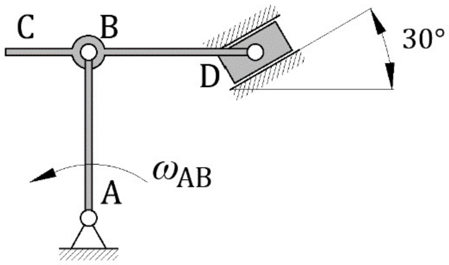
Универзитет Црне Горе
Електротехнички факултет Подгорица 2.7.2022.

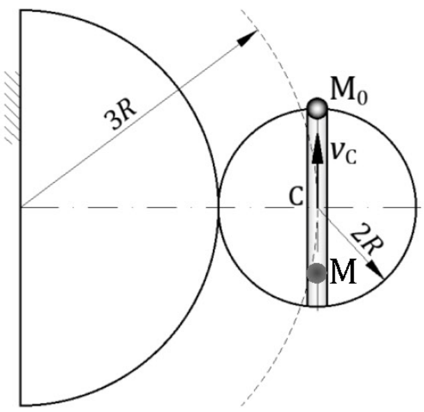
ПОПРАВНИ ПРВОГ КОЛОКВИЈУМА ИЗ МЕХАНИКЕ

1. По кружној путањи пречника 4 m креће се тачка тако да јој се положај мијења према закону $\varphi = 1 + 2t - 3t^2$. Колики је угао између тангенцијалног убрзања тачке и њеног укупног убрзања на почетку кретања? Колико обртаја тачка направи у првој секунди кретања?

2. У положају механизма приказаном на слици угаона брзина криваје AB износи 2 rad/s. Одредити брзину тачке C. Колико треба да буде убрзање зглоба B да би убрзање клизача D у приказаном положају износило $10\sqrt{3}/3\ \mathrm{m/s^2}$ низ вођицу? Дато је: $\overline{\mathrm{AB}} = \sqrt{3}$ m, $\overline{\mathrm{CB}} = 0{,}5$ m и $\overline{\mathrm{BD}} = 1$ m.



3. Систем почиње кретање из положаја приказаног на слици. Брзина средишта цилиндра, који се без котрљања клиза по полукружној вези, мијења се према закону $v_{\mathrm{C}} = \pi(2t - 3/2)$. Дуж најдуже тетиве у попречном пресјеку цилиндра урезан је канал унутар кога се креће тачка M према закону $\overline{\mathrm{M_0M}} = t^2 - 4t + 4$, почевши кретање из положаја $\mathrm{M_0}$ приказаног на слици. Ако је $R = 0{,}5$ m, одредити интензитет апсолутне брзине и апсолутног убрзања тачке M у тренутку $t_1 = 1$ s.



Предметни наставник:
Проф. др Оливера Јовановић

Сарадник:
Раде Грујичић

ПРВИ ЗАДАТАК

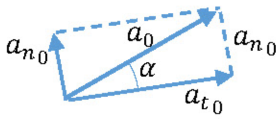
$$2R = 4\ \mathrm{m}, \qquad \varphi = 1 + 2t - 3t^2\ [\mathrm{rad}]$$

<u>Угао између тангенцијалног убрзања тачке и њеног укупног убрзања на почетку кретања</u>

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = 2 - 6t, \qquad \varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = -6$$

$$a_t = R\varepsilon = 2 \cdot (-6) = -12 \Rightarrow \left|\vec{a}_{t_0}\right| = 12$$

$$a_n = R\omega^2 = 2(2-6t)^2 \Rightarrow \left|\vec{a}_{n_0}\right| = 8$$



I начин

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{\left|\vec{a}_{n_0}\right|}{\left|\vec{a}_{t_0}\right|} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3} \Rightarrow \boldsymbol{\alpha} = \mathrm{arctg}\frac{2}{3} = \mathbf{33,69^\circ}$$

