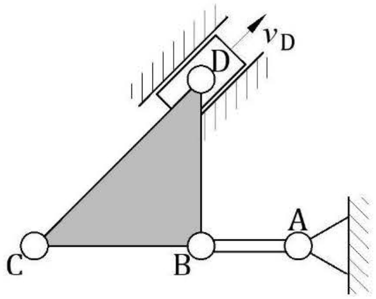
ПРВИ КОЛОКВИЈУМ ИЗ МЕХАНИКЕ

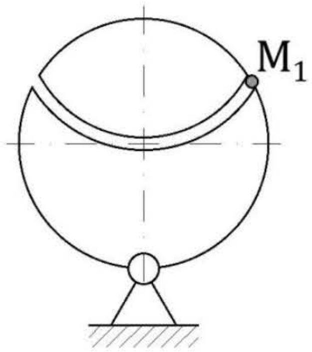
1. Тачка се креће према закону $s(t) = (4t^3/3 - 6t^2 + 8t)$ [m] по кружници полупречника 3 m.

- Колики угао тачка опише у интервалу $t \in [1; 4]$?
- Провјерити да ли је могуће да интензитет угаоне брзине у два различита тренутка износи 20 rad/s.

2. У положају механизма приказаном на слици клизач D има брзину од $0{,}8\sqrt{2}\ \mathrm{ms^{-1}}$ и убрзање од $-0{,}48\sqrt{2}\ \mathrm{ms^{-2}}$. Ако дужина полуге AB износи 200 mm, а дужина катете једнакокраког правоуглог троугла 500 mm, за приказани положај одредити брзину зглоба C и угаоно убрзање штапа AB.



3. Диск полупречника $R = 1$ m се у негативном математичком смјеру обрће око непомичног ослонца тако да му се угаона брзина мијења према закону πt^2. Унутар кружног канала полупречника R креће се тачка M почетном релативном брзином од 2 m/s тако да јој се релативно тангенцијално убрзање мијења према закону $2\pi t$. Након једне секунде од почетка кретања тачка M се налази на излазу из канала, као што је приказано на слици. Одредити интензитет апсолутне брзине и апсолутног убрзања тачке у датом тренутку.



Предметни наставник: | Сарадник:
Проф. др Оливера Јовановић | Раде Грујичић

ПРВИ ЗАДАТАК

Тачка се креће према закону $s(t) = (4t^3/3 - 6t^2 + 8t)$ [m] по кружници полупречника 3 m.

- Колики угао тачка опише у интервалу $t \in [1; 4]$?
- Провјерити да ли је могуће да интензитет угаоне брзине у два различита тренутка износи 20 rad/s.

<u>Описани угао у интервалу $t \in [1; 4]$</u>

$$\left.\begin{array}{l} s = R\varphi \\ R = 2 \\ s = 4t^3/3 - 6t^2 + 8t \end{array}\right\} \Rightarrow \varphi = \frac{s}{R} = \frac{4}{9}t^3 - 2t^2 + \frac{8}{3}t$$

Прво треба провјерити да ли тачка мијења смјер кретања унутар наведеног интервала. У тренутку промјене смјера кретања угаона брзина има нулту вриједност.

$$\left.\begin{array}{l} \omega = \dfrac{d\varphi}{dt} = \dfrac{4}{3}t^2 - 4t + \dfrac{8}{3} \\ \omega^* = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{4}{3}t^{*2} - 4t^* + \frac{8}{3} = 0$$

$$t^{*2} - 3t^* + 2 = 0 \Rightarrow t^*_{1/2} = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4 \cdot 2}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2} = \begin{cases} t^*_1 = 1 \\ t^*_2 = 2 \end{cases}$$

Дакле, тачка мијења смјер кретања у $t^* = 2$.

