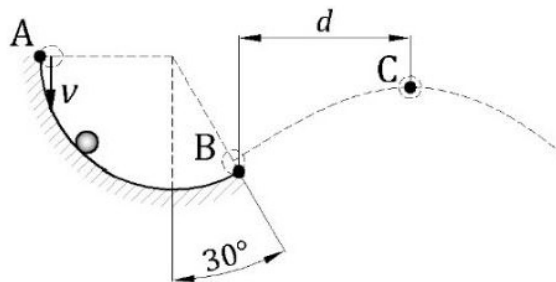
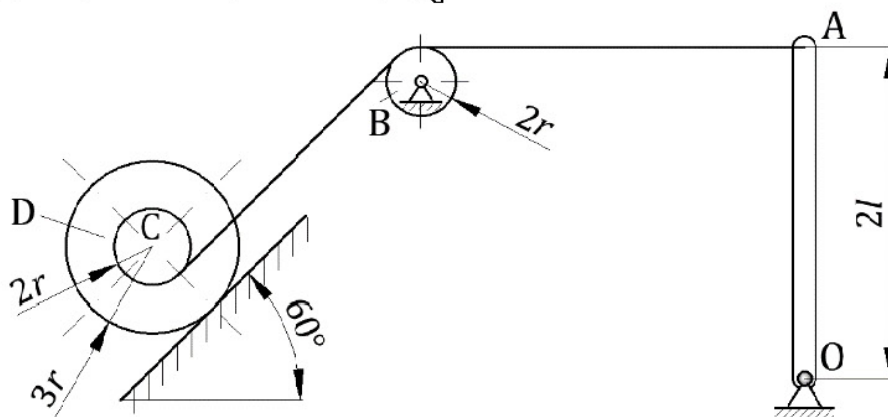


### ДРУГИ КОЛОКВИЈУМ ИЗ МЕХАНИКЕ

1. Материјална тачка се креће по глаткој кружној вези, почевши кретање из положаја А брзином  $v_A = 2 \text{ m/s}$ . У положају В напушта везу и долази у тачку максималног пењања С, која се у односу на тачку В налази на хоризонталном растојању  $d = 10 \text{ m}$ . Одредити једначину путање након напуштања везе и пут који тачка пређе између положаја А и положаја В. Кретање је у вертикалној равни.



2. Хомогени штап дужине  $2l = 8r$  може да се обрће у вертикалној равни око непомичног ослоња О. За њега је у тачки А везано неистегљиво уже које је пребачено преко котура В занемарљиве масе и другим крајем везано за диск D масе  $2 \text{ kg}$  који може да се по подлози котрља без клизања. Систем је кретање започео из положаја приказаног на слици, тако да је почетна угаона брзина штапа износила  $2 \text{ rad/s}$  у негативном математичком смјеру. Ако се систем зауставио након што се штап обрнуо за четвртину круга, одредити аксијални момент инерције штапа за сопствену осу ротације. Дато је:  $r = 13,8224 \text{ cm}$ ,  $i_{DC} = 2r$ .



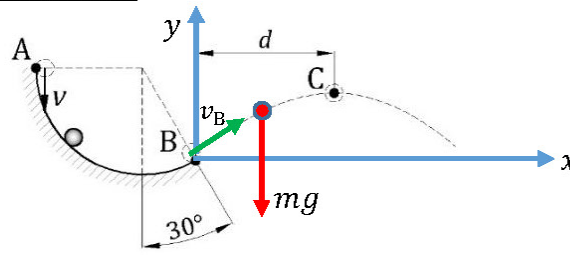
Предметни наставник:  
Проф. др Оливера Јовановић

Сарадник:  
Раде Грујичић

# ПРВИ ЗАДАТАК

$$\mu = 0, \quad v_A = 2 \text{ m/s}, \quad d = 10 \text{ m}$$

Једначина путање након напуштања везе



**B ÷ C**

$$m\vec{a} = \vec{F} \Rightarrow \begin{cases} ma_x = 0 \\ ma_y = -mg \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = -g \end{cases}$$

$$\left. \begin{matrix} a_x = 0 \\ a_x = \frac{dv_x}{dt} \end{matrix} \right\} \Rightarrow dv_x = 0dt \Rightarrow \int_{v_B \cos 30^\circ}^{v_x} dv_x = 0 \Rightarrow v_x = v_B \cos 30^\circ$$

$$\left. \begin{matrix} v_x = v_B \cos 30^\circ \\ v_x = \frac{dx}{dt} \end{matrix} \right\} \Rightarrow dx = v_B \cos 30^\circ dt \Rightarrow \int_0^x dx = v_B \cos 30^\circ \int_0^t dt \Rightarrow x = v_B \cos 30^\circ t$$