II начин

$$\vec{a}_0 = -12\vec{e}_t + 8\vec{e}_n, \qquad \vec{a}_{t_0} = -12\vec{e}_t$$

$$\cos\alpha = \frac{\vec{a}_{t_0} \cdot \vec{a}_0}{\left|\vec{a}_{t_0}\right| \cdot \left|\vec{a}_0\right|} = \frac{(-12\vec{e}_t)\cdot(-12\vec{e}_t + 8\vec{e}_n)}{12 \cdot \sqrt{144+64}} = \frac{144}{12\sqrt{208}} = \frac{12}{\sqrt{208}} \Rightarrow \boldsymbol{\alpha} = \arccos\frac{12}{\sqrt{208}} = \mathbf{33,69^\circ}$$

<u>Број обртаја у првој секунди кретања</u>

$$\left.\begin{matrix} \omega^* = 2 - 6t^* \\ \omega^* = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 2 - 6t^* \Rightarrow t^* = \frac{1}{3}\ \mathrm{s}$$

$$\varphi = 1 + 2t - 3t^2 \Rightarrow \begin{cases} \varphi_0 = 1 \\ \varphi_{\frac{1}{3}} = 1 + \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{4}{3} \\ \varphi_1 = 1 + 2 - 3 = 0 \end{cases}$$

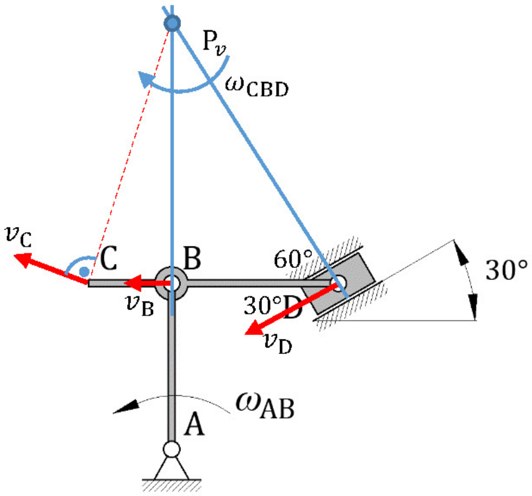
$$\varphi_{0\div1} = \varphi_{0\div\frac{1}{3}} + \varphi_{\frac{1}{3}\div1} = \left|\varphi_{\frac{1}{3}} - \varphi_0\right| + \left|\varphi_1 - \varphi_{\frac{1}{3}}\right| = \left|\frac{4}{3} - 1\right| + \left|0 - \frac{4}{3}\right| = \frac{1}{3} + \frac{4}{3} = \frac{5}{3}\ \mathrm{rad}$$

$$N = \frac{\varphi}{2\pi} \Rightarrow \boldsymbol{N_{0\div1}} = \frac{\varphi_{0\div1}}{2\pi} = \frac{5}{6\pi} = \mathbf{0,265}$$

ДРУГИ ЗАДАТАК

$$\omega_{AB} = 2\ \text{rad/s}, \qquad a_D = \frac{10\sqrt{3}}{3}\ \text{m/s}^2, \qquad \overline{AB} = \sqrt{3}\ \text{m}, \qquad \overline{CB} = 0{,}5\ \text{m}, \qquad \overline{BD} = 1\ \text{m}$$

<u>Брзина тачке C</u>



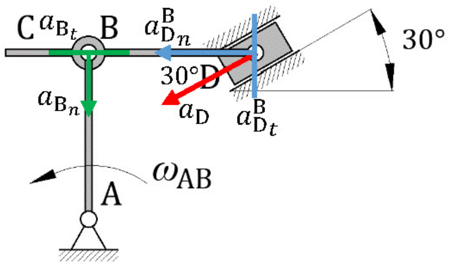
$$\operatorname{tg} 60° = \frac{\overline{BP_v}}{\overline{BD}} \Rightarrow \overline{BP_v} = \overline{BD}\operatorname{tg} 60° = \sqrt{3}$$

$$\overline{CP_v} = \sqrt{\overline{BP_v}^2 + \overline{BC}^2} = \sqrt{3 + 0{,}25} = \sqrt{3{,}25} = \sqrt{\frac{13}{4}} = \frac{\sqrt{13}}{2}$$

$$\left.\begin{aligned} v_B &= \overline{AB}\omega_{AB} \\ v_B &= \overline{BP_v}\omega_{CBD} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \omega_{CBD} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BP_v}}\omega_{AB} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}2 = 2\ \text{s}^{-1}$$

$$\boldsymbol{v_C} = \overline{CP_v}\omega_{CBD} = \frac{\sqrt{13}}{2}2 = \boldsymbol{\sqrt{13} = 3{,}61\ \text{m/s}}$$