$$\left.\begin{array}{l} \varphi_{1-4} = \varphi_{1-2} + \varphi_{2-4} = |\varphi_2 - \varphi_1| + |\varphi_4 - \varphi_2| \\ \varphi_1 = \dfrac{4}{9}1^3 - 2 \cdot 1^2 + \dfrac{8}{3} \cdot 1 = \dfrac{10}{9} \\ \varphi_2 = \dfrac{4}{9}2^3 - 2 \cdot 2^2 + \dfrac{8}{3} \cdot 2 = \dfrac{8}{9} \\ \varphi_4 = \dfrac{4}{9}4^3 - 2 \cdot 4^2 + \dfrac{8}{3} \cdot 4 = \dfrac{64}{9} \end{array}\right\} \Rightarrow \boldsymbol{\varphi_{1-4}} = \left|\frac{8}{9} - \frac{10}{9}\right| + \left|\frac{64}{9} - \frac{8}{9}\right| = \mathbf{\frac{58}{9}} = \mathbf{6{,}44}$$

<u>Тренуци у којима интензитет угаоне брзине износи 20 rad/s</u>

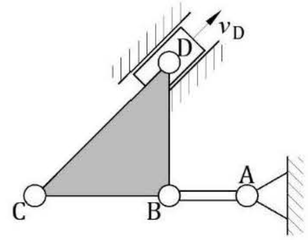
$$\left.\begin{array}{l} \omega = \dfrac{4}{3}t^2 - 4t + \dfrac{8}{3} \\ \omega^\# = 20 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{4}{3}t^{\#2} - 4t^\# + \frac{8}{3} = 20$$

$$t^{\#2} - 3t^\# - 13 = 0 \Rightarrow t^\#_{1/2} = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 4 \cdot 13}}{2} = \frac{3 \pm 7{,}81}{2} = \begin{cases} t^\#_1 = -2{,}41 \\ t^\#_2 = 5{,}41 \end{cases}$$

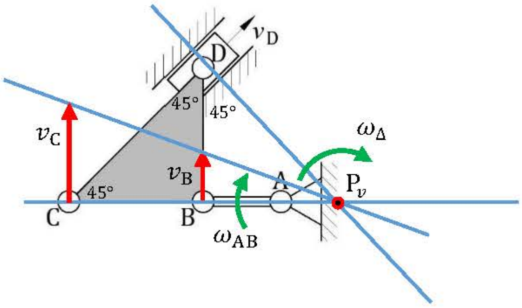
Једно рјешење је негативно и самим тим нема физичког смисла. Према томе, угаона брзина може имати вриједност од 20 rad/s само у једном временском тренутку.

ДРУГИ ЗАДАТАК

У положају механизма приказаном на слици клизач D има брзину од $0{,}8\sqrt{2}\ \mathrm{ms^{-1}}$ и убрзање од $-0{,}48\sqrt{2}\ \mathrm{ms^{-2}}$. Ако дужина полуге AB износи 200 mm, а дужина катете једнакокраког правоуглог троугла 500 mm, за приказани положај одредити брзину зглоба C и угаоно убрзање штапа AB.



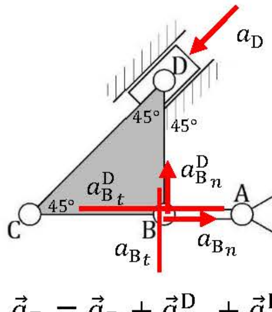
<u>Брзина зглоба C</u>



$$\left.\begin{aligned} v_\mathrm{D} &= \overline{\mathrm{DP}_v}\,\omega_\Delta \\ v_\mathrm{C} &= \overline{\mathrm{CP}_v}\,\omega_\Delta \\ v_\mathrm{B} &= \overline{\mathrm{BP}_v}\,\omega_\Delta \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} v_\mathrm{D} &= 0{,}5\sqrt{2}\cdot\omega_\Delta \\ v_\mathrm{C} &= 1\cdot\omega_\Delta \\ v_\mathrm{B} &= 0{,}5\cdot\omega_\Delta \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} \omega_\Delta &= \frac{v_\mathrm{D}}{0{,}5\sqrt{2}} = \frac{0{,}8\sqrt{2}}{0{,}5\sqrt{2}} = 1{,}6 \\ \boldsymbol{v_\mathrm{C}} &= 1\cdot 1{,}6 = \mathbf{1{,}6\ ms^{-1}} \\ v_\mathrm{B} &= 0{,}5\cdot\omega_\Delta = 0{,}8\ \mathrm{ms^{-1}} \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} v_\mathrm{B} &= 0{,}8\ \mathrm{ms^{-1}} \\ v_\mathrm{B} &= \overline{\mathrm{AB}}\,\omega_\mathrm{AB} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \omega_\mathrm{AB} = \frac{v_\mathrm{B}}{\overline{\mathrm{AB}}} = \frac{0{,}8}{0{,}2} = 4\ \mathrm{s^{-1}}$$

