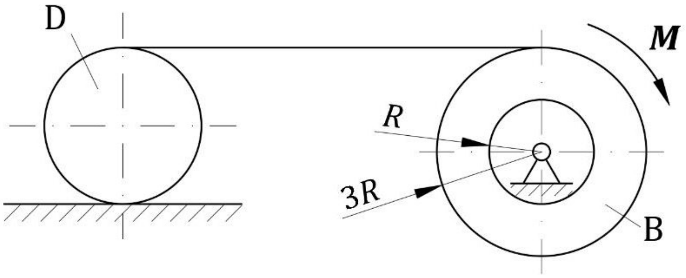
ДРУГИ КОЛОКВИЈУМ ИЗ МЕХАНИКЕ

1. Одредити висину максималног пењања куглице која се са хоризонталне подлоге у вертикалној равни xy Земљиног гравитационог поља избацује брзином од $3\vec{\imath}$, ако на њу дјелује сила $\vec{F}_a = (2 - 3t^2)m\vec{\imath} - (4 + 4t - 6t^2)m\vec{\jmath}$, гдје је m маса куглице. Сви бројни подаци су дати у основним мјерним јединицама. Отпор ваздуха је занемарљив.

2. Хомогени кружни диск D система приказаног на слици се по хоризонталној подлози котрља без клизања. Његова маса износи 4 kg, а полупречник $2R$. Он је спрегнут са коаксијалним диском B, масе 3 kg и полупречника инерције за обртну осу $2R = 40\ \mathrm{cm}$, помоћу лаког неистегљивог ужета. Систем се, из стања мировања, доводи у кретање дјеловањем момента M који се мијења према закону $M = 4s_\mathrm{D} + 1\ [\mathrm{Nm}]$, гдје је s_D [m] пут који пређе центар инерције диска D. Одредити угаоно убрзање диска B, а затим његову угаону брзину у тренутку у коме је центар инерције диска D прешао пут од 2 m. **Користити се диференцијалним једначинама кретања.**

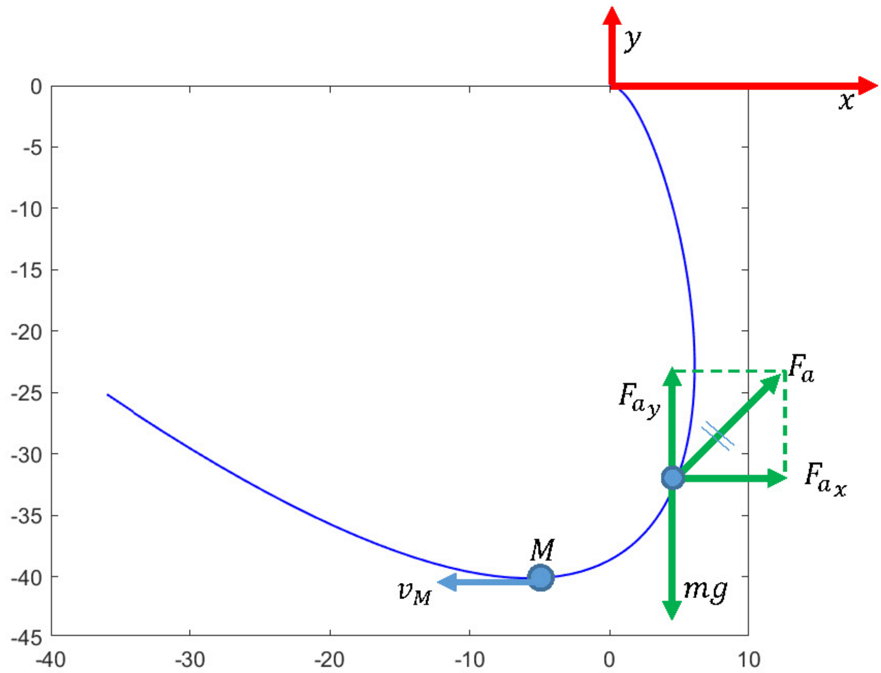


Предметни наставник:
Проф. др Оливера Јовановић

Сарадник:
Раде Грујичић

ПРВИ ЗАДАТАК

$$\vec{F_a} = (2 - 3t^2)m\vec{\imath} - (4 + 4t - 6t^2)m\vec{\jmath}$$



$$m\vec{a} = \vec{F} \Rightarrow \begin{cases} ma_x = (2 - 3t^2)m \\ ma_y = -(4 + 4t - 6t^2)m - mg \end{cases}$$

$$\left.\begin{aligned} a_y &= 6t^2 - 4t - 4 - 9{,}81 \\ a_y &= \frac{dv_y}{dt} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \int_0^{v_y} dv_y = \int_0^t (6t^2 - 4t - 13{,}81)dt \Rightarrow v_y = 2t^3 - 2t^2 - 13{,}81t$$

$$\left.\begin{aligned} v_y &= 2t^3 - 2t^2 - 13{,}81t \\ v_y &= \frac{dy}{dt} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \int_0^{y} dy = \int_0^t (2t^3 - 2t^2 - 13{,}81t)dt \Rightarrow y = \frac{t^4}{2} - \frac{2t^3}{3} - \frac{13{,}81t^2}{2}$$

$$\left.\begin{aligned} v_{y_M} &= 0 \\ v_{y_M} &= 2t_M^3 - 2t_M^2 - 13{,}81t_M \end{aligned}\right\} \Rightarrow 2t_M^3 - 2t_M^2 - 13{,}81t_M = 0 \Rightarrow t_M^2 - t_M - 6{,}905 = 0$$

