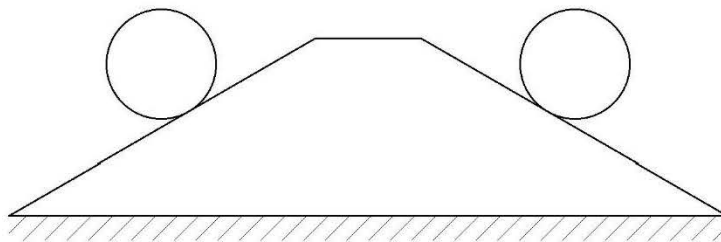


ДРУГИ КОЛОКВИЈУМ ИЗ МЕХАНИКЕ

1. Вертикална опруга дужине 1 m и крутости $1213,75 \text{ N/m}$ саопштава кретање куглице масе $0,5 \text{ kg}$ вертикално навише. Почетна брзина куглице је 1 m/s (навише). Колико треба деформисати опругу да би куглица достигла висину од 5 m у односу на свој почетни положај? Отпор ваздуха је занемарљив. Задатак урадити помоћу диференцијалне једначине кретања, а потом помоћу закона о промјени кинетичке енергије тачке.
2. Низ лијеви (глатки) дио стрме равни нагиба $24,1^\circ$ клизи хомогени кружни диск. Низ десни (храпави) дио стрме равни нагиба α исти такав диск се котрља без клизања. Ако оба диска кретање почињу истовремено са највише тачке без почетне брзине, одредити угао α при коме ће оба диска истовремено напуштити везе. Потом одредити силу трења котрљања диска ако је његова маса $30,581 \text{ kg}$.



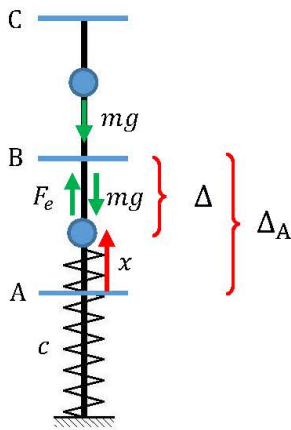
Предметни наставник:
Проф. др Оливера Јовановић

Сарадник:
Раде Грујичић

ПРВИ ЗАДАТАК

Вертикална опруга дужине 1 m и крутости 1213,75 N/m саопштава кретање куглице масе 0,5 kg вертикално навише. Почетна брзина куглице је 1 m/s (навише). Колико треба деформисати опругу да би куглица достигла висину од 5 m у односу на свој почетни положај? Отпор ваздуха је занемарљив. Задатак урадити помоћу диференцијалне једначине кретања, а потом помоћу закона о промјени кинетичке енергије тачке

Диференцијална једначина кретања тачке



A - почетни положај

B - положај гдје је опруга недеф.

C - крајњи положај

$$\Delta = \Delta_A - x$$

A - B

$$m\vec{a} = \vec{F} \Rightarrow ma = F \Rightarrow ma = c\Delta - mg \Rightarrow ma = c(\Delta_A - x) - mg$$

$$a = \frac{c}{m}(\Delta_A - x) - g \left. \vphantom{a} \right\} \Rightarrow \int_{v_A=1}^{v_B} v dv = \int_0^{\Delta_A} \left[\frac{c}{m}(\Delta_A - x) - g \right] dx$$

$$a = \frac{dv}{dt} \frac{dx}{dx} = \frac{v dv}{dx}$$

$$\frac{v_B^2}{2} - \frac{v_A^2}{2} = \frac{c}{m} \left(\Delta_A^2 - \frac{\Delta_A^2}{2} \right) - g\Delta_A \Rightarrow \boxed{\frac{v_B^2}{2} = \frac{v_A^2}{2} + \frac{c}{m} \frac{\Delta_A^2}{2} - g\Delta_A}$$

B - C

$$m\vec{a} = \vec{F} \Rightarrow ma = F \Rightarrow ma = -mg \Rightarrow a = -g$$

$$a = -g \left. \vphantom{a} \right\} \Rightarrow \int_{v_B}^{v_C} v dv = -g \int_{\Delta_A}^5 dx$$

$$a = \frac{dv}{dt} \frac{dx}{dx} = \frac{v dv}{dx}$$

$$\frac{v_C^2}{2} - \frac{v_B^2}{2} = -g(5 - \Delta_A) \Rightarrow \frac{v_C^2}{2} - \frac{v_A^2}{2} - \frac{c}{m} \frac{\Delta_A^2}{2} + g\Delta_A = -5g + g\Delta_A$$

$$\frac{v_C^2}{2} = \frac{v_A^2}{2} + \frac{c}{m} \frac{\Delta_A^2}{2} - 5g \geq 0$$

$$\Delta_A \geq \sqrt{\frac{2m}{c} \left(5g - \frac{v_A^2}{2} \right)} = \sqrt{\frac{2 \cdot 0,5}{1213,75} \left(5 \cdot 9,81 - \frac{1^2}{2} \right)} = 0,2 \text{ m} = \mathbf{20 \text{ cm}}$$

