm{C}_t}^{\mathrm{A}}\frac{\sqrt{2}}{2} + a_{\mathrm{C}_n}^{\mathrm{A}}\frac{\sqrt{2}}{2}, \qquad \dots(\#)$$

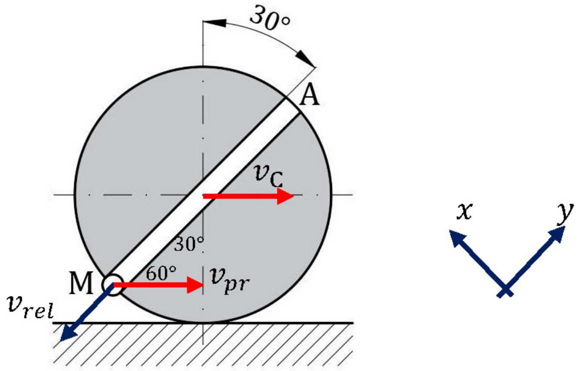
$$(*) \Rightarrow a_{\mathrm{C}_t}^{\mathrm{A}} = a_{\mathrm{A}_n}\sqrt{2} + a_{\mathrm{C}_n}^{\mathrm{A}} = \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{2} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

$$(\#) \Rightarrow \boldsymbol{a}_{\mathrm{C}} = -a_{\mathrm{A}_t} + a_{\mathrm{C}_t}^{\mathrm{A}}\frac{\sqrt{2}}{2} + a_{\mathrm{C}_n}^{\mathrm{A}}\frac{\sqrt{2}}{2} = -\sqrt{3} + \frac{\sqrt{6}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2} = \mathbf{-0,866\ \frac{m}{s^2}}$$

ТРЕЋИ ЗАДАТАК

$$\boldsymbol{2R = 4\ \mathrm{m}}, \qquad \boldsymbol{v_{C_0} = 1\ \mathrm{m/s}}, \qquad \boldsymbol{a_C = 1\ \mathrm{m/s^2}}, \qquad \boldsymbol{\overline{\mathrm{AM}} = Rt^2/2}$$

<u>апсолутна брзина тачке</u>



Пошто се цилиндар у потпуности клиза по подлози, то значи да ће вршити транслаторно кретање, тј. свака његова тачка ће се кретати на исти начин. Дакле, преносно кретање је транслаторно. У питању је праволинијска транслација, јер је подлога равна.

$$\left.\begin{aligned} a_C &= 1 \\ a_C &= \frac{dv_C}{dt} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \int_{v_{C_0}=1}^{v_C} dv_C = \int_0^t dt \Rightarrow v_C = 1 + t \Rightarrow v_{C_2} = 3$$

$$\boxed{v_{pr_2}} = v_{C_2} = \boxed{3\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}$$

Релативно кретање је праволинијско. Познат је закон релативног кретања. Релативну брзину добијамо као први извод, по времену, од закона кретања.

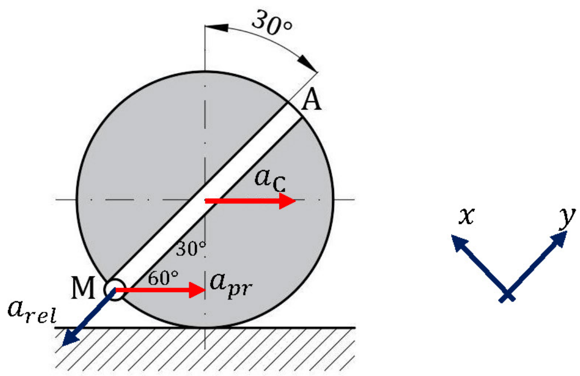
$$v_{rel} = \frac{d\overline{\mathrm{AM}}}{dt} = Rt \Rightarrow \boxed{v_{rel_2} = 4\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}$$

$$v_{a_{x_2}} = -v_{pr_2} \sin 60° = -\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$$v_{a_{y_2}} = v_{pr_2} \cos 60° - v_{rel_2} = 3\frac{1}{2} - 4 = -\frac{5}{2}$$

$$\boldsymbol{v_{a_2}} = \sqrt{{v_{a_{x_2}}}^2 + {v_{a_{y_2}}}^2} = \sqrt{\left(-\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(-\frac{5}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{52}}{2} = \boldsymbol{3,606\ \frac{m}{s}}$$

апсолутно убрзање тачке



Преносно кретање је праволинијска транслација.

$$\boxed{a_{pr_2}} = a_{C_2} = \boxed{1\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}$$

Релативно кретање је праволинијско. Према томе, постоји само једна (тангенцијална) компонента релативног убрзања, која се добија као извод релативне брзине.

$$a_{rel} = \frac{dv_{rel}}{dt} = R = 2 \Rightarrow \boxed{a_{rel_2} = 2\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}$$

Кориолисово убрзање не постоји, јер је преносно кретање праволинијско, па је преносна угаона брзина једнака нули.

Апсолутно убрзање

$$\vec{a}_{a_2} = \vec{a}_{pr_2} + \vec{a}_{rel_2} + \vec{a}_{Cor_2} = \vec{a}_{pr_2} + \vec{a}_{rel_2}$$

$$a_{a_{x_2}} = -a_{pr_2} \sin 60° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$a_{a_{y_2}} = a_{pr_2} \cos 60° - a_{rel_2} = \frac{1}{2} - 2 = -\frac{3}{2}$$

$$\boldsymbol{a_{a_2}} = \sqrt{{a_{a_{x_2}}}^2 + {a_{a_{y_2}}}^2} = \sqrt{\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(-\frac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{3} = \mathbf{1{,}732\ \frac{m}{s^2}}$$