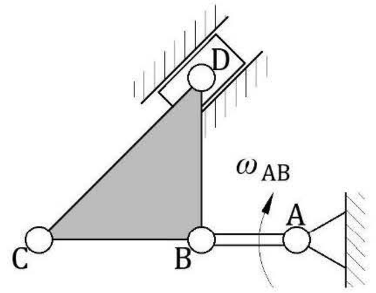
ПРВИ КОЛОКВИЈУМ ИЗ МЕХАНИКЕ

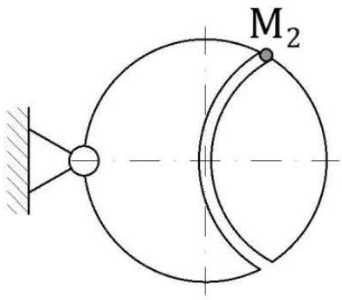
1. Тачка се креће према закону $\varphi(t) = (t^3/3 + 5t^2/2 + 6t)$ [rad] по кружници полупречника 2 m.

- Колики пут тачка пређе у интервалу $t \in [1; 4]$?
- Провјерити да ли је могуће да интензитет брзине у два различита тренутка износи 20 m/s.

2. У положају механизма приказаном на слици криваја AB има угаону брзину од 4 s^{-1} и угаоно убрзање од 4 s^{-2}. Ако њена дужина износи 200 mm, а дужина катете једнакокраког правоуглог троугла 500 mm, за приказани положај одредити брзину зглоба C и убрзање клизача D.



3. Диск полупречника $R = 2$ m се у позитивном математичком смјеру обрће око непомичног ослонца тако да му се угаона брзина мијења према закону πt^2. Унутар кружног канала полупречника R креће се тачка M почетном релативном брзином од 1 m/s тако да јој се релативно тангенцијално убрзање мијења према закону πt. Након двије секунде од почетка кретања тачка M се налази на излазу из канала, као што је приказано на слици. Одредити интензитет апсолутне брзине и апсолутног убрзања тачке у датом тренутку.



Предметни наставник:
Проф. др Оливера Јовановић

Сарадник:
Раде Грујичић

ПРВИ ЗАДАТАК

Тачка се креће према закону $\varphi(t) = (t^3/3 + 5t^2/2 + 6t)$ [rad] по кружници полупречника 2 m.

- Колики пут тачка пређе у интервалу $t \in [1; 4]$?
- Провјерити да ли је могуће да интензитет брзине у два различита тренутка износи 20 m/s.

<u>Пређени пут у интервалу $t \in [1; 4]$</u>

$$\left.\begin{array}{l} s = R\varphi \\ R = 2 \\ \varphi = t^3/3 + 5t^2/2 + 6t \end{array}\right\} \Rightarrow s = \frac{2}{3}t^3 + 5t^2 + 12t$$

Прво треба провјерити да ли тачка мијења смјер кретања унутар наведеног интервала. У тренутку промјене смјера кретања брзина има нулту вриједност.

$$\left.\begin{array}{l} v = \dfrac{ds}{dt} = 2t^2 + 10t + 12 \\ v^* = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow 2t^{*2} + 10t^* + 12 = 0$$

$$t^{*2} + 5t^* + 6 = 0 \Rightarrow t^*_{1/2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 4 \cdot 6}}{2} = \frac{-5 \pm 1}{2} = \begin{cases} t^*_1 = -3 \\ t^*_2 = -2 \end{cases}$$

Дакле, нема промјене смјера кретања унутар наведеног интервала.

$$\left.\begin{array}{l} s_{1-4} = |s_4 - s_1| \\ s_1 = \dfrac{2}{3}1^3 + 5 \cdot 1^2 + 12 \cdot 1 = \dfrac{53}{3} \\ s_4 = \dfrac{2}{3}4^3 + 5 \cdot 4^2 + 12 \cdot 4 = \dfrac{512}{3} \end{array}\right\} \Rightarrow \boldsymbol{s_{1-4}} = \left|\frac{512}{3} - \frac{53}{3}\right| = \frac{459}{3} = \mathbf{153}$$

<u>Тренуци у којима интензитет брзине износи 20 m/s</u>

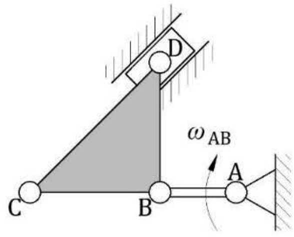
$$\left.\begin{array}{l} v = 2t^2 + 10t + 12 \\ v^\# = 20 \end{array}\right\} \Rightarrow 2t^{\#2} + 10t^\# + 12 = 20$$

$$t^{\#2} + 5t^\# - 4 = 0 \Rightarrow t^\#_{1/2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 4 \cdot 4}}{2} = \frac{-5 \pm 6{,}4}{2} = \begin{cases} t^\#_1 = -5{,}7 \\ t^\#_2 = 0{,}7 \end{cases}$$