$$\left. \begin{matrix} x_C = v_B \cos 30^\circ t_C \\ x_C = d \end{matrix} \right\} \Rightarrow \boxed{t_C = \frac{d}{v_B \cos 30^\circ}}$$

$$\left. \begin{matrix} a_y = -g \\ a_y = \frac{dv_y}{dt} \end{matrix} \right\} \Rightarrow dv_y = -gdt \Rightarrow \int_{v_B \sin 30^\circ}^{v_y} dv_y = -g \int_0^t dt \Rightarrow v_y = v_B \sin 30^\circ - gt$$

$$\left. \begin{matrix} v_{y_C} = v_B \sin 30^\circ - gt_C \\ v_{y_C} = 0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow v_B \sin 30^\circ - gt_C = 0 \Rightarrow v_B \sin 30^\circ - g \frac{d}{v_B \cos 30^\circ} = 0$$

$$v_B^2 = \frac{gd}{\sin 30^\circ \cos 30^\circ} \Rightarrow v_B = \sqrt{\frac{gd}{\sin 30^\circ \cos 30^\circ}} = \sqrt{\frac{9,81 \cdot 10}{\frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}} = \sqrt{\frac{9,81 \cdot 40}{\sqrt{3}}} = \boxed{15,05 \text{ m/s}}$$

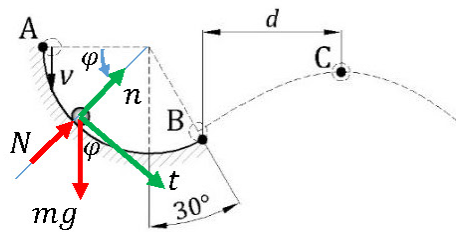
$$\left. \begin{matrix} v_y = v_B \sin 30^\circ - gt \\ v_y = \frac{dy}{dt} \end{matrix} \right\} \Rightarrow dy = (v_B \sin 30^\circ - gt)dt \Rightarrow \int_0^y dy = \int_0^t (v_B \sin 30^\circ - gt)dt$$

$$y = v_B \sin 30^\circ t - \frac{gt^2}{2}$$

$$\left. \begin{matrix} x = v_B \cos 30^\circ t \\ y = v_B \sin 30^\circ t - \frac{gt^2}{2} \end{matrix} \right\} \Rightarrow y = v_B \sin 30^\circ \frac{x}{v_B \cos 30^\circ} - \frac{g}{2 v_B^2 \cos^2 30^\circ} x^2$$

$$y = \operatorname{tg} 30^\circ x - \frac{g}{2 v_B^2 \cos^2 30^\circ} x^2 \Rightarrow \boxed{y = 0,577x - 0,029x^2}$$

Пут који тачка пређе између положаја А и положаја В



**A ÷ B**

$$m\vec{a} = \vec{F} \Rightarrow \begin{cases} ma_t = mg \cos \varphi \\ ma_n = N - mg \sin \varphi \end{cases}$$

$$\left. \begin{aligned} a_t &= g \cos \varphi \\ a_t &= \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dt} \frac{d\varphi}{d\varphi} = \frac{\omega dv}{d\varphi} = \frac{v dv}{R d\varphi} \end{aligned} \right\} \Rightarrow v dv = Rg \cos \varphi d\varphi \Rightarrow \int_{v_A=2}^{v_B=15,05} v dv = Rg \int_{\varphi_A=0}^{\varphi_B=120^\circ=\frac{2}{3}\pi \text{ rad}} \cos \varphi d\varphi$$

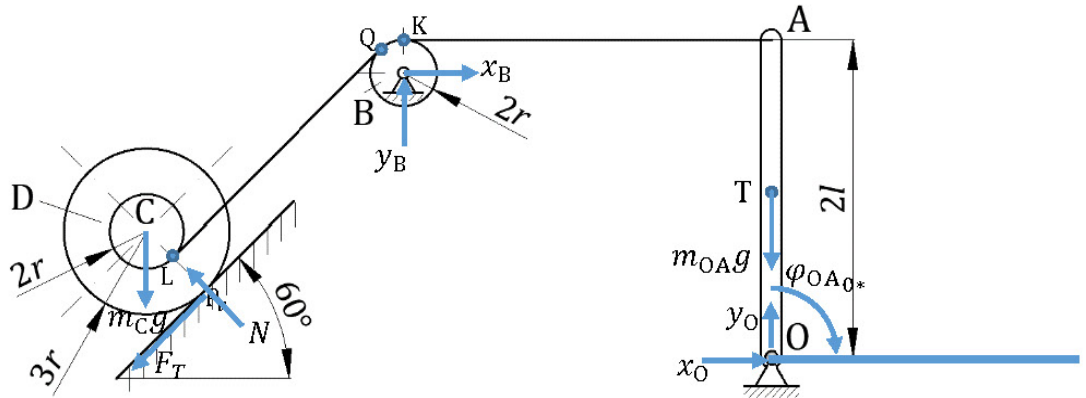
$$\frac{15,05^2}{2} - \frac{2^2}{2} = 9,81R \left( \sin \frac{2}{3}\pi - \sin 0 \right) \Rightarrow R = \frac{15,05^2 - 4}{2 \cdot 9,81 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} = \mathbf{13,098 \text{ m}}$$