<u>Убрзање тачке B</u>



$$\vec{a}_D = \vec{a}_B + \vec{a}_D^B \Rightarrow \vec{a}_D = \vec{a}_{B_t} + \vec{a}_{B_n} + \vec{a}_{D_t}^B + \vec{a}_{D_n}^B$$

$$a_{B_n} = \overline{AB}\omega_{AB}^2 = 4\sqrt{3}, \qquad a_{D_n}^B = \overline{DB}\omega_{CBD}^2 = 4$$

x

$$\underline{\underline{\vec{a}_D}} = \underline{\vec{a}_{B_t}} + \underline{\underline{\vec{a}_{B_n}}} + \underline{\vec{a}_{D_t}^B} + \underline{\underline{\vec{a}_{D_n}^B}}$$

$$x\!: \ a_D \cos 30° = a_{B_t} + a_{D_n}^B \Rightarrow \boxed{a_{B_t}} = a_D \cos 30° - a_{D_n}^B = \frac{10\sqrt{3}}{3}\frac{\sqrt{3}}{2} - 4 = \boxed{1}$$

$$\boldsymbol{a_B} = \sqrt{a_{B_t}^2 + a_{B_n}^2} = \sqrt{1 + 48} = \boldsymbol{7\ \text{m/s}^2}$$

ТРЕЋИ ЗАДАТАК

$$v_{\mathrm{C}} = \pi\left(2t - \frac{3}{2}\right), \qquad \overline{\mathrm{M_0M}} = t^2 - 4t + 4, \qquad R = 0{,}5\ \mathrm{m}, \qquad t_1 = 1\ \mathrm{s}$$

Цилиндар врши чисто клизање. Према томе, врши транслаторно кретање. Пошто је све вријеме током кретања у контакту са полукружном везом, у питању је криволинијска транслација, тачније кружна транслација.

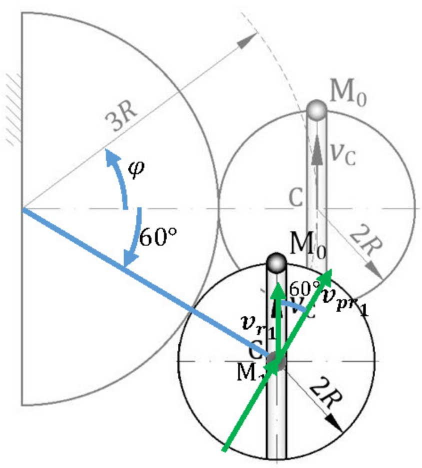
Потребно је да нађемо положај цилиндра у датом тренутку. Код транслаторног кретања тијело остаје „паралелно само себи“ све вријеме током кретања. Када је у питању кретање цилиндра, имамо информацију о брзини његовог средишта. Средиште врши кружно кретање по кружници полупречника $3R$. На основу те брзине можемо наћи угаони положај цилиндра у траженом тренутку.

$$v_{\mathrm{C}} = 3R\omega \Rightarrow \omega = \frac{v_{\mathrm{C}}}{3R} = \frac{\pi\left(2t - \frac{3}{2}\right)}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}\pi\left(2t - \frac{3}{2}\right) = \pi\left(\frac{4}{3}t - 1\right)$$

$$\left.\begin{aligned} \omega &= \pi\left(\frac{4}{3}t - 1\right) \\ \omega &= \frac{d\varphi}{dt} \end{aligned}\right\} \Rightarrow d\varphi = \pi\left(\frac{4}{3}t - 1\right)dt \Rightarrow \int_0^{\varphi_1} d\varphi = \int_0^1 \pi\left(\frac{4}{3}t - 1\right)dt \Rightarrow \varphi_1 = \pi\left(\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{2} - 1\right) = -\frac{\pi}{3}\ \mathrm{rad}$$

$$\overline{\mathrm{M_0M}} = t^2 - 4t + 4 \Rightarrow \overline{\mathrm{M_0M_1}} = 1^2 - 4 + 4 = 1\ \mathrm{m} = 2R$$