<u>Угаоно убрзање штапа AB</u>



$$\vec{a}_\mathrm{B} = \vec{a}_\mathrm{D} + \vec{a}_{\mathrm{B}_t}^\mathrm{D} + \vec{a}_{\mathrm{B}_n}^\mathrm{D}$$

$$\underline{\vec{a}_{\mathrm{B}_t}} + \underline{\underline{\vec{a}_{\mathrm{B}_n}}} = \underline{\underline{\vec{a}_\mathrm{D}}} + \underline{\vec{a}_{\mathrm{B}_t}^\mathrm{D}} + \underline{\underline{\vec{a}_{\mathrm{B}_n}^\mathrm{D}}}$$

45°

$$a_{\mathrm{B}_n} = \overline{\mathrm{AB}}\,\omega_\mathrm{AB}^2 = 0{,}2\cdot 4^2 = 3{,}2\ \mathrm{ms^{-2}}$$

$$a_{\mathrm{B}_n}^\mathrm{D} = \overline{\mathrm{BD}}\,\omega_\Delta^2 = 0{,}5\cdot 1{,}6^2 = 1{,}28\ \mathrm{ms^{-2}}$$

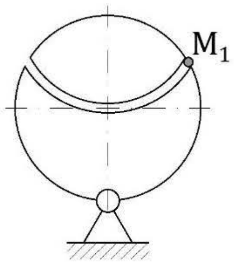
Пројектовањем лијеве и десне стране векторске релације на правац вертикале добија се:

$$a_{\mathrm{B}_t} = -a_{\mathrm{D}}\frac{\sqrt{2}}{2} + a_{\mathrm{B}_n}^{\mathrm{D}} = -0{,}48\sqrt{2}\frac{\sqrt{2}}{2} + 1{,}28 = 0{,}8\ \mathrm{ms}^{-2}$$

$$\left.\begin{aligned} a_{\mathrm{B}_t} &= 0{,}8\ \mathrm{ms}^{-2} \\ a_{\mathrm{B}_t} &= \overline{\mathrm{AB}}\varepsilon_{\mathrm{AB}} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boldsymbol{\varepsilon_{\mathrm{AB}}} = \frac{a_{\mathrm{B}_t}}{\overline{\mathrm{AB}}} = \frac{0{,}8}{0{,}2} = \mathbf{4\ s^{-2}}$$

ТРЕЋИ ЗАДАТАК

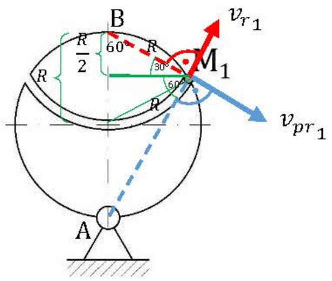
Диск полупречника $R = 1\ \mathrm{m}$ се у негативном математичком смјеру обрће око непомичног ослонца тако да му се угаона брзина мијења према закону πt^2. Унутар кружног канала полупречника R креће се тачка M почетном релативном брзином од $2\ \mathrm{m/s}$ тако да јој се релативно тангенцијално убрзање мијења према закону $2\pi t$. Након једне секунде од почетка кретања тачка M се налази на излазу из канала, као што је приказано на слици. Одредити интензитет апсолутне брзине и апсолутног убрзања тачке у датом тренутку.