Закон о промјени кинетичке енергије тачке

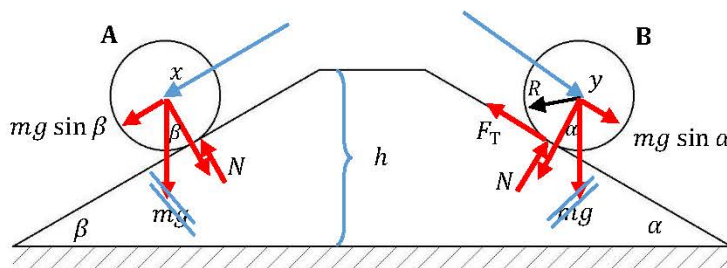
$$E_{kC} - E_{kA} = A_{A-C}^{mg} + A_{A-B}^{Fe}$$

$$E_{kC} = \frac{mv_A^2}{2} - mg \cdot 5 + \frac{1}{2} c \left(\Delta_A^2 - \underbrace{\Delta_B^2}_0 \right) \geq 0$$

$$\Delta_A \geq \sqrt{\frac{2}{c} \left(5mg - \frac{mv_A^2}{2} \right)} = \sqrt{\frac{2m}{c} \left(5g - \frac{v_A^2}{2} \right)} = 0,2 \text{ m} = \mathbf{20 \text{ cm}}$$

ДРУГИ ЗАДАТАК

Низ лијеви (глатки) дио стрме равни нагиба $24,1^\circ$ клизи хомогени кружни диск. Низ десни (храпави) дио стрме равни нагиба α исти такав диск се котрља без клизања. Ако оба диска кретање почињу истовремено са највише тачке без почетне брзине, одредити угао α при коме ће оба диска истовремено напуштити везе. Потом одредити силу трења котрљања диска ако је његова маса $30,581 \text{ kg}$.



Угао α

$$m\vec{a}_A = \vec{F}_A \Rightarrow ma_{Ax} = mg \sin \beta$$

$$a_{Ax} = g \sin \beta = \text{const}$$

$$a_{Ax} = \text{const} \Rightarrow x = g \sin \beta \frac{t^2}{2}$$

$$m\vec{a}_B = \vec{F}_B \Rightarrow ma_{By} = mg \sin \alpha - F_T$$

$$I_B \varepsilon_B = F_T R \Rightarrow \frac{mR^2}{2} \frac{a_{By}}{R} = F_T R$$

$$\left. \begin{aligned} ma_{By} &= mg \sin \alpha - F_T \\ \frac{m}{2} a_{By} &= F_T \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{3}{2} ma_{By} = mg \sin \alpha$$

$$a_{By} = \frac{2}{3} g \sin \alpha = \text{const}$$

$$a_{By} = \text{const} \Rightarrow y = \frac{2}{3} g \sin \alpha \frac{t^2}{2}$$

$$\left. \begin{aligned} h &= x \sin \beta \\ h &= y \sin \alpha \end{aligned} \right\} \Rightarrow x \sin \beta = y \sin \alpha \Rightarrow g \sin \beta \frac{t^2}{2} \sin \beta = \frac{2}{3} g \sin \alpha \frac{t^2}{2} \sin \alpha$$

$$\sin^2 \beta = \frac{2}{3} \sin^2 \alpha \Rightarrow \sin \alpha = \sqrt{\frac{3}{2}} \sin \beta = \sqrt{\frac{3}{2}} \sin 24,1^\circ = 0,5 \Rightarrow \alpha = 30^\circ$$

Сила трења котрљања

$$\left. \begin{aligned} \frac{m}{2} a_{By} &= F_T \\ a_{By} &= \frac{2}{3} g \sin \alpha \end{aligned} \right\} \Rightarrow F_T = \frac{m}{2} \cdot \frac{2}{3} g \sin \alpha = \frac{30,581}{3} \cdot 9,81 \cdot \sin 30^\circ = 50 \text{ N}$$