<u>Апсолутна брзина</u>



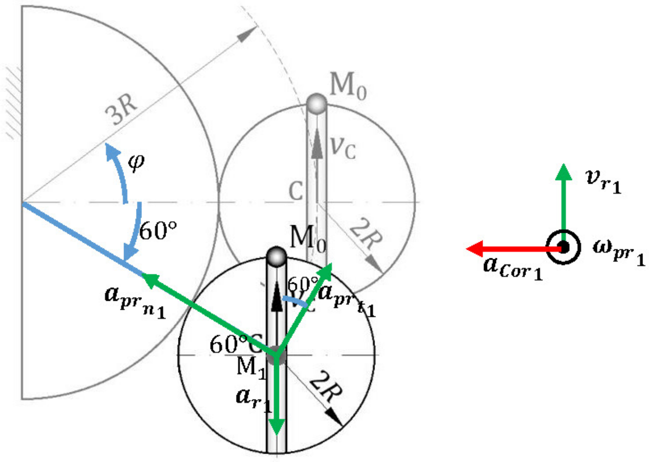
Преносно кретање је посљедица транслације цилиндра. Код транслаторног кретања се свака тачка креће на исти начин. Дакле, ако знамо брзину једне тачке на цилиндру, било које, знаћемо аутоматски преносну брзину посматране тачке, без обзира на то који положај унутар канала она заузима (то не би био случај уколико би цилиндар вршио равно или кружно кретање). У конкретном задатку се тачка $\mathrm{M_1}$ поклапа са тачком C.

$$v_{pr} = v_{\mathrm{C}} = \pi\left(2t - \frac{3}{2}\right) \Rightarrow v_{pr_1} = \pi\left(2 - \frac{3}{2}\right) = \frac{\pi}{2}\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

$$v_r = \frac{d}{dt}\left(\overline{\mathrm{M_0M}}\right) = 2t - 4 \Rightarrow v_{r_1} = -2\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

$$\boldsymbol{v_{a_1}} = \sqrt{\left(v_{r_1} + v_{pr_1}\cos 60°\right)^2 + \left(v_{pr_1}\sin 60°\right)^2} = \sqrt{\left(2 + \frac{\pi}{4}\right)^2 + \left(\frac{\pi\sqrt{3}}{4}\right)^2} = \mathbf{3,1}\ \frac{\mathbf{m}}{\mathbf{s}}$$

Апсолутно убрзање



$$a_{pr_t} = a_{C_t} = \frac{dv_C}{dt} = 2\pi \Rightarrow a_{pr_{t_1}} = 2\pi\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

$$a_{pr_n} = a_{C_n} = \frac{v_C^2}{3R} = \frac{\pi^2\left(2t - \frac{3}{2}\right)^2}{3R} \Rightarrow a_{pr_{n_1}} = \frac{\pi^2}{6}\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

$$a_r = \frac{dv_r}{dt} = 2 \Rightarrow a_{r_1} = 2\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

$$\omega_{pr} = \pi\left(\frac{4}{3}t - 1\right) \Rightarrow \omega_{pr_1} = \frac{\pi}{3}\ \mathrm{s}^{-1}$$

$$a_{Cor_1} = 2\omega_{pr_1} v_{r_1} \sin 90° = 2 \cdot \frac{\pi}{3} \cdot 2 \cdot 1 = \frac{4}{3}\pi\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

$$a_{a_1} = \sqrt{\left(a_{pr_{n_1}} \cos 60° + a_{Cor_1} - a_{pr_{t_1}} \sin 60°\right)^2 + \left(a_{pr_{n_1}} \sin 60° - a_{r_1} + a_{pr_{t_1}} \cos 60°\right)^2}$$

$$\boldsymbol{a_{a_1}} = \sqrt{\left(\frac{\pi^2}{12} + \frac{4}{3}\pi - \pi\sqrt{3}\right)^2 + \left(\frac{\pi^2\sqrt{3}}{12} - 2 + \pi\right)^2} = \mathbf{2,6\ \frac{m}{s^2}}$$