Преносно кретање је кружно кретање око непомичног ослонца A, а релативно кретање је кружно кретање по кружници са центром у тачки B.

преносно	релативно
$\omega_{pr} = \pi t^2$	$v_{r_0} = 2$ $a_{r_t} = 2\pi t$

<u>Апсолутна брзина након једне секунде од почетка кретања</u>



$$\overline{\mathrm{AM_1}} = \sqrt{\left(2R - \frac{R}{2}\right)^2 + (R\sin 60°)^2} = \sqrt{\frac{9}{4}R^2 + \left(R\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{4}R^2 + \frac{3}{4}R^2} = R\sqrt{3} = \sqrt{3}$$

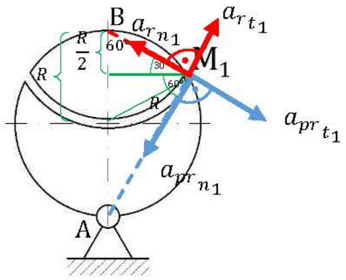
$$\overline{\mathrm{BM_1}} = R = 1$$

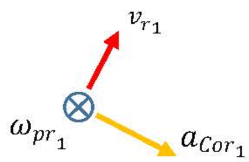
$$\boxed{v_{pr_1}} = \overline{\mathrm{AM_1}} \cdot \omega_{pr_1} = \sqrt{3}\cdot\pi\cdot 1^2 = \boxed{\sqrt{3}\pi} = 5{,}44$$

$$\left.\begin{aligned} a_{r_t} &= \pi t \\ a_{r_t} &= \frac{dv_r}{dt} \end{aligned}\right\} \Rightarrow dv_r = 2\pi t dt \Rightarrow \int_2^{v_r} dv_r = 2\pi\int_0^t t dt \Rightarrow v_r = 2 + \frac{2\pi t^2}{2} \Rightarrow \boxed{v_{r_1} = 2 + \pi\cdot 1^2} = 5{,}14$$

$$\overrightarrow{v_{pr}}_1 \perp \overrightarrow{v_r}_1 \Rightarrow \boldsymbol{v_{a_1}} = \sqrt{{v_{pr}}_1^2 + v_{r_1}^2} = \sqrt{\left(\sqrt{3}\pi\right)^2 + (2+\pi)^2} = \mathbf{7,49}$$

<u>Апсолутно убрзање након једне секунде од почетка кретања</u>





$$\varepsilon_{pr} = \frac{d\omega_{pr}}{dt} = 2\pi t$$

$$\boxed{a_{pr_{n_1}}} = \overline{\mathrm{AM}_1} \cdot {\omega_{pr}}_1^2 = \sqrt{3} \cdot (\pi \cdot 1^2)^2 = \sqrt{3}\pi^2 = 17{,}09$$

$$\boxed{a_{pr_{t_1}}} = \overline{\mathrm{AM}_1} \cdot \varepsilon_{pr_1} = \sqrt{3} \cdot 2\pi \cdot 1 = 2\sqrt{3}\pi = 10{,}88$$

$$\boxed{a_{r_{n_1}}} = \frac{{v_{r_1}}^2}{\overline{\mathrm{BM}_1}} = \frac{(2+\pi)^2}{1} = 26{,}44$$

$$\boxed{a_{r_{t_1}}} = 2\pi \cdot 1 = 6{,}28$$

$$\boxed{a_{Cor_1}} = 2 \cdot \omega_{pr_1} \cdot v_{r_1} \cdot \sin 90° = 2 \cdot \pi \cdot 1^2 \cdot (2+\pi) \cdot 1 = 32{,}31$$

$$a_{a_1} = \sqrt{\left(a_{pr_{n_1}} - a_{r_{t_1}}\right)^2 + \left(a_{Cor_1} + a_{pr_{t_1}} - a_{r_{n_1}}\right)^2}$$

$$\boldsymbol{a_{a_1}} = \sqrt{(17{,}09 - 6{,}28)^2 + (32{,}31 + 10{,}88 - 26{,}44)^2} = \mathbf{19,94}$$