$$\boxed{s_{AB}} = R\varphi_{AB} = 13,098 \cdot \frac{2}{3}\pi = \boxed{27,432 \text{ m}}$$

## ДРУГИ ЗАДАТАК

$$2l = 8r, \quad m_B = 0, \quad m_D = m = 2 \text{ kg}, \quad \omega_{OA_0} = 2 \text{ rad/s}, \quad \omega_{OA_*} = 0, \quad \varphi_{OA_0*} = \frac{2\pi}{4} \text{ rad}$$

$$r = 13,8224 \text{ cm}, \quad i_{DC} = 2r, \quad I_{OA_0} = ?$$



$$E_k = \frac{I_{OA_0} \omega_{OA}^2}{2} + \frac{I_B \omega_B^2}{2} + \frac{m_D v_C^2}{2} + \frac{I_{DC} \omega_D^2}{2}$$

$$I_{OA_0} = I_{OA_T} + m_{OA} \overline{TO}^2 = \frac{m_{OA} (2l)^2}{12} + m_{OA} l^2 = \frac{m_{OA} l^2}{3} + m_{OA} l^2 = \frac{4}{3} m_{OA} l^2 = \frac{4}{3} m_{OA} 16r^2$$

$$I_{OA_0} = \frac{64}{3} m_{OA} r^2$$

$$m_B = 0 \Rightarrow I_B = 0$$

$$I_{DC} = m_D i_{DC}^2 = 4mr^2$$

$$\left. \begin{aligned} v_A &= \overline{OA} \omega_{OA} = 2l \omega_{OA} = 8r \omega_{OA} \\ v_A &= v_K = v_Q = v_L = \overline{LP}_v \omega_D = (3r - 2r) \omega_D = r \omega_D \end{aligned} \right\} \Rightarrow \omega_D = 8\omega_{OA}$$

$$v_C = \overline{CP}_v \omega_D = 3r \cdot 8\omega_{OA} = 24r \omega_{OA} \Rightarrow \boxed{s_C = 24r \varphi_{OA}}$$

$$E_k = \frac{\frac{64}{3} m_{OA} r^2 \omega_{OA}^2}{2} + \frac{m (24r \omega_{OA})^2}{2} + \frac{4mr^2 64 \omega_{OA}^2}{2} = \left( \frac{32}{3} m_{OA} + 288m + 128m \right) r^2 \omega_{OA}^2$$

$$E_k = \left( \frac{32}{3} m_{OA} + 416m \right) r^2 \omega_{OA}^2$$

$$A_{0*}^{m_{OA}g} = m_{OA} g l = 4m_{OA} g r$$

$$A_{0*}^{m_D g} = -m_D g s_C^* \sin 60^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2} m g s_C^* = -\frac{\sqrt{3}}{2} m g \cdot 24r \varphi_{OA}^* = -12\sqrt{3} m g r \frac{\pi}{2} = -6\sqrt{3} \pi m g r$$

$$E_{k*} - E_{k_0} = A_{0*}$$

$$\left(\frac{32}{3}m_{OA} + 416m\right)r^2 \cdot 0^2 - \left(\frac{32}{3}m_{OA} + 416m\right)r^2 \cdot 2^2 = 4m_{OA}gr - 6\sqrt{3}\pi mgr$$

$$-\frac{128}{3}m_{OA}r^2 - 1664mr^2 = 4m_{OA}gr - 6\sqrt{3}\pi mgr$$

$$\left(-\frac{128}{3}r^2 - 4gr\right)m_{OA} = -6\sqrt{3}\pi mgr + 1664mr^2$$

$$m_{OA} = \frac{-6\sqrt{3}\pi mg + 1664mr}{-\frac{128}{3}r - 4g} = \frac{-6\sqrt{3}\pi \cdot 2 \cdot 9,81 + 1664 \cdot 2 \cdot 0,138224}{-\frac{128}{3}0,138224 - 4 \cdot 9,81} = \mathbf{4 \text{ kg}}$$

$$I_{OA0} = \frac{64}{3}m_{OA}r^2 = \frac{64}{3} \cdot 4 \cdot 0,138224^2 = \mathbf{1,63 \text{ kgm}^2}$$