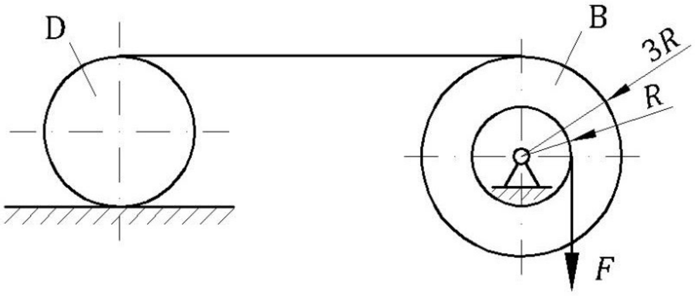
Универзитет Црне Горе Група I
Електротехнички факултет Подгорица 3.6.2022.

ДРУГИ КОЛОКВИЈУМ ИЗ МЕХАНИКЕ

1. Одредити домет куглице масе m која се у вертикалној равни xOy Земљиног гравитационог поља избацује брзином од $3\vec{i}$, ако на њу дјелује сила $\vec{F}_a = (2 + t^2)m\vec{i} - (8 - 12t)m\vec{j}$. Сви бројни подаци су дати у основним мјерним јединицама. Отпор ваздуха је занемарљив.

2. Хомогени кружни диск D система приказаног на слици се по хоризонталној подлози котрља без клизања. Његова маса износи 4 kg, а полупречник $3R$. Он је спрегнут са коаксијалним диском B, масе 2 kg и полупречника инерције за обртну осу $2R = 40$ cm, посредством лаког неистегљивог ужета. Систем се, из стања мировања, доводи у кретање дејством силе F чији се интензитет мијења према закону $F = 2s_{\mathrm{D}} + 1$ [N], гдје је s_{D} [m] пут који пређе центар инерције диска D. Одредити убрзање центра инерције диска D, а затим пут који исти пређе до тренутка у коме угаона брзина диска B износи 2 rad/s. **Користити се диференцијалним једначинама кретања.**

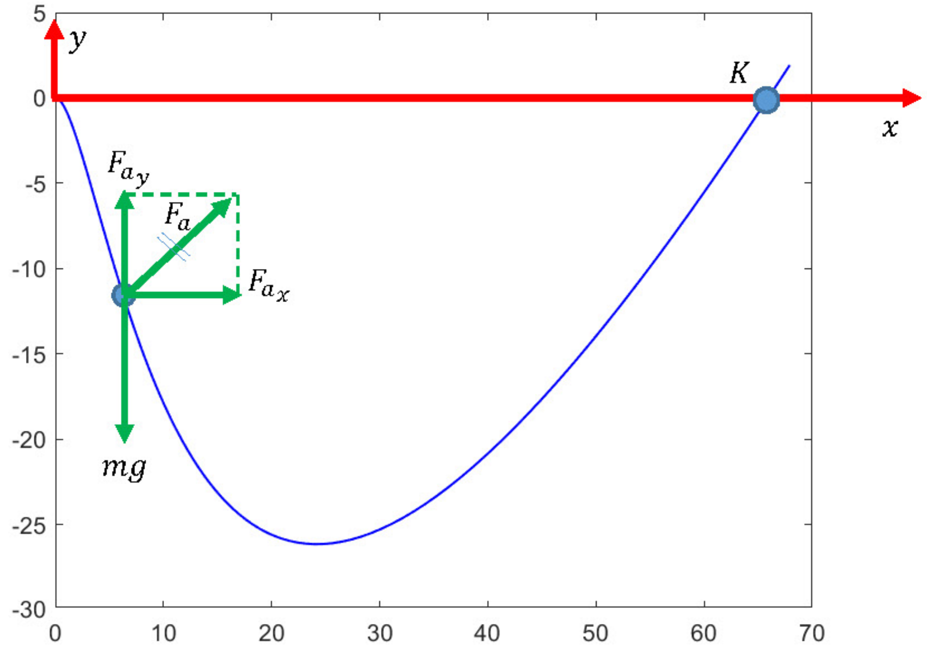


Предметни наставник:
Проф. др Оливера Јовановић

Сарадник:
Раде Грујичић

ПРВИ ЗАДАТАК

$$\vec{F}_a = (2+t^2)m\vec{i} - (8-12t)m\vec{j}$$



$$m\vec{a} = \vec{F} \Rightarrow \begin{cases} ma_x = (2+t^2)m \\ ma_y = -(8-12t)m - mg \end{cases}$$

$$\left.\begin{aligned} a_x &= 2+t^2 \\ a_x &= \frac{dv_x}{dt} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \int_3^{v_x} dv_x = \int_0^t (2+t^2)dt \Rightarrow v_x = 3 + 2t + \frac{t^3}{3}$$

$$\left.\begin{aligned} v_x &= 3+2t+\frac{t^3}{3} \\ v_x &= \frac{dx}{dt} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \int_0^{x} dx = \int_0^t \left(3+2t+\frac{t^3}{3}\right)dt \Rightarrow x = 3t + t^2 + \frac{t^4}{12}$$

$$\left.\begin{aligned} a_y &= 12t - 8 - 9{,}81 \\ a_y &= \frac{dv_y}{dt} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \int_0^{v_y} dv_y = \int_0^t (12t - 17{,}81)dt \Rightarrow v_y = 6t^2 - 17{,}81t$$

$$\left.\begin{aligned} v_y &= 6t^2 - 17{,}81t \\ v_y &= \frac{dy}{dt} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \int_0^{y} dy = \int_0^t (6t^2 - 17{,}81t)dt \Rightarrow y = 2t^3 - 8{,}905t^2$$