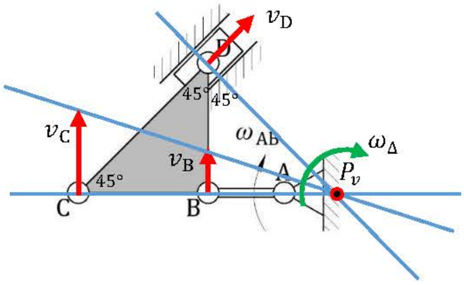
Једно рјешење је негативно и самим тим нема физичког смисла. Према томе, брзина може имати вриједност од 20 m/s само у једном временском тренутку.

ДРУГИ ЗАДАТАК

У положају механизма приказаном на слици кривача AB има угаону брзину од $4\ \mathrm{s}^{-1}$ и угаоно убрзање од $4\ \mathrm{s}^{-2}$. Ако њена дужина износи 200 mm, а дужина катете једнакокраког правоуглог троугла 500 mm, за приказани положај одредити брзину зглоба C и убрзање клизача D.



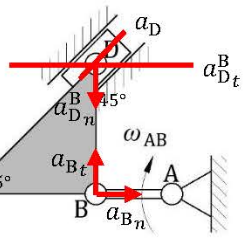
Брзина зглоба C



$$v_{\mathrm{B}} = \overline{\mathrm{AB}}\omega_{\mathrm{AB}} = 0{,}2 \cdot 4 = 0{,}8\ \mathrm{ms}^{-1}$$

$$\left.\begin{aligned} v_{\mathrm{B}} &= \overline{\mathrm{BP}_v}\omega_{\Delta} \\ v_{\mathrm{C}} &= \overline{\mathrm{CP}_v}\omega_{\Delta} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} v_{\mathrm{B}} &= 0{,}5 \cdot \omega_{\Delta} \\ v_{\mathrm{C}} &= 1 \cdot \omega_{\Delta} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} \omega_{\Delta} &= \frac{v_{\mathrm{B}}}{0{,}5} = \frac{0{,}8}{0{,}5} = 1{,}6 \\ \boldsymbol{v_{\mathrm{C}}} &= 1 \cdot 1{,}6 = \mathbf{1{,}6\ ms^{-1}} \end{aligned}\right\}$$

Убрзање клизача D



$$\vec{a}_{\mathrm{D}} = \vec{a}_{\mathrm{B}} + \vec{a}_{\mathrm{D}_t}^{\mathrm{B}} + \vec{a}_{\mathrm{D}_n}^{\mathrm{B}}$$

$$\underline{\vec{a}_{\mathrm{D}}} = \underline{\underline{\vec{a}_{\mathrm{B}_t}}} + \underline{\underline{\vec{a}_{\mathrm{B}_n}}} + \underline{\vec{a}_{\mathrm{D}_t}^{\mathrm{B}}} + \underline{\underline{\vec{a}_{\mathrm{D}_n}^{\mathrm{B}}}}$$

45°

$$a_{\mathrm{B}_t} = \overline{\mathrm{AB}}\varepsilon_{\mathrm{AB}} = 0{,}2 \cdot 4 = 0{,}8\ \mathrm{ms}^{-2}$$

$$a_{\mathrm{B}_n} = \overline{\mathrm{AB}}\omega_{\mathrm{AB}}^2 = 0{,}2 \cdot 4^2 = 3{,}2\ \mathrm{ms}^{-2}$$

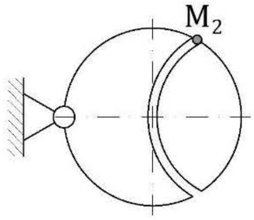
$$a_{\mathrm{D}_n}^{\mathrm{B}} = \overline{\mathrm{BD}}\omega_{\Delta}^2 = 0{,}5 \cdot 1{,}6^2 = 1{,}28\ \mathrm{ms}^{-2}$$

Пројектовањем лијеве и десне стране векторске релације на правац вертикале добија се:

$$a_{\mathrm{D}}\frac{\sqrt{2}}{2} = a_{\mathrm{B}_t} - a_{\mathrm{D}_n}^{\mathrm{B}} = 0{,}8 - 1{,}28 = -0{,}48 \Rightarrow \boldsymbol{a_{\mathrm{D}}} = \mathbf{-0{,}48\sqrt{2}\ ms^{-2}} = \mathbf{-0{,}679\ ms^{-2}}$$