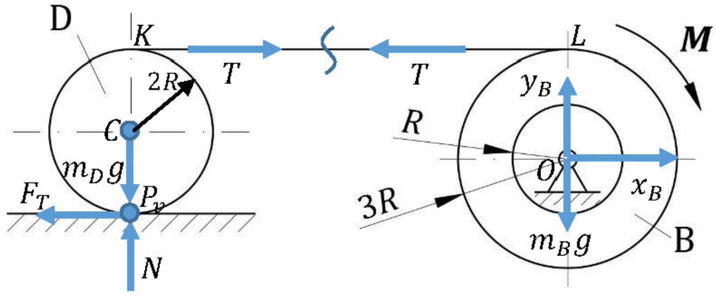
$$t_{M\,1/2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4 \cdot 6{,}905}}{2} = \begin{cases} t_{M_1} = -2{,}17 \\ t_{M_2} = 3{,}17 \end{cases}$$

$$\boldsymbol{y_M} = \frac{{t_M}^4}{2} - \frac{2{t_M}^3}{3} - \frac{13{,}81{t_M}^2}{2} = \frac{3{,}17^4}{2} - \frac{2 \cdot 3{,}17^3}{3} - \frac{13{,}81 \cdot 3{,}17^2}{2} = \boldsymbol{-40{,}13\ \mathrm{m}}$$

ДРУГИ ЗАДАТАК

$$m_D = 4\text{ kg},\qquad r_D = 2R,\qquad m_B = 3\text{ kg},\qquad i_B = 2R,\qquad 2R = 40\text{ cm},\qquad M = 4s_C + 1$$

$$\varepsilon_B, \omega_B^*(s_C^* = 2\text{ m}) = ?$$



$$\boxed{\begin{aligned} m_D a_C &= T - F_T \\ J_{D_C}\varepsilon_D &= T\cdot 2R + F_T\cdot 2R \\ J_{B_O}\varepsilon_B &= M - T\cdot 3R \end{aligned}}$$

$$v_C = \overline{CP_v}\omega_D = 2R\omega_D \Rightarrow \omega_D = \frac{v_C}{2R} \Rightarrow \begin{cases} \varepsilon_D = \dfrac{a_C}{2R} \\ \varphi_D = \dfrac{s_C}{2R} \end{cases}$$

$$\left.\begin{aligned} v_K &= \overline{KP_v}\omega_D = 4R\omega_D \\ v_K &= v_L \\ v_L &= \overline{LO}\omega_B = 3R\omega_B \end{aligned}\right\} \Rightarrow 3R\omega_B = 4R\omega_D \Rightarrow \boxed{\omega_B = \frac{4}{3}\omega_D = \frac{2v_C}{3R}} \Rightarrow \begin{cases} \varepsilon_B = \dfrac{2a_C}{3R} \\ \varphi_B = \dfrac{2s_C}{3R} \end{cases}$$

$$J_{D_C} = \frac{m_D r_D^2}{2} = \frac{4m_D R^2}{2}$$

$$J_{B_O} = m_B i_B^2 = 4m_B R^2$$

$$\begin{aligned} m_D a_C &= T - F_T \\ \frac{4m_D R^2}{2}\frac{a_C}{2R} &= T\cdot 2R + F_T\cdot 2R, \\ 4m_B R^2\frac{2a_C}{3R} &= M - T\cdot 3R \end{aligned}\qquad \begin{aligned} m_D a_C &= T - F_T \ldots(1) \\ \frac{1}{2}m_D a_C &= T + F_T \ldots(2) \\ \frac{8}{3}m_B a_C &= \frac{M}{R} - 3T \ldots(3) \end{aligned}$$

Збир прве двије релације даје:

$$\frac{3}{2}m_D a_C = 2T \Rightarrow \frac{3}{4}m_D a_C = T$$

Збир претходног помноженог тројком и израза (3) даје:

$$\frac{9}{4}m_D a_C + \frac{8}{3}m_B a_C = \frac{M}{R} \Rightarrow 9a_C + 8a_C = \frac{4s_C + 1}{0{,}2} \Rightarrow \boldsymbol{a_C = \frac{1}{3{,}4}(4s_C + 1)}$$

$$\left.\begin{aligned} a_C &= \frac{1}{3{,}4}(4s_C + 1) \\ a_C &= \frac{dv_C}{dt}\frac{ds_C}{ds_C} = \frac{v_C dv_C}{ds_C} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \int_0^{v_C^*} v_C dv_C = \frac{1}{3{,}4}\int_0^{s_C^*}(4s_C + 1)ds_C \Rightarrow \frac{{v_C^*}^2}{2} = \frac{1}{3{,}4}\left(2{s_C^*}^2 + s_C^*\right)$$

Од раније је позната веза

$$\omega_B = \frac{2v_C}{3R} \Rightarrow v_C = \frac{3}{2}R\omega_B \Rightarrow v_C = \frac{3}{2}0{,}2\omega_B \Rightarrow v_C = 0{,}3\omega_B$$

$$\frac{0{,}09{\omega_B^*}^2}{2} = \frac{1}{3{,}4}\left(2{s_C^*}^2 + s_C^*\right)$$

$$\omega_B^* = \sqrt{\frac{2}{0{,}09}\cdot\frac{1}{3{,}4}\left(2{s_C^*}^2 + s_C^*\right)}$$

$$\boldsymbol{\omega_B^*} = \sqrt{\frac{2}{0{,}09}\cdot\frac{1}{3{,}4}(8 + 2)} = \mathbf{8{,}08\ s^{-1}}$$