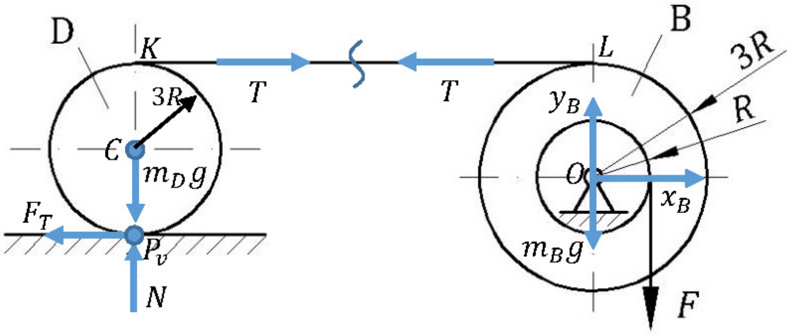
$$\left.\begin{aligned} y_K &= 0 \\ y_K &= 2t_K^3 - 8{,}905t_K^2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow 2t_K^3 - 8{,}905t_K^2 = 0 \Rightarrow 2t_K = 8{,}905 \Rightarrow t_K = 4{,}4525$$

$$\boldsymbol{x_K} = 3t_K + t_K^2 + \frac{t_K^4}{12} = 3 \cdot 4{,}4525 + 4{,}4525^2 + \frac{4{,}4525^4}{12} = \mathbf{65{,}934\ m}$$

ДРУГИ ЗАДАТАК

$$m_D = 4\ \text{kg}, \qquad r_D = 3R, \qquad m_B = 2\ \text{kg}, \qquad i_B = 2R, \qquad 2R = 40\ \text{cm}, \qquad F = 2s_C + 1$$

$$a_C, s_C^*(\omega_B^* = 2\ \text{rad/s}) = ?$$



$$\boxed{\begin{aligned} m_D a_C &= T - F_T \\ J_{D_C}\varepsilon_D &= T\cdot 3R + F_T\cdot 3R \\ J_{B_O}\varepsilon_B &= F\cdot R - T\cdot 3R \end{aligned}}$$

$$v_C = \overline{CP_v}\omega_D = 3R\omega_D \Rightarrow \omega_D = \frac{v_C}{3R} \Rightarrow \begin{cases} \varepsilon_D = \dfrac{a_C}{3R} \\ \varphi_D = \dfrac{s_C}{3R} \end{cases}$$

$$\left.\begin{aligned} v_K &= \overline{KP_v}\omega_D = 6R\omega_D \\ v_K &= v_L \\ v_L &= \overline{LO}\omega_B = 3R\omega_B \end{aligned}\right\} \Rightarrow 3R\omega_B = 6R\omega_D \Rightarrow \boxed{\omega_B = 2\omega_D = \frac{2v_C}{3R}} \Rightarrow \begin{cases} \varepsilon_B = \dfrac{2a_C}{3R} \\ \varphi_B = \dfrac{2s_C}{3R} \end{cases}$$

$$J_{D_C} = \frac{m_D r_D^2}{2} = \frac{9m_D R^2}{2}$$

$$J_{B_O} = m_B i_B^2 = 4m_B R^2$$

$$\begin{aligned} m_D a_C &= T - F_T & m_D a_C &= T - F_T \ldots (1) \\ \frac{9m_D R^2}{2}\frac{a_C}{3R} &= T\cdot 3R + F_T\cdot 3R, & \frac{1}{2}m_D a_C &= T + F_T \ldots (2) \\ 4m_B R^2\frac{2a_C}{3R} &= F\cdot R - T\cdot 3R & \frac{8}{3}m_B a_C &= F - 3T \ldots (3) \end{aligned}$$

Збир прве двије релације даје:

$$\frac{3}{2}m_D a_C = 2T \Rightarrow \frac{3}{4}m_D a_C = T$$

Збир претходног помноженог тројком и израза (3) даје:

$$\frac{9}{4}m_D a_C + \frac{8}{3}m_B a_C = F \Rightarrow 9a_C + \frac{16}{3}a_C = 2s_C + 1 \Rightarrow \boldsymbol{a_C = \frac{3}{43}(2s_C + 1)}$$

$$\left.\begin{aligned} a_C &= \frac{3}{43}(2s_C + 1) \\ a_C &= \frac{dv_C}{dt}\frac{ds_C}{ds_C} = \frac{v_C dv_C}{ds_C} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \int_0^{v_C^*} v_C dv_C = \frac{3}{43}\int_0^{s_C^*} (2s_C + 1) ds_C \Rightarrow \frac{{v_C^*}^2}{2} = \frac{3}{43}\left({s_C^*}^2 + s_C^*\right)$$

$$\frac{3}{43}{s_C^*}^2 + \frac{3}{43}s_C^* - \frac{{v_C^*}^2}{2} = 0$$

Од раније је позната веза

$$\omega_B = \frac{2v_C}{3R} \Rightarrow v_C = \frac{3}{2}R\omega_B \Rightarrow v_C^* = \frac{3}{2}\cdot 0{,}2 \cdot 2 = 0{,}6$$

$$\frac{3}{43}{s_C^*}^2 + \frac{3}{43}s_C^* - \frac{0{,}6^2}{2} = 0$$

$${s_C^*}^2 + s_C^* - 2{,}58 = 0$$

$$\boldsymbol{s^*_{C_{1/2}}} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4 \cdot 2{,}58}}{2} = \begin{cases} -2{,}18 \\ \mathbf{1{,}18} \end{cases}$$