ТРЕЋИ ЗАДАТАК

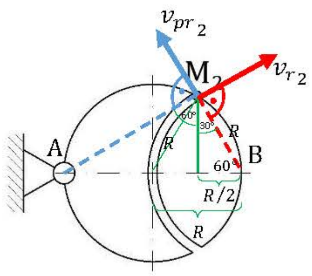
Диск полупречника $R = 2\ \mathrm{m}$ се у позитивном математичком смјеру обрће око непомичног ослонца тако да му се угаона брзина мијења према закону πt^2. Унутар кружног канала полупречника R креће се тачка M почетном релативном брзином од $1\ \mathrm{m/s}$ тако да јој се релативно тангенцијално убрзање мијења према закону πt. Након двије секунде од почетка кретања тачка M се налази на излазу из канала, као што је приказано на слици. Одредити интензитет апсолутне брзине и апсолутног убрзања тачке у датом тренутку.



Преносно кретање је кружно кретање око непомичног ослонца A, а релативно кретање је кружно кретање по кружници са центром у тачки B.

преносно	релативно
$\omega_{pr} = \pi t^2$	$v_{r_0} = 1$ $a_{r_t} = \pi t$

<u>Апсолутна брзина након двије секунде од почетка кретања</u>



$$\overline{\mathrm{AM}_2} = \sqrt{\left(R + \frac{R}{2}\right)^2 + (R\sin 60°)^2} = \sqrt{\frac{9}{4}R^2 + \left(R\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{4}R^2 + \frac{3}{4}R^2} = R\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$$

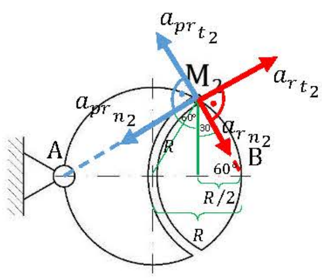
$$\overline{\mathrm{BM}_2} = R = 2$$

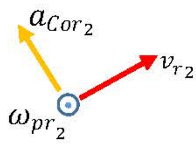
$$\boxed{v_{pr_2}} = \overline{\mathrm{AM}_2} \cdot \omega_{pr_2} = 2\sqrt{3} \cdot \pi \cdot 2^2 = \boxed{8\sqrt{3}\pi} = 43{,}53$$

$$\left.\begin{aligned} a_{r_t} &= \pi t \\ a_{r_t} &= \frac{dv_r}{dt} \end{aligned}\right\} \Rightarrow dv_r = \pi t dt \Rightarrow \int_1^{v_r} dv_r = \pi \int_0^t t dt \Rightarrow v_r = 1 + \frac{\pi t^2}{2} \Rightarrow \boxed{v_{r_2} = 1 + 2\pi} = 7{,}28$$

$$\overrightarrow{v_{pr}}_2 \perp \overrightarrow{v_r}_2 \Rightarrow \boldsymbol{v_{a2}} = \sqrt{v_{pr_2}^2 + v_{r_2}^2} = \sqrt{\left(8\sqrt{3}\pi\right)^2 + (1 + 2\pi)^2} = \mathbf{44,14}$$

Апсолутно убрзање након двије секунде од почетка кретања





$$\varepsilon_{pr} = \frac{d\omega_{pr}}{dt} = 2\pi t$$

$$\boxed{a_{pr_{n_2}}} = \overline{\mathrm{AM}_2} \cdot {\omega_{pr}}_2^2 = 2\sqrt{3} \cdot (\pi \cdot 2^2)^2 = 32\sqrt{3}\pi^2 = 547{,}03$$

$$\boxed{a_{pr_{t_2}}} = \overline{\mathrm{AM}_2} \cdot \varepsilon_{pr_2} = 2\sqrt{3} \cdot 2\pi \cdot 2 = 8\sqrt{3}\pi = 43{,}53$$

$$\boxed{a_{r_{n_2}}} = \frac{{v_{r_2}}^2}{\overline{\mathrm{BM}_2}} = \frac{(1+2\pi)^2}{2} = 26{,}52$$

$$\boxed{a_{r_{t_2}}} = \pi \cdot 2 = 6{,}28$$

$$\boxed{a_{Cor_2}} = 2 \cdot \omega_{pr_2} \cdot v_{r_2} \cdot \sin 90° = 2 \cdot \pi \cdot 2^2 \cdot (1+2\pi) \cdot 1 = 183{,}05$$

$$a_{a_2} = \sqrt{\left(a_{pr_{n_2}} - a_{r_{t_2}}\right)^2 + \left(a_{Cor_2} + a_{pr_{t_2}} - a_{r_{n_2}}\right)^2}$$

$$\boldsymbol{a_{a_2}} = \sqrt{(547{,}03 - 6{,}28)^2 + (183{,}05 + 43{,}53 - 26{,}52)^2} = \mathbf{576{,}57}$$